PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PURA E APLICADA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

TEORIA DE SEMIGRUPOS

E APLICAÇÕES À EDP'S

MATHEUS CHEQUE BORTOLAN

Teoria de Semigrupos
e Aplicações à EDP's

Matheus Cheque Bortolan

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Florianópolis, 2021.

Sumário

Introdução

O objetivo destas notas é apresentar a **Teoria de Semigrupos** e a sua importância para a teoria de equações diferenciais parciais semilineares. Para que o estudo de semigrupos e seus geradores infinitesimais seja melhor aproveitado, é esperado do leitor o conhecimento da teoria espectral para operadores fechados.

Estas notas podem ser usadas como um guia para a disciplina **MTM 510002 - Teoria de semigrupos e aplicações em EDP's**, mas isto não dispensa de maneira nenhuma o estudo por meio dos livros sugeridos na ementa da disciplina.

Estas notas são baseadas em [4, 7] e também notas de aula da disciplina de Análise Funcional II do ICMC-USP, do Prof. Alexandre Nolasco de Carvalho.

Gostaria de agradecer aos alunos Alessandra Piske, Éver Vasquez e Fabiano Pereira, que em 2019.2 me ajudaram a corrigir e melhorar este material.

Capítulo

1

Teoria de Semigrupos

Neste capítulo apresentamos os fatos básicos da teoria de semigrupos de operadores lineares e contínuos, indispensáveis ao entendimento das técnicas de solução de problemas parabólicos e hiperbólicos semilineares. Começamos com uma revisão da teoria básica, mas com o objetivo principal de apresentar a teoria de semigrupos fortemente contínuos e semigrupos analíticos. A exposição apresentada neste capítulo segue [2, 5, 7]. Grande parte da exposição estará concentrada na caracterização dos geradores de semigrupos lineares, já que nas aplicações da teoria, em geral, conhecemos a equação diferencial e não o operador solução.

Consideremos inicialmente a seguinte equação diferencial ordinária em $\mathbb{R}$ dada por

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $a \in \mathbb{R}$. Sabemos que a solução do problema (única, como veremos a seguir) é dada por $x(t) = x_0 e^{at}$, para $t \in \mathbb{R}$. As propriedades da função $T(t) = e^{at}$ que fazem com que $x(t)$ seja solução do problema são: $T(0) = 1$ e $\frac{dT}{dt}(t) = aT(t)$.

Usando a definição de derivada, encontremos propriedades de $T(t)$ para que se verifique a segunda propriedade. Temos

$$\frac{d}{dt}T(t) = \lim_{h\to 0} \frac{T(t+h) - T(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{a(t+h)} - e^{at}}{h} = e^{at} \lim_{h\to 0} \frac{e^{ah} - 1}{h}.$$

Assim, para que valha $\frac{dT}{dt} = aT(t)$, usamos as propriedades de que $e^{c+d} = e^c e^d$ e $\lim_{h\to 0} \frac{e^{ah}-1}{h} = a$. Este último limite só existe pois $\lim_{h\to 0}(e^{ah} - 1) = 0$. Logo, utilizamos as propriedades:

$$T(0) = 1, \qquad T(t+s) = T(t)T(s) \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0}(T(h) - 1) = 0.$$

Para um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$, com $\mathcal{L}(X)$ sendo o conjunto dos operadores lineares limitados de X em X, isso nos motiva fazer a seguinte definição:

Definição 1.1. Um **semigrupo** de operadores lineares em X é uma família $\{T(t) : t \geqslant 0\} \subset \mathcal{L}(X)$, denotada somente por T quando não houver confusão, que satisfaz:

(i) $T(0) = I$, onde I é o operador identidade em X;

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geqslant 0$.

Se, além disso, tivermos

(iii) $\|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} \xrightarrow{t\to 0^+} 0$, diremos que o semigrupo é **uniformemente contínuo**;

(iv) $\|T(t)x - x\|_X \xrightarrow{t\to 0^+} 0$, para cada $x \in X$, diremos que o semigrupo é **fortemente contínuo**, ou um **C^0-semigrupo**.

Observação 1.2. *Quando $T = \{T(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(X)$ é uma família definida para todo $t \in \mathbb{R}$, satisfazendo* **??** *e (ii) para $t, s \in \mathbb{R}$, então T será chamada de* **grupo** *de operadores lineares em X. Se $T \subset \mathcal{L}(X)$ é um grupo e satisfaz (iii) com $t \to 0$, ele é dito um* **grupo uniformemente contínuo**, *e quando satisfaz (iv) para $t \to 0$, é chamado de* **grupo fortemente contínuo** *ou* **C^0-grupo**.

Note que se $T \subset \mathcal{L}(X)$ é um grupo, então $T(t)T(-t) = T(0) = I$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Isso mostra que $T(t)$ é um isomorfismo para cada $t \in \mathbb{R}$, com inversa $T(t)^{-1} = T(-t)$.

Estudaremos os grupos de operadores lineares mais profundamente no Capítulo 3.

Além da função exponencial real, o estudo dos semigrupos de operadores lineares está associado ao estudo de problemas de Cauchy lineares da forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = Ax(t), & t > 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear (em geral ilimitado). O semigrupo T é o operador solução de (1.2), isto é, para cada $x_0 \in X$, $t \mapsto T(t)x_0$ é a solução (em algum sentido) de (1.2). Para explicar melhor esta observação consideremos primeiramente o caso em que A é um operador linear contínuo, isto é, A está em $\mathcal{L}(X)$.

Neste caso, podemos ver que o semigrupo $T = \{T(t) : t \geqslant 0\}$ é a solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}T(t) = AT(t), \quad t > 0, \\ T(0) = I, \end{cases}$$

isto é $T \in C([0,\infty), \mathcal{L}(X)) \cap C^1((0,\infty), \mathcal{L}(X))$ e satisfaz o problema acima.

Vamos considerar o problema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}T(t) = AT(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ T(0) = B \in \mathcal{L}(X), \end{cases} \tag{1.3}$$

e mostrar que, para cada $B \in \mathcal{L}(X)$ fixado, ele possui uma única solução (veja o Exercício 2) e que as propriedades de grupo estão satisfeitas quando $B = I$. Isso seguirá do Princípio da Contração de Banach (veja, por exemplo, [8, Theorem 9.23]) que enunciamos a seguir.

Lema 1.3 (Princípio da Contração de Banach). *Sejam (X,d) um espaço métrico completo e $F : X \to X$ uma função tal que $d(F^n(x), F^n(y)) \leqslant k\, d(x,y)$ para algum inteiro positivo n e $0 < k < 1$ (isto é, F^n é uma contração estrita). Então, existe um único $x^\star \in X$ tal que $F(x^\star) = x^\star$. O ponto $x^\star$ é chamado ponto fixo de F.*

Agora, fixado $\tau > 0$, vamos procurar uma solução para (1.3) que seja uma função em $C^1((-\tau,\tau), \mathcal{L}(X))$, lembrando que X é um espaço de Banach. Considere

$$\mathcal{K} = \{U \in C([-\tau,\tau], \mathcal{L}(X)) : U(0) = B\},$$

e para $U \in \mathcal{K}$ defina a transformação

$$F(U)(t) = B + \int_0^t AU(s)ds \quad \text{para } t \in [-\tau,\tau].$$

Exercício 1. Mostre que $\mathcal{K}$ com a norma induzida de $C([-\tau,\tau], \mathcal{L}(X))$ (a norma do supremo) é um espaço métrico completo.

Exercício 2. Uma **solução** de (1.3) em $[-\tau,\tau]$, para $\tau > 0$, é uma função

$$U \in C([-\tau,\tau], \mathcal{L}(X)) \cap C^1((-\tau,\tau), \mathcal{L}(X)),$$

que satisfaz $U(0) = B$ e

$$\frac{d}{dt}U(t) = AU(t) \quad \text{para todo } t \in (-\tau, \tau).$$

Mostre que U é uma solução de (1.3) se, e somente se, U é um ponto fixo de F em $\mathcal{K}$.

Queremos mostrar que existe um inteiro positivo n tal que F^n é uma contração. De fato:

$$\begin{aligned}\|F(U)(t) - F(V)(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leqslant \left|\int_0^t \|AU(s) - AV(s)\|_{\mathcal{L}(X)} ds\right| \\ &\leqslant |t|\|A\|_{\mathcal{L}(X)} \sup_{t\in[-\tau,\tau]} \|U(t) - V(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \tau\|A\|_{\mathcal{L}(X)} \sup_{t\in[-\tau,\tau]} \|U(t) - V(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\end{aligned}$$

Suponha que para $t \in [-\tau, \tau]$ e $n \geqslant 1$ tenhamos

$$\|F^{n-1}U(t) - F^{n-1}V(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{|t|^{n-1}\|A\|^{n-1}_{\mathcal{L}(X)}}{(n-1)!} \sup_{t\in[-\tau,\tau]} \|U(t) - V(t)\|_{\mathcal{L}(X)},$$

então

$$\begin{aligned}\|F^n(U)(t) - F^n(V)(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leqslant \left|\int_0^t \|AF^{n-1}U(s) - AF^{n-1}V(s)\|_{\mathcal{L}(X)} ds\right| \\ &\leqslant \frac{|t|^n\|A\|^n_{\mathcal{L}(X)}}{n!} \sup_{t\in[-\tau,\tau]} \|U(t) - V(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{\tau^n\|A\|^n_{\mathcal{L}(X)}}{n!} \sup_{t\in[-\tau,\tau]} \|U(t) - V(t)\|_{\mathcal{L}(X)}.\end{aligned}$$

Notando que $\frac{\tau^n\|A\|^n_{\mathcal{L}(X)}}{n!} \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$, segue que existe um inteiro positivo n_0 tal que F^{n_0} é uma contração, e segue do Princípio da Contração de Banach que existe um único ponto fixo para F em $\mathcal{K}$, e portanto uma única solução de (1.3) em $[-\tau, \tau]$. É fácil ver que este ponto fixo é uma função contínuamente diferenciável e que satisfaz (1.3).

Como a argumentação acima vale para todo $\tau > 0$, segue que toda solução de (1.3) está globalmente definida, isto é, definida em $\mathbb{R}$. Vamos agora verificar que a propriedade de grupo está satisfeita para a solução $T = \{T(t) \colon t \in \mathbb{R}\}$ de (1.3) com $B = I$. Note que $U(t) = T(t+s)$ e $V(t) = T(t)T(s)$ são soluções de (1.3) satisfazendo $U(0) = V(0) = T(s)$. Segue da unicidade de soluções que $T(t+s) = T(t)T(s)$. Portanto $T = \{T(t) \colon t \in \mathbb{R}\}$ é um *grupo uniformemente contínuo* de operadores lineares.

Estaremos interessados em situações mais gerais, já que em muitas aplicações o operador A não é limitado. Reciprocamente, dado um semigrupo de operadores lineares qualquer podemos associá-lo a uma equação diferencial através da seguinte definição:

Definição 1.4. Se $T \subset \mathcal{L}(X)$ é um C^0-semigrupo, seu **gerador infinitesimal** é o operador definido por $A\colon D(A) \subset X \to X$, onde

$$D(A) = \left\{ x \in X \colon \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\} \quad \text{e definimos}$$
$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \text{para todo } x \in D(A).$$

Observação 1.5. *Quando lidamos com equações diferenciais em geral, trabalhamos com operadores A que* não são limitados. *De fato, considere $X = C(\mathbb{R})$, isto é, o conjunto das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Mostremos que não é possível definir uma norma nesse espaço de modo que o operador $A\colon D(A) \subset X \to X$ dado por $D(A) = C^1(\mathbb{R})$ e*

$$(Af)(x) = \frac{df}{dx}(x) \quad \textit{para } f \in D(A),$$

seja um operador linear limitado.

Assuma que $\|\cdot\|$ é uma norma qualquer em X. Considere a função $f(x) = e^{\lambda x}$, para $\lambda \in \mathbb{R}$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ é fixado. Claramente $f \in X$ e das propriedades de norma, temos

$$\|Af\| = \left\| \frac{df}{dx} \right\| = \|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|.$$

Como λ pode ser tomado arbitrário, é fácil ver que não pode existir $C \geqslant 0$ tal que

$$\|Ag\| \leqslant C\|g\|, \textit{ para toda } g \in D(A),$$

o que mostra que A não é limitado, em nenhuma norma.

1.1 Exponencial de um operador linear limitado

Nessa seção veremos que o grupo T obtido através da equação (1.3) (com $B = I$) é da forma, $T(t) = e^{At}$, onde e^{At} é a exponencial de um operador linear, definida no exemplo abaixo.

Exemplo 1.6. Seja $A \in \mathcal{L}(X)$ e defina

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

Então $\{e^{At} : t \in \mathbb{R}\}$ define um grupo uniformemente contínuo com gerador A e satisfazendo $\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant e^{|t|\|A\|_{\mathcal{L}(X)}}$.

Solução

A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ converge absolutamente, uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$, visto que $\|A^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \|A\|^n_{\mathcal{L}(X)}$. Assim

$$\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{t^n A^n}{n!} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|t|\, \|A\|_{\mathcal{L}(X)})^n}{n!} = e^{|t|\, \|A\|_{\mathcal{L}(X)}}, \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

e também

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{t^{n-1} A^n}{(n-1)!} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(X)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|t|\, \|A\|_{\mathcal{L}(X)})^n}{n!} = \|A\|_{\mathcal{L}(X)} e^{|t|\, \|A\|_{\mathcal{L}(X)}}, \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

Portanto

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}, \qquad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

e

$$\|e^{At} - I\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant |t| \|A\|_{\mathcal{L}(X)} e^{|t|\|A\|_{\mathcal{L}(X)}} \longrightarrow 0,$$

quando $t \to 0$. Segue que $\{e^{At} : t \in \mathbb{R}\}$ é a única solução de (1.3) com $B = I$. O resultado agora segue das considerações anteriores.

Todo semigrupo fortemente contínuo possui uma limitação exponencial, dada no teorema a seguir.

Teorema 1.7. *Suponha que $T \subset \mathcal{L}(X)$ é um C^0-semigrupo. Então existem $M \geqslant 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M e^{\beta t} \text{ para todo } t \geqslant 0.$$

Além disso, para qualquer $\ell > 0$ podemos escolher qualquer $\beta \geqslant \frac{1}{\ell} \ln \|T(\ell)\|_{\mathcal{L}(X)}$ e então escolher $M \geqslant 1$.

Demonstração

Primeiramente note que existe $\eta > 0$ tal que $\sup_{s \in [0,\eta]} \|T(s)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$. Isto é consequência do fato que, para cada sequência $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $(0, \infty)$ com $s_n \to 0^+$, $\{T(s_n)x\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada para todo $x \in X$ e, do Princípio da Limitação Uniforme, $\{\|T(s_n)\|_{\mathcal{L}(X)}\}_{n \in \mathbb{N}}$

é limitada. Portanto não é difícil verificar que para cada $\ell \geqslant 0$ temos

$$\sup_{s\in[0,\ell]} \|T(s)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty.$$

Dado $\ell > 0$, fixamos $K = \sup_{s\in[0,\ell]} \|T(s)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$ e consideramos $\beta \geqslant \frac{1}{\ell} \ln \|T(\ell)\|_{\mathcal{L}(X)}$. Assim $\|T(\ell)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant e^{\beta\ell}$ e para $t \geqslant 0$, escrevemos $t = n\ell + s$ com $n \in \mathbb{N}$ e $s \in [0,\ell)$, e obtemos

$$\begin{aligned}\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|T(n\ell+s)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|T(\ell)^n T(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \|T(\ell)\|^n_{\mathcal{L}(X)} \|T(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leqslant Ke^{\beta n\ell} \leqslant Ke^{|\beta|\ell} e^{\beta(n\ell+s)} = Me^{\beta t},\end{aligned}$$

com $M = Ke^{|\beta|\ell}$, e o resultado está provado.

O teorema a seguir caracteriza completamente os semigrupos uniformemente contínuos de operadores através de seus geradores.

Teorema 1.8. *Dado um C^0-semigrupo $T \subset \mathcal{L}(X)$, as seguintes afirmativas são equivalentes:*

(a) *T é uniformemente contínuo;*

(b) *seu gerador infinitesimal está definido em todo X;*

(c) *para algum A em $\mathcal{L}(X)$, $T(t) = e^{At}$;*

(d) *T é um grupo uniformemente contínuo.*

Demonstração

Claramente (c) implica em (d) pelo Exemplo 1.6, e (d) implica trivialmente em (a). Além disso, novamente pelo Exemplo 1.6, (c) implica tanto (a) quanto (b).

Para (b) implica (a), se o gerador infinitesimal de T está definido em todo X, então o conjunto

$$\left\{\left\|\frac{T(t)x - x}{t}\right\|_X : 0 < t \leqslant 1\right\}$$

é limitado para cada $x \in X$. Pelo Princípio da Limitação Uniforme temos

$$\left\{\left\|\frac{T(t) - I}{t}\right\|_{\mathcal{L}(X)} : 0 < t \leqslant 1\right\}$$

é limitado, e portanto $T(t) \to I$ quando $t \to 0^+$.

Agora para (a) implica (c), é suficiente provar que se $T(t) \xrightarrow{t\to 0^+} I$ em $\mathcal{L}(X)$, então existe $A \in \mathcal{L}(X)$ com $T(t) = e^{At}$. Assumindo que $T(t) \to I$ quando $t \to 0^+$, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 1/2$ para todo $0 \leqslant t \leqslant \delta$. Ainda, para cada $t > 0$ fixado, temos

$$\|T(t+h) - T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|(T(h) - I)T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0,$$
$$\|T(t) - T(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|(T(h) - I)T(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0$$

quando $h \to 0^+$, já que $\|T(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é limitada para $h \in [0, \delta]$. Portanto a aplicação $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ é contínua, e a integral $\int_0^t T(s)ds$ está bem definida. Além disso

$$\left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta T(s)ds - I \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 1/2,$$

e portanto $\left(\int_0^\delta T(s)ds\right)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Defina

$$A = (T(\delta) - I)\left(\int_0^\delta T(s)ds\right)^{-1}.$$

Para cada $h > 0$

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h}\int_0^\delta T(s)ds &= \frac{1}{h}\left\{\int_h^{\delta+h} T(s)ds - \int_0^\delta T(s)ds\right\} \\ &= \frac{1}{h}\int_\delta^{\delta+h} T(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)ds \xrightarrow{h\to 0^+} T(\delta) - I. \end{aligned}$$

Logo $\frac{T(h)-I}{h} \xrightarrow{h\to 0^+} A$ e

$$\frac{T(t+h) - T(t)}{h} = T(t)\frac{T(h) - I}{h} = \frac{T(h) - I}{h}T(t) \xrightarrow{h\to 0^+} T(t)A = AT(t).$$

Portanto $t \mapsto T(t)$ tem uma derivada à direita

$$\frac{d^+}{dt}T(t) = T(t)A = AT(t)$$

que é contínua para $t \geqslant 0$. Segue do Lema de Dini (Lema A.3) que $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ é continuamente diferenciável e, da unicidade de soluções para o problema (1.3) com $B = I$ segue que $T(t) = e^{At}$ para todo $t \geqslant 0$.

Em vista desse teorema a teoria de semigrupos concentra-se no estudo dos semigrupos fortemente contínuos e seus geradores.

1.2 C^0-semigrupos

O resultado a seguir reúne fatos importantes sobre C^0-semigrupos, e será utilizado com frequência no restante do capítulo.

Teorema 1.9. *Seja $T \subset \mathcal{L}(X)$ um C^0-semigrupo.*

(1) *Dado $x \in X$, a aplicação $[0,\infty) \ni t \to T(t)x \in X$ é contínua.*

(2) *$[0,\infty) \ni t \mapsto \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \in [0,\infty)$ é semicontínua inferiormente*[1]*, e portanto mensurável.*

(3) *Seja A o gerador infinitesimal de T. Então A é fechado e densamente definido, e para $x \in D(A)$, $[0,\infty) \ni t \mapsto T(t)x \in D(A)$ é continuamente diferenciável e*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax \quad \text{para todo } t \geqslant 0.$$

(4) *Para $\beta \in \mathbb{R}$ como no Teorema 1.7, se $\mathrm{Re}\lambda > \beta$ então $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt \quad \text{para todo } x \in X$$

Demonstração

(1) Usando o Teorema 1.7, para $t > 0$ e $x \in X$, temos

$$\|T(t+h)x - T(t)x\|_X \leqslant \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|T(h)x - x\|_X \xrightarrow{h\to 0^+} 0,$$

[1] Lembre-se que uma função $\varphi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é dita ser semicontínua inferiormente se para cada $t \geqslant 0$ e $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $s \in (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{R}^+$ então $\varphi(s) \geqslant \varphi(t) - \varepsilon$. Equivalentemente, φ é semicontínua inferiormente se para cada $b \in \mathbb{R}$, o conjunto $\varphi^{-1}((b,\infty))$ é aberto em $[0,\infty)$.

$$\|T(t)x - T(t-h)x\|_X \leqslant \|T(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)}\|T(h)x - x\|_X \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} 0,$$

o que prova a continuidade de $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto T(t)x \in X$.

(2) Basta mostrar que $\{t \geqslant 0\colon \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} > b\}$ é aberto em $[0,\infty)$ para cada $b \in \mathbb{R}$. Mas $\|T(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)} > b$ implica que existe $x \in X$ com $\|x\|_X = 1$ tal que $\|T(t_0)x\| > b$. Segue de (1) que $\|T(t)x\| > b$ para todo t suficientemente próximo de t_0, logo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} > b$ para t em uma vizinhança de t_0 e o resultado segue.

(3) A prova de que A é fechado será feita na demonstração do item **(4)**. Para a densidade, seja $x \in X$ e, para $\varepsilon > 0$, defina $x_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon T(t)x\,dt$. Então $x_\varepsilon \to x$ quando $\varepsilon \to 0^+$ e para $h > 0$ temos

$$\frac{T(h)x_\varepsilon - x_\varepsilon}{h} = \frac{1}{\varepsilon h}\Big(\int_\varepsilon^{\varepsilon+h} T(t)x\,dt - \int_0^h T(t)x\,dt\Big) \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{T(\varepsilon)x - x}{\varepsilon},$$

assim $x_\varepsilon \in D(A)$ e $D(A)$ é denso em X. Agora, se $x \in D(A)$ temos

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h} = T(t)\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)x - x}{h} = T(t)Ax,$$

logo $T(t)x \in D(A)$ e $AT(t)x = T(t)Ax$. Portanto

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = \lim_{h\to 0^+}\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = AT(t)x = T(t)Ax,$$

existe e é contínua (pelo item **(1)**), e pelo Lema de Dini, a aplicação $\mathbb{R}^+ \in t \mapsto T(t)x \in D(A)$ é continuamente diferenciável e assim $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$ para todo $t > 0$.

(4) Note que se $\mathrm{Re}\lambda > \beta$ temos $\|e^{-\lambda t}T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{-(\mathrm{Re}\lambda - \beta)t}$, que é uma função integrável em $[0,\infty)$, e podemos definir $R(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$ por

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt.$$

Temos[a] $\|R(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{\mathrm{Re}\lambda-\beta}$, e para $x \in X$ e $h > 0$ obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}R(\lambda)x &= R(\lambda)\frac{T(h)x-x}{h}\\
&= \frac{1}{h}\Big(\int_h^\infty e^{-\lambda t+\lambda h}T(t)xdt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\Big)\\
&= \frac{1}{h}\Big(-\int_0^h e^{\lambda(h-t)}T(t)xdt + \int_0^\infty (e^{\lambda h}-1)e^{-\lambda t}T(t)xdt\Big)\\
&\xrightarrow{h\to 0^+} -x+\lambda R(\lambda)x,
\end{aligned} \tag{1.4}$$

o que mostra que $R(\lambda)x \in D(A)$ e $(\lambda - A)R(\lambda)x = x$. Portanto $\lambda - A$ é sobrejetivo. Além disso para $x \in D(A)$, usando integração por parte, segue que

$$\begin{aligned}
R(\lambda)Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Axdt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}T(t)xdt\\
&= e^{-\lambda t}T(t)x\Big|_0^\infty + \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt = -x+\lambda R(\lambda)x,
\end{aligned}$$

e portanto $R(\lambda)(\lambda-A)x = x$ para todo $x \in D(A)$ e $\lambda - A$ é também injetora. Logo $\lambda - A$ é uma bijeção de $D(A)$ sobre X com inversa $R(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$, e segue da [3, Proposição 2.1.6 (a)] que A é fechado, e portanto $\lambda \in \rho(A)$, e a prova está completa.

[a] Note na definição de $R(\lambda)$ e nesta estimativa utilizamos a mensurabilidade de $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$.

1.2.1 Iterações de operadores

Definição 1.10. Seja $T \subset \mathcal{L}(X)$ um C^0-semigrupo com gerador infinitesimal A. Defina $A^0 = I$, $A^1 = A$ e, estando definido A^{m-1}, indutivamente definimos

$$D(A^m) = \{x \in X : x \in D(A^{m-1}) \text{ e } A^{m-1}x \in D(A)\},$$

e para $x \in D(A^m)$, definimos $A^m x = A(A^{m-1}x)$.

Proposição 1.11. *Seja $T \subset \mathcal{L}(X)$ um C^0-semigrupo com gerador infinitesimal A. Então:*

(1) *para cada $m \in \mathbb{N}$, $D(A^m)$ é um subespaço vetorial de X e $A^m : D(A^m) \subset X \to X$ é um operador linear;*

(2) *se $x \in D(A^m)$ então $T(t)x \in D(A^m)$ para todo $t \geqslant 0$ e*

$$\frac{d^m}{dt^m}T(t)x = A^mT(t)x = T(t)A^mx \text{ para } t > 0;$$

(3) Fórmula de Taylor: *se $x \in D(A^m)$ e $t_0 \geqslant 0$ temos*

$$T(t)x = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(t-t_0)^k}{k!}A^kT(t_0)x + \frac{1}{(m-1)!}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{m-1}A^mT(s)xds;$$

(4) *para cada $x \in D(A^m)$ temos*

$$(T(t)-I)^mx = \int_0^t \cdots \int_0^t A^mT(s_1+\cdots+s_m)x\, ds_1\cdots ds_m;$$

(5) *$\cap_{m\geqslant 1}D(A^m)$ é denso em X.*

Demonstração

(1) Fica como exercício ao leitor.

(2) O caso $m = 1$ é o item **(3)** do Teorema 1.9. Agora suponha por indução que o resultado seja válido para m e o provemos para $m+1$. Para isto, seja $x \in D(A^{m+1})$, logo $x \in D(A^m)$ e da hipótese de indução temos $T(t)x \in D(A^m)$. Além disso, $A^mx \in D(A)$ e assim

$$A^mT(t)x = T(t)A^mx \in D(A),$$

e portanto $T(t)x \in D(A^{m+1})$. Finalmente

$$\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}T(t)x = \frac{d}{dt}\frac{d^m}{dt^m}T(t)x = \frac{d}{dt}T(t)A^mx = AT(t)A^mx = T(t)A^{m+1}x.$$

(3) Para $m = 1$, temos

$$T(t)x - T(t_0)x = \int_{t_0}^{t}\frac{d}{ds}T(s)xds = \int_{t_0}^{t}AT(s)xds,$$

e o restante da demonstração segue por indução, a cargo do leitor.

(4) Para $m = 1$, o resultado segue do caso $m = 1$ do item **(3)** deste teorema, com $t_0 = 0$. Novamente, este item segue por indução e a demonstração fica a cargo do leitor.

(5) Seja φ uma função em $C^\infty(\mathbb{R})$ com $\varphi(t) = 0$ em uma vizinhança de $t = 0$ e para t suficientemente grande. Sejam também $x \in X$ e $f = \displaystyle\int_0^\infty \varphi(t)T(t)x\,dt$. Para $h > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\frac{T(h)f - f}{h} = \int_h^\infty \frac{\varphi(t-h) - \varphi(t)}{h} T(t)x\,dt,$$

e assim $f \in D(A)$ e $Af = -\int_0^\infty \varphi'(t)T(t)x\,dt$. Como $-\varphi'$ satisfaz as mesmas condições que φ, temos $f \in D(A^2)$ e

$$A^2 f = \int_0^\infty \varphi''(t)T(t)x dt,$$

e φ'' satisfaz as mesmas condições que φ. Indutivamente, para cada $m \geqslant 1$, obtemos $f \in D(A^m)$ e

$$A^m f = (-1)^m \int_0^\infty \varphi^{(m)}(t)T(t)x\,dt,$$

o que mostra que $f \in \cap_{m\geqslant 1} D(A^m)$. Para mostrar que $\cap_{m\geqslant 1} D(A^m)$ é denso em X, escolha φ satisfazendo também $\int_0^\infty \varphi(t)dt = 1$, e defina $f_n = \int_0^\infty n\varphi(nt)T(t)xdt$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $t \mapsto n\varphi(nt)$ está em $C^\infty(\mathbb{R})$ e é zero numa vizinhaça de $t = 0$ e para t suficientemente grande, segue que $f_n \in \cap_{m\geqslant 1} D(A^m)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso $f_n = \int_0^\infty \varphi(s)T(s/n)xds$ para cada $n \in \mathbb{N}$, e assim, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos $f_n \to x$ quando $n \to \infty$.

Exercício 3. Seja $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador fechado, densamente definido e com $1 \in \rho(A)$. Mostre que:

(1) $\overline{D(A^2)} = X$;

(2) $Y_m = (D(A^m), \|\cdot\|_m)$ é um espaço de Banach, para cada $m \in \mathbb{N}$, onde $\|x\|_m = \sum_{k=0}^m \|A^k x\|_X$;

(3) $\overline{D(A^2)}^{Y_1} = Y_1$.

Dica: Tome $D(A) \ni f_n \to Ax \in X$, $x_n = (I - A)^{-1}(x - f_n)$ e mostre que $x_n \to x$ e $Ax_n \to Ax$.

Observação 1.12. *Segue imediatamente do Exercício 3 que se $u\colon \mathbb{R}_+ \to X$ é uma função tal que*

(a) *$u(t) \in D(A^m)$ para cada $t \in I \subset \mathbb{R}_+$ aberto;*

(b) *u possui n derivadas e $\frac{d^k u}{dt^k} \in D(A^m)$, para todo $t \in I$ e $k = 1, \cdots, n$;*

(c) *as funções $A^j \frac{d^k u}{dt^k}$, para $j = 0, \cdots, m$ e $k = 0, \cdots, n$ são contínuas em I;*

então $u \in C^n(I, Y_m)$.

Proposição 1.13. *Se A é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo $T \subset \mathcal{L}(X)$ então para cada $x \in D(A^m)$ a aplicação $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T(t)x$ está em $C^{m-k}(\mathbb{R}_+, Y_k)$, para cada $k = 0, \cdots, m$.*

Demonstração

Se $x \in D(A^m)$ então $x \in D(A^k)$ e $A^k x \in D(A^{m-k})$, para cada $k = 0, \cdots, m$. Da Proposição 1.11, segue que para $0 \leqslant j \leqslant m-k$

$$\frac{d^j}{dt^j} T(t)x = A^j T(t)x = T(t)A^j x,$$

e como $A^j x \in D(A^{m-j})$ segue que $\frac{d^j}{dt^j} T(t)x \in D(A^{m-j}) \subset D(A^k)$. Ainda, se $i = 0, \cdots, k$, temos $0 \leqslant i + j \leqslant m$ e assim

$$A^i \frac{d^j}{dt^j} T(t)x = A^{i+j} T(t)x = T(t)A^{i+j} x,$$

que é contínua na variável t. O resultado segue agora da Observação 1.12.

1.2.2 Unicidade

Teorema 1.14. *Sejam $T, S \subset \mathcal{L}(X)$ C^0-semigrupos com geradores infinitesimais A e B, respectivamente. Se $A = B$ então $T(t) = S(t)$, $t \geqslant 0$.*

Demonstração

Seja $x \in D(A) = D(B)$. Do Teorema 1.9 segue facilmente que a função $[0,t] \ni s \mapsto T(t-s)S(s)x$ é contínua em $[0,t]$ e diferenciável em $(0,t)$, e além disso

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} T(t-s)S(s)x &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x = 0.\end{aligned}$$

Portanto $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ é constante em $[0,t]$, e em particular, seus valores em $s=0$ e $s=t$ são os mesmos, isto é $T(t)x = S(t)x$. Isto vale para todo $x \in D(A)$ e como $D(A)$ é denso em X e $S(t), T(t) \in \mathcal{L}(X)$, segue que $T(t)x = S(t)x$ para todo $x \in X$.

1.2.3 Exemplos de semigrupos e geradores infinitesimais

Exemplo 1.15 (Translação de Geradores)**.** Sejam $T \subset \mathcal{L}(X)$ um C^0-semigrupo em um espaço de Banach X, A seu gerador infinitesimal e $\beta \in \mathbb{R}$. Então a família $S = \{S(t) \colon t \geqslant 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ dada por

$$S(t) = e^{\beta t} T(t) \text{ para cada } t \geqslant 0,$$

define um C^0-semigrupo em X e $A + \beta I$ é o seu gerador infinitesimal.

A demonstração destes fatos é deixada a cargo do leitor.

Exemplo 1.16 (Semigrupo das translações)**.** Considere $C_u(\mathbb{R})$ o espaço das funções uniformemente contínuas e limitadas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Em $C_u(\mathbb{R})$ defina, para cada $t \geqslant 0$ a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} T(t) \colon C_u(\mathbb{R}) &\to C_u(\mathbb{R}) \\ u &\mapsto T(t)u = u(t + \cdot) \end{aligned}$$

Considere em $C_u(\mathbb{R})$ a norma uniforme, dada por

$$\|u\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |u(t)|.$$

É simples verificar que com esta norma, o espaço $C_u(\mathbb{R})$ é um espaço de Banach, e que para cada $t \geqslant 0$, a aplicação $T(t)$ é um operador linear limitado de $C_u(\mathbb{R})$, e é unitário (isto é, $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(C_u(\mathbb{R}))} = 1)$.

Verifiquemos agora que $T = \{T(t) \colon t \geqslant 0\}$ é um C^0-semigrupo em $C_u(\mathbb{R})$.

(i) $T(0)u = u(0 + \cdot) = u$, logo $T(0) = I$ em $C_u(\mathbb{R})$.

(ii) $T(t)T(s)u = T(t)u(s + \cdot) = u(t + s + \cdot) = T(t+s)u$, para todo $t, s \geqslant 0$ e $u \in C_u(\mathbb{R})$.

(iii) Sejam $u \in C_u(\mathbb{R})$ e $\varepsilon > 0$. Da continuidade uniforme de u, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < t < \delta$, então $\sup_{s \in \mathbb{R}} |u(t+s) - u(s)| < \varepsilon$; isto é, $\|T(t)u - u\| < \varepsilon$ para $0 < t < \delta$ e portanto, para cada $u \in C_u(\mathbb{R})$, temos

$$\|T(t)u - u\| \xrightarrow{t \to 0^+} 0.$$

Para completar a análise deste semigrupo, encontremos seu gerador infinitesimal; e para isto, o denotemos por $A\colon D(A) \subset C_u(\mathbb{R}) \to C_u(\mathbb{R})$. Se $u \in D(A)$ então $Au = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{T(h)u-u}{h}$, e tal limite existe (na norma uniforme). Mas

$$(Au)(s) = \lim_{h\to 0^+} \frac{u(h+s) - u(s)}{h} = \frac{d^+u}{dt}(s),$$

onde o limite existe na norma uniforme, portanto $\frac{d^+u}{dt}$ existe e é uniformemente contínua. Do Lema A.3, $\frac{du}{dt}$ existe e é uniformemente contínua.

Reciprocamente, se $u \in C_u(\mathbb{R})$ e $\frac{du}{dt}$ existe e é uniformemente contínua, do Teorema do Valor Médio, para cada $t \geqslant 0$ fixado, dado $h > 0$ existe $\xi_{t,h} \in (t, t+h)$ tal que

$$\frac{T(h)u(t) - u(t)}{h} - \frac{du}{dt}(t) = \frac{du}{dt}(\xi_{t,h}) - \frac{du}{dt}(t),$$

e como $\xi_{t,h} \xrightarrow{h\to 0} t$, a continuidade uniforme de $\frac{du}{dt}$ garante que $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{T(h)u-u}{h}$ existe uniformemente. Logo $u \in D(A)$ e

$$Au = \frac{du}{dt}.$$

Portanto $D(A) = \{u \in C_u(\mathbb{R})\colon \frac{du}{dt}$ existe e é uniformemente contínua$\}$ e para $u \in D(A)$ temos $Au = \frac{du}{dt}$.

Capítulo

2

Geração de Semigrupos

Neste capítulo veremos condições necessárias e suficientes para que operadores lineares $A\colon D(A) \subset X \to X$, num espaço de Banach X, sejam geradores infinitesimais de C^0-semigrupos.

2.1 Teorema de Hille-Yosida

Começaremos com o Teorema de Hille-Yosida, que caracteriza completamente os geradores infinitesimais de C^0-semigrupos.

Teorema 2.1 (Teorema de Hille-Yosida). *Se $A\colon D(A) \subset X \to X$ é um operador linear, são equivalentes:*

(i) *A é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo $T \subset \mathcal{L}(X)$ com $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant e^{\omega t}$ para todo $t \geqslant 0$;*

(ii) *A é um operador linear fechado e densamente definido, com $\rho(A) \supset (\omega, \infty)$ e para todo $\lambda > \omega$ vale $\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant (\lambda - \omega)^{-1}$.*

Demonstração

Que **(i)** implica **(ii)** segue do item **(3)** do Teorema 1.9. Em particular, temos

$$\|(\lambda - A)^{-1}x\|_X \leqslant \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|T(t)x\|_X dt \leqslant \frac{1}{\lambda - \omega}\|x\|_X \quad \text{para } \lambda > \omega.$$

Provemos que **(ii)** implica **(i)**. Notemos que se $T_1(t) = e^{-\omega t}T(t)$, para $t \geqslant 0$, então $T_1 \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo com $\|T_1(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 1$ (chamados de **semigrupos de contrações**), e seu gerador infinitesimal é $A - \omega$, se A for o gerador infinitesimal de T. Assim é suficiente tratar o caso $\omega = 0$. Suponha que **(ii)** vale com $\omega = 0$. Para $\lambda > 0$ temos $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 1$ e $\lambda(\lambda - A)^{-1} = I + A(\lambda - A)^{-1}$. Assim para $x \in D(A)$ obtemos

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}x - x\|_X = \|(\lambda - A)^{-1}Ax\|_X \leqslant \lambda^{-1}\|Ax\|_X \to 0,$$

quando $\lambda \to \infty$. Como A é densamente definido e $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 1$ para todo $\lambda > 0$, obtemos $\lambda(\lambda - A)^{-1}x \to x$ quando $\lambda \to \infty$, para cada $x \in X$.

Para cada $\lambda > 0$, defina $A_\lambda = \lambda A(\lambda - A)^{-1}$. Como $A_\lambda = \lambda^2(\lambda - A)^{-1} - \lambda I$ temos $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$ e

$$\|A_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} = \|\lambda^2(\lambda - A)^{-1} - \lambda I\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 2\lambda,$$

e para $x \in D(A)$ obtemos $A_\lambda x \to Ax$ quando $\lambda \to \infty$. O operador A_λ é chamado de **aproximação de Yosida** de A. Obteremos $T(t)$ como o limite de e^{tA_λ} quando $\lambda \to \infty$. Primeiro note que

$$\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)} = \|e^{-\lambda t}e^{t\lambda^2(\lambda-A)^{-1}}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant e^{-\lambda t}e^{t\lambda^2\|(\lambda-A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}} \leqslant 1$$

e assim para $\lambda, \mu > 0$, $t > 0$ e $x \in X$, como $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$, obtemos

$$\begin{aligned}\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\|_X &= \left\|\int_0^1 \frac{d}{ds}(e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x)ds\right\|_X \\ &\leqslant \int_0^1 t\left\|e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}(A_\lambda x - A_\mu x)\right\|_X ds \leqslant t\|A_\lambda x - A_\mu x\|_X.\end{aligned}$$

Portanto se $x \in D(A)$ o limite $T(t)x = \lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x$ existe uniformemente para $0 \leqslant t \leqslant t_0$, qualquer que seja $t_0 > 0$. Assim, para $x \in D(A)$, a aplicação $[0,\infty) \ni t \to T(t)x \in X$ é contínua. Além disso $\|T(t)x\|_X \leqslant \|x\|_X$ e $\lim\limits_{t\to 0^+}\|T(t)x - x\|_X = 0$.

Estendemos continuamente $T(t)$ a X por $T(t)x = \lim\limits_{n\to\infty} T(t)x_n$, onde $x_n \in D(A)$ é tal que $x_n \to x$. Assim $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ e $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 1$ para cada $t \geqslant 0$. Agora se $x \in X$, dado $\varepsilon > 0$ existem $x_1 \in D(A)$ e $\delta > 0$ tais que, $\|x_1 - x\|_X < \varepsilon/3$ e

$\|T(t)x_1 - x_1\|_X < \varepsilon/3$, $t \in [0, \delta]$. Assim, para todo $t \in [0, \delta]$, temos

$$\|T(t)x - x\|_X \leqslant \|T(t)(x - x_1)\|_X + \|T(t)x_1 - x_1\|_X + \|x_1 - x\|_X < \varepsilon,$$

o que mostra que $\lim\limits_{t \to 0^+} \|T(t)x - x\|_X = 0$ para cada $x \in X$.

Se $x \in D(A^2)$, então $\lim\limits_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x$ e $\lim\limits_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda}Ax = T(t)Ax$. Como $A_\lambda Ay = AA_\lambda y$ para $y \in D(A)$ obtemos $e^{tA_\lambda}x \to T(t)x$ e $Ae^{tA_\lambda}x = e^{tA_\lambda}Ax = T(t)Ax$, e já que A é fechado, segue que $T(t)x \in D(A)$ e $AT(t)x = T(t)Ax$. Segue do item (3) do Exercício 3 e do fato que A é fechado que se $x \in D(A)$ então $T(t)x \in D(A)$ e $AT(t)x = T(t)Ax$ para cada $t \geqslant 0$. Disto, para $x \in D(A)$ e $t, s \geqslant 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\|T(t)T(s)x - e^{(t+s)A_\lambda}x\|_X \leqslant \|T(t)T(s)x - &e^{tA_\lambda}T(s)x\|_X \\ &+ \|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)}\|T(s)x - e^{sA_\lambda}x\|_X \to 0,\end{aligned}$$

quando $\lambda \to \infty$, e segue facilmente que $T(t)T(s)x = T(t+s)x$. Da densidade de $D(A)$ em X temos $T(t)T(s)x = T(t+s)x$ para todo $x \in X$ e $t, s \geqslant 0$. Portanto $T \subset \mathcal{L}(X)$ é um C^0-semigrupo, e nos resta provar que A é o seu gerador. Se $x \in D(A^2)$ então

$$T(t)x - x = \lim_{\lambda \to \infty}(e^{tA_\lambda}x - x) = \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^t e^{sA_\lambda}A_\lambda x ds = \int_0^t T(s)Axds,$$

e tomando limites, a igualdade acima também vale para $x \in D(A)$ (isto é feito usando a parte (3) do Exercício 3). Assim se $x \in D(A)$ temos

$$\frac{T(h)x - x}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h T(s)Axds \to Ax \quad \text{quando } h \to 0^+.$$

Portanto o gerador B de T deve ser uma extensão de A (isto é $D(B) \supset D(A)$ e $Bx = Ax$ quando $x \in D(A)$). Mas, por hipótese, $1 \in \rho(A)$ e, do fato que B é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo de contrações, $1 \in \rho(B)$. Logo

$$X = (I - A)D(A) = (I - B)D(B),$$

então $X = (I - B)D(B) = (I - B)D(A)$, o que mostra que $D(A) = \operatorname{Im}((I - B)^{-1}) = D(B)$. Portanto $A = B$ e a prova está completa.

Ambas as condições **(i)** e **(ii)** dependem da escolha da norma em X. Daremos uma formulação independente da norma, mas na prática devemos usualmente procurar normas especiais para a qual o Teorema 2.1 se aplica.

Lema 2.2. *Suponha que A é um operador linear fechado cujo conjunto resolvente contém $(0,\infty)$ e que satisfaz $\|(\lambda - A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M\lambda^{-n}$ para todo $n \geqslant 1$ e $\lambda > 0$. Então existe uma norma $|\cdot|_X$ em X tal que para todo $x \in X$ e $\lambda > 0$ temos*

$$\|x\|_X \leqslant |x|_X \leqslant M\|x\|_X \quad e \quad |(\lambda - A)^{-1}x|_X \leqslant \lambda^{-1}|x|_X.$$

Demonstração

Se $\mu > 0$ e $|\mu - \lambda| < \mu$ então a série

$$S(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}(\mu - \lambda)^k(\mu - A)^{-k-1},$$

converge em $\mathcal{L}(X)$ pois

$$\frac{|\mu-\lambda|}{\mu} < 1 \quad \text{e} \quad \|(\mu - \lambda)^k(\mu - A)^{-k-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{\mu}\Big(\frac{|\mu-\lambda|}{\mu}\Big)^k.$$

Com isso, fica como exercício ao leitor verificar que $\lambda \in \rho(A)$ e que $(\lambda - A)^{-1} = S(\lambda)$. Isto vale, em particular, para $0 < \lambda < \mu$ e como esta é uma série de potências, temos

$$(-1)^p(\lambda - A)^{-p-1} = \frac{1}{p!}\frac{d^p}{d\lambda^p}(\lambda - A)^{-1} = \sum_{k=p}^{\infty}(-1)^p\,\frac{k!(\mu-\lambda)^{k-p}}{p!(k-p)!}(\mu - A)^{-k-1},$$

e portanto

$$(\lambda - A)^{-p-1} = \sum_{k=p}^{\infty}\binom{k}{p}(\mu-\lambda)^{k-p}(\mu - A)^{-k-1}. \tag{2.1}$$

Além disso, para $0 < \lambda < \mu$ obtemos

$$\|\lambda^{p+1}(\lambda - A)^{-p-1}x\|_X \leqslant \sum_{k=p}^{\infty}\binom{k}{p}\left(\frac{\mu-\lambda}{\mu}\right)^{k-p}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{p+1}\|\mu^{k+1}(\mu - A)^{-k-1}x\|_X.$$

Defina $\|x\|_\mu = \sup\limits_{n\geqslant 0}\|\mu^n(\mu - A)^{-n}x\|_X$ para $\mu > 0$. Assim $\|x\|_X \leqslant \|x\|_\mu \leqslant M\|x\|_X$

e para $0 < \lambda < \mu$, $\|x\|_\lambda \leqslant \|x\|_\mu$ pois, para todo $p \in \mathbb{N}$, temos

$$\|\lambda^{p+1}(\lambda - A)^{-p-1}x\|_X \leqslant \sum_{k=p}^{\infty} \binom{k}{p} \left(\frac{\mu - \lambda}{\mu}\right)^{k-p} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{p+1} \|x\|_\mu = \|x\|_\mu,$$

onde, na última igualdade, utilizamos (2.1) com $A = 0$. Como $\lambda \mapsto \|x\|_\lambda$ é crescente e limitada superiormente, seja

$$|x|_X = \lim_{\lambda \to \infty} \|x\|_\lambda = \sup_{\lambda > 0} \|x\|_\lambda,$$

que é uma norma em X (verifique). Então $\|x\|_X \leqslant |x|_X \leqslant M\|x\|_X$ e para $0 < \lambda < \mu$ temos

$$\begin{aligned} \|\mu^p(\mu - A)^{-p}\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|_X &= \|\lambda(\lambda - A)^{-1}\mu^p(\mu - A)^{-p}x\|_X \\ &\leqslant \|\mu^p(\mu - A)^{-p}x\|_\lambda \\ &\leqslant \|\mu^p(\mu - A)^{-p}x\|_\mu \leqslant \|x\|_\mu \leqslant |x|_X, \end{aligned}$$

então $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu \leqslant |x|_X$ e $|\lambda(\lambda - A)^{-1}x|_X \leqslant |x|_X$.

Teorema 2.3 (Forma Geral do Teorema de Hille-Yosida). *Seja $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador linear. São equivalentes:*

(i) *A é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo $T \subset \mathcal{L}(X)$ tal que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{\omega t}$ para todo $t \geqslant 0$;*

(ii) *A é um operador fechado, densamente definido, $\rho(A) \supset (\omega, \infty)$ e $\|(\lambda - A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M(\lambda - \omega)^{-n}$ para todo $\lambda > \omega$ e $n \geqslant 1$.*

Demonstração

Considerando $e^{-\omega t}T(t)$ e $A - \omega$, podemos supor sem perda de generalidade que $\omega = 0$. Mostremos que **(i)** implica **(ii)**. Do item **(4)** do Teorema 1.9, qualquer $\lambda > 0$ está no conjunto resolvente de A e

$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt.$$

Derivando $n-1$ vezes na variável λ ($n \geqslant 1$), temos

$$(\lambda - A)^{-n}x = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^{n-1}T(t)x\,dt,$$

logo

$$\|(\lambda - A)^{-n}x\|_X \leqslant \frac{M\|x\|_X}{(n-1)!}\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^{n-1}dt = \lambda^{-n}M\|x\|_X,$$

para $n \geqslant 1$.

Agora suponha que vale **(ii)** (com $\omega = 0$). Pelo Lema 2.2, podemos escolher uma norma equivalente $|\cdot|_X$ em X, tal que $\|x\|_X \leqslant |x|_X \leqslant M\|x\|_X$ e $|(\lambda - A)^{-1}x|_X \leqslant \lambda^{-1}|x|_X$ para $\lambda > 0$. Portanto o Teorema 2.1 (Teorema de Hille-Yosida) se aplica e, com a norma $|\cdot|_X$, A gera um C^0-semigrupo $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$ com $|T(t)x|_X \leqslant |x|_X$. Assim conluímos que

$$\|T(t)x\|_X \leqslant |T(t)x|_X \leqslant |x|_X \leqslant M\|x\|_X.$$

Para a definição e resultados sobre o dual A^* de um operador A, veja [3, Seção 2.3].

Teorema 2.4. *Sejam X um espaço de Banach reflexivo e $T \subset \mathcal{L}(X)$ um C^0-semigrupo com gerador infinitesimal A. Então, definindo $T^* \subset \mathcal{L}(X^*)$ por $T^*(t) = T(t)^*$ para $t \geqslant 0$, então T^* é um C^0-semigrupo e A^* seu gerador infinitesimal.*

Demonstração

Como, por hipótese, X é um espaço de Banach reflexivo e A é fechado e densamente definido, A^* é também fechado e densamente definido. Além disso, se $\lambda \in \rho(A)$ então $\lambda \in \rho(A^*)$ e $((\lambda - A)^{-1})^* = (\lambda - A^*)^{-1}$. Como A é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo, existem constantes $\omega \in \mathbb{R}$ e $M \geqslant 1$ tais que $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ e

$$\|(\lambda - A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \text{ para todo } \lambda > \omega \text{ e } n \geqslant 1.$$

Assim, $(\omega, \infty) \subset \rho(A^*)$ e

$$\|(\lambda - A^*)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X^*)} = \|(\lambda - A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \text{ para todo } \lambda > \omega \text{ e } n \geqslant 1,$$

e portanto A^* é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo $T^* \subset \mathcal{L}(X^*)$. Mas, para cada $x^* \in D((A^*)^2)$, temos

$$T^*(t)x^* = \lim_{\lambda\to\infty} e^{A_\lambda^* t}x^* = \lim_{\lambda\to\infty} \left(e^{A_\lambda t}\right)^* x^* = T(t)^* x^*,$$

e como $D((A^*)^2)$ é denso em X^* e $T^*(t), T(t)^* \in \mathcal{L}(X^*)$, a igualdade segue para todo $x^* \in X^*$ e $t \geqslant 0$.

Para a definição e resultados sobre operadores autoadjuntos em espaços de Hilbert, veja [3, Seção 5.2].

Corolário 2.5. *Um C^0-semigrupo T, com gerador infinitesimal A, num espaço de Hilbert H é* **autoadjunto***, isto é $T(t)^* = T(t)$ para todo $t \geqslant 0$ se, e somente se, A é um operador autoadjunto.*

2.2 Teorema de Lumer-Phillips

Para esta seção, é recomendado o estudo de [3, Seção 2.5] sobre operadores dissipativos e suas propriedades.

Teorema 2.6 (Lumer-Phillips)**.** *Seja $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador linear em um espaço de Banach X.*

(i) *Se A é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações, então A é fechado, densamente definido, dissipativo e $\operatorname{Im}(\lambda - A) = X$ para todo $\lambda > 0$. De fato, $\operatorname{Re}\langle Ax, x^*\rangle \leqslant 0$ para todo $x^* \in J(x)$.*

(ii) *Se A é dissipativo, $\overline{D(A)} = X$ e $\operatorname{Im}(\lambda_0 - A) = X$ para algum $\lambda_0 > 0$, então A é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações.*

Demonstração

(i) Do Teorema de Hille-Yosida - Teorema 2.1, se A gera um C^0-semigrupo T com $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 1$ para todo $t \geqslant 0$, então $\operatorname{Im}(\lambda - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ e para qualquer $x \in X$, $x^* \in J(x)$, $t > 0$, temos

$$\operatorname{Re}\langle T(t)x, x^*\rangle \leqslant |\langle T(t)x, x^*\rangle| \leqslant \|x^*\|_{X^*}\|T(t)x\|_X \leqslant \|x\|_X^2.$$

Assim

$$\operatorname{Re}\left\langle \frac{T(t)x - x}{t}, x^* \right\rangle = \frac{1}{t}\left(\operatorname{Re}\langle T(t)x, x^*\rangle - \|x\|_X^2\right) \leqslant 0,$$

e se $x \in D(A)$, fazendo $t \to 0^+$, obtemos $\operatorname{Re}\langle Ax, x^*\rangle \leqslant 0$.

(ii) De [3, Teorema 2.5.4], todas as hipóteses do Teorema de Hille-Yosida estão verificadas, e a prova está completa.

O seguinte resultado é uma consequência imediata de [3, Corolário 2.5.5] e do Teorema de Lumer-Phillips.

Corolário 2.7. *Seja A um operador linear fechado e densamente definido. Se ambos A e A^* são dissipativos, então A é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações em X.*

Para o seguinte exemplo, é recomendado o estudo de [3, Seção 2.6] sobre imagem numérica, além de [3, Exemplo 5.2.6].

Exemplo 2.8. Sejam H um espaço de Hilbert e $A\colon D(A) \subset H \to H$ um operador autoadjunto (consequentemente, A é fechado e densamente definido). Suponha que A seja limitado superiormente, isto é, que exista uma constante $a \in \mathbb{R}$ tal que $\langle Au, u\rangle \leqslant a\langle u, u\rangle$ para todo $u \in D(A)$. Então A é o gerador de um C^0-semigrupo $T \subset \mathcal{L}(H)$ satisfazendo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant e^{at}$. Além disso $\mathbb{C} \setminus (-\infty, a] \subset \rho(A)$, e para cada $0 < \phi < \pi$ existe uma constante $M \geqslant 1$ tal que

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \frac{M}{|\lambda - a|},$$

para todo $\lambda \in \Sigma_{a,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\arg(\lambda - a)| \leqslant \phi\} \setminus \{a\}$.

Solução

Note que $A - a = A^* - a$ são dissipativos e portanto, do Corolário 2.7, $A - aI$ gera um semigrupo fortemente contínuo de contrações. De [3, Exemplo 5.2.6], segue que

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{1}{d(\lambda, (-\infty, a])} \leqslant \frac{1}{\sin\phi}\frac{1}{|\lambda - a|} \text{ para todo } \lambda \in \Sigma_{a,\phi},$$

e o resultado segue.

Exemplo 2.9 (Operadores Diferenciais de Primeira Ordem). Seja $a\colon [0, \infty) \to (0, \infty)$ uma função contínua satisfazendo

$$\int_0^x \frac{1}{a(s)} ds \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

e $X = \{u \in C([0,\infty),\mathbb{K})\colon u(0) = 0 \text{ e } u(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0\}$ com a norma $\|u\|_X = \sup_{x\in[0,\infty)} |u(x)|$ e defina o operador $A\colon D(A) \subset X \to X$ por

$$D(A) = \{u \in X : u \text{ é diferenciável e } au' \in X\}$$

e $Au = -au'$ para $u \in D(A)$. Note que $D(A)$ é denso em X.

Vamos mostrar que A gera um C^0-semigrupo de contrações em X, utilizando o Teorema de Lumer-Phillips.

Solução

Mostremos que A é dissipativo. Sejam $\lambda > 0$, $u \in D(A)$ e $f = (\lambda - A)u$. Vamos lidar apenas com o caso em que u e f tomam valores em $\mathbb{R}$, e o caso complexo segue do caso real tomando partes real e imaginária.

Seja $\xi \in (0,\infty)$ tal que $u(\xi) = \pm\|u\|_X$. Assim $u'(\xi) = 0$ e

$$\lambda\|u\|_X = \lambda|u(\xi)| = |\lambda u(\xi) + a(\xi)u'(\xi)| = |f(\xi)| \leqslant \|f\|_X = \|(\lambda - A)u\|_X,$$

o que mostra que A é dissipativo. Mostremos que $\mathrm{Im}(I - A) = X$, ou seja, que dado $f \in X$ existe $u \in X$ diferenciável tal que

$$\begin{cases} u(x) + a(x)u'(x) = f(x), & x \in (0,\infty), \\ u(0) = 0, \quad u(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

Multiplicando-se pelo fator integrante $e^{\int_0^x \frac{1}{a(s)}ds}$ a equação torna-se

$$\frac{d}{dx}\left(u(x)e^{\int_0^x \frac{1}{a(s)}ds}\right) = \frac{f(x)}{a(x)}e^{\int_0^x \frac{1}{a(s)}ds} \qquad \text{para todo } x \in (0,\infty).$$

Integrando entre 0 e x e usando que $u(0) = 0$ resulta que

$$u(x) = \int_0^x \frac{f(\xi)}{a(\xi)}e^{-\int_\xi^x \frac{1}{a(s)}ds}d\xi.$$

Se pudermos mostrar que esta função satisfaz $u(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$, teremos mostrado que $\mathrm{Im}(I - A) = X$. De fato, já sabemos que a função u definida acima é continuamente diferenciável e como $au' = f - u$ obtemos $au' \in X$ e portanto $u \in D(A)$.

Dado $\varepsilon > 0$, seja $x_\varepsilon > 0$ tal que $|f(\xi)| < \varepsilon$, para todo $\xi > x_\varepsilon$. Se $x > x_\varepsilon$,

$$u(x) = \int_0^{x_\varepsilon} \frac{f(\xi)}{a(\xi)} e^{-\int_\xi^{x_\varepsilon} \frac{1}{a(s)} ds} d\xi \, e^{-\int_{x_\varepsilon}^{x} \frac{1}{a(s)} ds} + \int_{x_\varepsilon}^{x} \frac{f(\xi)}{a(\xi)} e^{-\int_\xi^{x} \frac{1}{a(s)} ds} d\xi.$$

Agora, se

$$B_\varepsilon = \int_0^{x_\varepsilon} \frac{|f(\xi)|}{a(\xi)} e^{-\int_\xi^{x_\varepsilon} \frac{1}{a(s)} ds} d\xi,$$

obtemos

$$|u(x)| \leqslant B_\varepsilon \, e^{-\int_{x_\varepsilon}^{x} \frac{1}{a(s)} ds} + \varepsilon \int_{x_\varepsilon}^{x} \frac{1}{a(\xi)} e^{-\int_\xi^{x} \frac{1}{a(s)} ds} d\xi$$

e, como

$$\int_{x_\varepsilon}^{x} \frac{1}{a(\xi)} e^{-\int_\xi^{x} \frac{1}{a(s)} ds} d\xi = \int_0^{\int_{x_\varepsilon}^{x} \frac{1}{a(\xi)} d\xi} e^{-\tau} d\tau \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

temos $\limsup_{x\to\infty} |u(x)| \leqslant \varepsilon$. Desde que $\varepsilon > 0$ é arbitrário obtemos $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$.

Seja $T \subset \mathcal{L}(X)$ o C^0-semigrupo de contrações gerado por A. Se $\varphi \in D(A)$ temos $u(t,x) = (T(t)\varphi)(x)$ para $t, x \geqslant 0$, satisfaz o seguinte problema de valor inicial e fronteira

$$\begin{cases} u_t(t,x) + a(x) u_x(t,x) = 0, & t, x > 0 \\ u(t,0) = 0, \quad u(t,x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0, \\ u(0,x) = \varphi(x). \end{cases}$$

Exemplo 2.10 (O Operador da Onda). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado. Defina $C_\beta \colon D(C_\beta) \subset H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ por $D(C_\beta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ e

$$C_\beta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta & -\beta I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u - \beta v \end{pmatrix}.$$

Mostraremos que, com um produto interno conveniente, C_β é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações.

Solução

Se consideramos em $H_0^1(\Omega)$ o produto interno $\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \bar{v}$, e em $H_0^1(\Omega) \times$

$L^2(\Omega)$ o produto interno

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} = \langle u_1, u_2\rangle_{H_0^1(\Omega)} + \langle v_1, v_2\rangle_{L^2(\Omega)},$$

então para todo $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(C_\beta)$ temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left\langle C_\beta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} &= \operatorname{Re}\left\langle \begin{pmatrix} v \\ \Delta u - \beta v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \\
&= \operatorname{Re}[\langle v, u\rangle_{H_0^1(\Omega)} + \langle \Delta u - \beta v, v\rangle_{L^2(\Omega)}] \\
&= \operatorname{Re}[\langle v, u\rangle_{H_0^1(\Omega)} - \langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} - \beta\langle v, v\rangle_{L^2(\Omega)}] \\
&= \operatorname{Re}[2i\operatorname{Im}\langle v, u\rangle_{H_0^1(\Omega)} - \beta\|v\|^2_{L^2(\Omega)}] = -\beta\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant 0,
\end{aligned}$$

o que mostra que C_β é dissipativo. Se $A\colon D(A) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é dado por, $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $Au = \Delta u$ para $u \in D(A)$, temos $0 \in \rho(C_\beta)$, pois $0 \in \rho(A)$ e

$$C_\beta^{-1} = \begin{bmatrix} \beta A^{-1} & A^{-1} \\ I & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, como o resolvente é aberto, existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda \in \rho(C_\beta)$, e portanto $\operatorname{Im}(\lambda - C_\beta) = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Segue do Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 2.6) que C_β é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações.

Se $T_\beta = \{T_\beta(t)\colon t \geqslant 0\}$ é o semigrupo gerado por C_β e $\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \in D(C_\beta)$, então

$$\begin{bmatrix} u(t,x) \\ v(t,x) \end{bmatrix} = \left(T_\beta(t) \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right)(x), \quad t \geqslant 0 \text{ e } x \in \Omega,$$

satisfaz $v(t,x) = u_t(t,x)$ para $t \geqslant 0$ e $x \in \Omega$, e

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) + \beta u_t(t,x) = \Delta u(t,x), & t > 0,\ x \in \Omega \\ u(t,x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ e } u_t(0,x) = v_0(x), \quad x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

Para $\beta > 0$ a equação (2.2) é conhecida como equação da onda amortecida (simplesmente equação da onda se $\beta = 0$). Mais adiante veremos que a equação da onda (com $\beta = 0$) define um C^0-grupo de operadores unitários.

Exercício 1. Mostre que o C^0-semigrupo T_β, gerado pelo operador da onda C_β, decai exponencialmente quando $t \to \infty$ se $\beta > 0$.
Sugestão: Em $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, para $\delta > 0$, defina

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle_* = \langle u_1, u_2 \rangle_{H_0^1(\Omega)} + \langle v_1, v_2 \rangle_{L^2(\Omega)} + \delta \langle u_1, v_2 \rangle_{L^2(\Omega)} + \delta \langle v_1, u_2 \rangle_{L^2(\Omega)},$$

e mostre que para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ define um produto interno em $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e a norma proveniente deste produto interno é equivalente à norma usual de $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Depois, mostre que existe $\alpha > 0$ tal que $C_\beta + \alpha I$ é dissipativo neste produto interno, isto é,

$$\operatorname{Re} \left\langle (C_\beta + \alpha I) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle_* \leqslant 0 \quad \text{para } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(C_\beta).$$

Lembrando que $0 \in \rho(C_\beta)$, mostre que para $\alpha > 0$ pequeno $C_\beta + \alpha I$ gera um C^0-semigrupo de contrações em $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ na norma do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$. Conclua então que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|T_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))} \leqslant C e^{-\alpha t} \quad \text{para todo } t \geqslant 0.$$

Exemplo 2.11 (O Operador de Stokes)**.** A seguir consideramos o operador de Stokes que surge no contexto das equações de Navier-Stokes. Seja Ω um subconjunto limitado e com fronteira suave em $\mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$ e considere as funções $u \colon \Omega \to \mathbb{R}^N$ que são continuamente diferenciáveis, $\operatorname{div} u = 0$, e cuja componente normal à fronteira de Ω, denotada por u_n, se anula. Então, para cada função continuamente diferenciável $\varphi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ temos

$$\int_\Omega u \cdot \nabla \varphi = \int_{\partial\Omega} \varphi u_n - \int_\Omega \operatorname{div} u \, \varphi = 0.$$

Por outro lado, se um campo vetorial suave u é ortogonal a todos os gradientes, devemos ter $\operatorname{div} u = 0$ em Ω e $u_n = 0$ em $\partial\Omega$. De fato, se $\varphi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável, então

$$\int_\Omega \operatorname{div} u \, \varphi = \int_{\partial\Omega} \varphi \, u_n - \int_\Omega u \cdot \nabla \varphi.$$

Tomando φ com suporte compacto, segue que $\operatorname{div} u = 0$ em Ω e consequentemente, para toda $\varphi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciável temos

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \, u_n = \int_\Omega u \cdot \nabla \varphi = 0,$$

o que implica $u_n = 0$ em $\partial\Omega$.

Seja $H = L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$, H_π o fecho em $L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ de

$$\{\nabla\varphi \colon \varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})\},$$

e H_σ o fecho de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ de

$$\{u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \colon \operatorname{div} u = 0 \text{ em } \Omega \text{ e } u_n = 0 \text{ em } \partial\Omega\}.$$

Claramente H_π e H_σ são subespaços fechados e ortogonais de H e, além disso, $H = H_\pi \oplus H_\sigma$. Para provar isto, é suficiente provar que toda função suave $u \colon \Omega \to \mathbb{R}^N$ que se anula próximo a $\partial\Omega$, pode ser escrita na forma $u = v + \nabla\varphi$ com $v \in H_\sigma$ e $\nabla\varphi \in H_\pi$. Seja φ uma solução de

$$\Delta\varphi = \operatorname{div} u \ \text{ em } \quad \Omega, \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = u_n = 0 \ \text{ em } \quad \partial\Omega,$$

que existe pois $\operatorname{div} u$ é ortogonal às funções constantes. Então, φ é suave e $v = u - \nabla\varphi$ é suave, $\operatorname{div} v = 0$ em Ω e $v_n = 0$ em $\partial\Omega$.

Seja P a *projeção de Leray*, isto é, a projeção ortogonal em H sobre H_σ. O **operador de Stokes** é o operador $A \colon D(A) \subset H_\sigma \to H_\sigma$ definido por

$$D(A) = \{u \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \colon u = 0 \text{ e } u_n = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$$

e

$$Au = P\Delta u \qquad \text{para todo } u \in D(A).$$

Como P é autoadjunto (pois é ortogonal), para $u, v \in D(A)$ temos $Pu = u$, $Pv = v$, e

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega P\Delta u \cdot v = \int_\Omega \Delta u \cdot v = \int_\Omega u \cdot \Delta v = \int_\Omega u \cdot P\Delta v = \langle u, Av\rangle$$

e, para algum $\lambda > 0$,

$$\langle Au, u\rangle = -\int_\Omega |\nabla u|^2 \leqslant -\lambda \int_\Omega |u|^2.$$

Portanto, A é simétrico e limitado superiormente. Agora provamos que A é sobrejetor e, de [3, Teorema 5.2.3], teremos A autoadjunto.

Como $\operatorname{Im}(A)$ é fechada e A é injetor, é suficiente mostrar que $\operatorname{Im}(A)$ é densa, isto é, dado

$f \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, existe $u \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e $p \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Este problema de Stokes é um sistema fortemente elípico, no sentido de [1] e portanto resolúvel. Isto mostra que A é autoadjunto e $A + \lambda$ é dissipativo, e portanto A gera um C^0-semigrupo em H_σ.

Capítulo 3

Grupos de Operadores Lineares

Além de semigrupos de operadores lineares, algumas equações nos fornecem *grupos de operadores lineares*. Um exemplo simples é quando o gerador infinitesimal do semigrupo é um operador limitado A, e vimos que neste caso temos de fato um grupo de operadores.

Vamos estudar mais profundamente este conceito, e encontrar condições para que um operador linear não-limitado $A\colon D(A)\subset X\to X$ gere um grupo de operadores lineares.

Definição 3.1. Seja X um espaço de Banach. Diremos que $T=\{T(t)\colon t\in\mathbb{R}\}\subset\mathcal{L}(X)$ é um **grupo** de operadores lineares limitados se

(i) $T(0)=I$;

(ii) $T(t+s)=T(t)T(s)$, para todo $t,s\in\mathbb{R}$;

e, se além disso, vale

(iii) $\|T(t)x-x\|_X\xrightarrow{t\to 0}0$, para todo $x\in X$;

diremos que $T\subset\mathcal{L}(X)$ é um **grupo fortemente contínuo**, ou um **C^0-grupo**, de operadores lineares limitados.

É claro que, se $T\subset\mathcal{L}(X)$ é um grupo de operadores lineares limitados, então para cada $t\in\mathbb{R}$, $0\in\rho(T(t))$ e $T(-t)=T(t)^{-1}$.

Exercício 4. Seja $X=\{u\in C(\mathbb{R},\mathbb{K})\colon u$ é limitada e uniformemente contínua$\}$ com a norma $\|u\|_X=\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(x)|$. Defina $(T(t)u)(x)=u(t+x)$ para $t\geqslant 0$, $x\in\mathbb{R}$ e $u\in X$.

1. Mostre que $\{T(t)\colon t \geqslant 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo fortemente contínuo de contrações.

2. Mostre que podemos definir um grupo fortemente contínuo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(X)$ com $T(-t) = T(t)^{-1}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

3. Mostre que $\{T(t)\colon t \geqslant 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ não é um semigrupo uniformemente contínuo.

4. Calcule o gerador infinitesimal de $\{T(t)\colon t \geqslant 0\} \subset \mathcal{L}(X)$,

Para o caso de grupos de operadores lineares também podemos definir o seu *gerador infinitesimal*, da seguinte maneira:

Definição 3.2. O **gerador infinitesimal** de um grupo $T \subset \mathcal{L}(X)$ é definido por

$$D(A) = \left\{x \in X\colon \lim_{h\to 0} \frac{T(h)x - x}{h} \text{ existe}\right\},$$

$$Ax = \lim_{h\to 0} \frac{T(h)x - x}{h} \qquad \text{para todo } x \in D(A).$$

Proposição 3.3. *$A\colon D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C^0-grupo de operadores lineares limitados se, e somente se, A e $-A$ são geradores infinitesimais de C^0-semigrupos.*

Demonstração

Assuma que $A\colon D(A) \subset X \to X$ seja o gerador infinitesimal de um C^0-grupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$. A restrição de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ ao conjunto $\mathbb{R}_+$, isto é $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$, é claramente um C^0-semigrupo. O mesmo ocorre com a família $\{T_-(t)\colon t \geqslant 0\}$, dada por $T_-(t) = T(-t)$, para cada $t \geqslant 0$.

Afirmação 1. O gerador infinitesimal de $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$ é A.

De fato, denote por A_+ o gerador infinitesimal de $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$. Se $x \in D(A)$ então existe $\lim\limits_{h\to 0} \frac{T(h)x-x}{h}$ e assim

$$Ax = \lim_{h\to 0} \frac{T(h)x - x}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h},$$

portanto $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{T(h)x-x}{h}$ existe. Logo $x \in D(A_+)$ e

$$A_+x = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = Ax.$$

Agora, se $x \in D(A_+)$ então $A_+x = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{T(h)x-x}{h}$ existe. Mas

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T(-h)x-x}{-h} = \lim_{h\to 0^+} T_-(h)\frac{T(h)x-x}{h} = A_+x,$$

pois $\{T_-(t)\colon t \geqslant 0\}$ é um C^0-semigrupo. Deste modo, concluímos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{T(h)x-x}{h} = A_+x.$$

Portanto $x \in D(A)$ e $Ax = A_+x$, que conclui a prova desta afirmação. Analogamente se mostra que o gerador infinitesimal de $\{T_-(t)\colon t \geqslant 0\}$ é $-A$.

Reciprocamente, vamos assumir que A e $-A$ sejam geradores de C^0-semigrupos $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$ e $\{T_-(t)\colon t \geqslant 0\}$, respectivamente. Da demonstração do Teorema 2.1, para cada $t \geqslant 0$, temos

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{A_\lambda t}x \quad \text{e} \quad T_-(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{(-A)_\lambda t}x,$$

o que mostra que $T(t)$ comuta com $T_-(t)$ e definindo $S(t) = T(t)T_-(t)$, $\{S(t)\colon t \geqslant 0\}$ define um semigrupo.

Afirmação 2. $\{S(t)\colon t \geqslant 0\}$ é um C^0-semigrupo.

Como $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$ é um C^0-semigrupo, $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é limitado uniformemente para t em intervalos limitados de $\mathbb{R}_+$. Assim,

$$\begin{aligned}\|S(t)x-x\|_X &\leqslant \|T(t)T_-(t)x - T(t)x\|_X + \|T(t)x-x\|_X \\ &\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|T_-(t)x-x\|_X + \|T(t)x-x\|_X \to 0, \text{ quando } t\to 0^+,\end{aligned}$$

o que prova a nossa afirmação.

Além disso, segue que se $x \in D(A) = D(-A)$, temos

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{S(h)x-x}{h} = \lim_{h\to 0^+} T(h)\frac{T_-(h)x-x}{h} + \lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)x-x}{h} = -Ax + Ax = 0.$$

Isto implica que se B é o gerador infinitesimal de $\{S(t)\colon t \geqslant 0\}$, então $D(A) \subset D(B)$ e $Bx = 0$ para todo $x \in D(A)$. Como $D(A)$ é denso em X, $D(A)$ é denso em $D(B)$ e como B é fechado, segue que $D(B) = X$ e $Bx = 0$ para todo $x \in X$. Portanto $S(t) = I$ para todo $t \geqslant 0$ e desta maneira $T_-(t) = T(t)^{-1}$, para todo $t \geqslant 0$, o que nos permite definir $T(-t) = T_-(t)$ para cada $t > 0$.

Afirmação 3. $\{T(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ é um C^0-grupo.

Claramente $T(0) = I$, por definição. Agora, temos:

(a) se $t, s > 0$, $T(t+s) = T(t)T(s)$;

(b) se $t, s < 0$, $T(t+s) = T_-(-t-s) = T_-(-t)T_-(-s) = T(t)T(s)$;

(c) se $t > 0$, $s < 0$ e $t + s > 0$:

$$T(t+s) = T(t+s)T(-s)T_-(-s) = T(t)T_-(-s) = T(t)T(s);$$

(d) se $t > 0$, $s < 0$ e $t + s < 0$:

$$T(t+s) = T_-(-t-s) = T(t)T_-(t)T_-(-t-s) = T(t)T_-(-s) = T(t)T(s).$$

Assim, a propriedade (ii) da Definição 3.1 está satisfeita. Além disso

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\|_X = 0,$$

e

$$\lim_{t\to 0^-} \|T(t)x - x\|_X = \lim_{-t\to 0^+} \|T_-(-t)x - x\|_x = 0,$$

o que prova a afirmação.

A demonstração de que A é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ é deixada a cargo do leitor, e com todas estas considerações, o resultado está provado.

Proposição 3.4. *Seja $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$ um C^0-semigrupo. Se, para algum $t_0 > 0$, $T(t_0)^{-1}$ existe e $T(t_0)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, então $T(t)^{-1}$ existe e está em $\mathcal{L}(X)$ para todo $t \geqslant 0$.*

Demonstração

Como $T(t_0)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, segue que $T(t_0)$ é injetiva e sobrejetiva. Da injetividade de $T(t_0)$ segue a injetividade de $T(nt_0) = T(t_0)^n$. Dado $t \geqslant 0$ seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $nt_0 > t$. Assim se $T(t)x = 0$ temos $T(nt_0)x = T(nt_0 - t)T(t)x = 0$, o que implica que $x = 0$ e logo $T(t)$ é injetiva, para cada $t \geqslant 0$.

Da sobrejetividade de $T(t_0)$ e de $T(nt_0) = T(t_0)^n$, segue que $T(nt_0)$ é sobrejetiva.

Se $t \geqslant 0$, escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $nt_0 > t$ e temos $T(nt_0) = T(t)T(nt_0 - t)$, o que mostra que $\mathrm{Im}T(t) \supset \mathrm{Im}T(nt_0) = X$ e portanto $T(t)$ é sobrejetiva para todo $t \geqslant 0$. Portanto, do Teorema do Gráfico Fechado, segue que $T(t)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, para cada $t \geqslant 0$.

Proposição 3.5. *Seja $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$ um C^0-semigrupo com A seu gerador infinitesimal. Se, para algum $t_0 > 0$, $T(t_0)^{-1}$ existe e está em $\mathcal{L}(X)$ então A é o gerador infinitesimal de um C^0-grupo.*

Demonstração

Pela proposição anterior, $T(t)$ tem inversa em $\mathcal{L}(X)$ para todo $t \geqslant 0$. Definindo $S(t) = T(t)^{-1}$ para cada $t \geqslant 0$, não é difícil mostrar que $\{S(t)\colon t \geqslant 0\}$ define um C^0-semigrupo. Para $x \in D(A)$ temos

$$\frac{S(h)x - x}{h} + Ax = -S(h)\frac{T(h)x - x}{h} + Ax = -S(h)\left[\frac{T(h)x - x}{h} - T(h)Ax\right] \to 0,$$

quando $h \to 0^+$. Assim, se B é o gerador infinitesimal de $\{S(t)\colon t \geqslant 0\}$, temos $D(A) \subset D(B)$ e $Bx = -Ax$. Analogamente, mostramos que $D(B) \subset D(A)$ e $Ax = -Bx$ e portanto segue que $B = -A$, e assim $-A$ é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo, o que implica que A é o gerador de um C^0-grupo, pela Proposição 3.3.

Vemos na demonstração acima (prove como um exercício) que o grupo $\{R(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ gerado por A é dado por

$$R(t) = \begin{cases} T(t), & \text{para } t \geqslant 0, \\ T(-t)^{-1}, & \text{para } t < 0. \end{cases}$$

3.1 O Teorema de Hille-Yosida para grupos

Teorema 3.6. *O operador A é o gerador infinitesimal de um C^0-grupo se, e somente se, A é fechado, densamente definido e existem constantes reais M e ω tais que se λ é real e $|\lambda| > \omega$, então $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$\|(\lambda - A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{(|\lambda| - \omega)^n} \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Demonstração

Seja A o gerador infinitesimal de um C^0-grupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$. Da Proposição 3.3, sabemos que A e $-A$ são geradores infinitesimais de C^0-semigrupos. Consequentemente, A é fechado, densamente definido e existem constantes reais $M_1, M_2, \omega_1, \omega_2$ tais que se $\lambda > w_1$ então $\lambda \in \rho(A)$ e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M_1}{(|\lambda| - w_1)^n}$$

e se $\lambda > w_2$ então $\lambda \in \rho(-A)$ e

$$\|(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M_2}{(|\lambda| - w_2)^n}.$$

Sejam $\omega = \max\{\omega_1, \omega_2\}$, $M = \max\{M_1, M_2\}$ e $|\lambda| > \omega$. Então, se $\lambda > \omega$ então $\lambda \in \rho(A)$ e

$$\|(\lambda - A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \tag{3.2}$$

e se $-\lambda > \omega$ então $-\lambda \in \rho(-A)$ e portanto $\lambda \in \rho(A)$ e assim

$$\|(\lambda - A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} = \|(-\lambda + A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{(|\lambda| - \omega)^n},$$

o que mostra a limitação desejada.

Reciprocamente, assuma A fechado e densamente definido, com (3.1) satisfeita. Para $\lambda > \omega$ temos $|\lambda| \geqslant \lambda > \omega$ e assim $\lambda \in \rho(A)$ e

$$\|(\lambda - A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{(|\lambda| - \omega)^n} \leqslant \frac{M}{(\lambda - \omega)^n},$$

e portanto A é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo, pelo Teorema de Hille-Yosida. Agora, se $-\lambda > \omega$ então $|\lambda| = |-\lambda| \geqslant -\lambda > \omega$ e assim $-\lambda \in \rho(A)$, o que implica que $\lambda \in \rho(-A)$ e

$$\|(-\lambda + A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} = \|(\lambda - A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{(|\lambda| - \omega)^n} \leqslant \frac{M}{(-\lambda - \omega)^n},$$

e assim, $-A$ é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo, pelo Teorema de Hille-

Yosida.

3.2 Teorema de Stone

Nesta seção, consideraremos H um espaço de Hilbert, com norma $\|\cdot\|_H$, induzida pelo produto interno $(\cdot,\cdot)_H$.

Definição 3.7. Um grupo $\{T(t)\colon t\in\mathbb{R}\}$ de operadores lineares num espaço de Hilbert H é dito **unitário** se $T^*(t)=T(t)^{-1}$, para todo $t\geqslant 0$.

Se $\{T(t)\colon t\in\mathbb{R}\}$ é um grupo unitário, vemos que $\|T(t)v\|_H=\|v\|_H$, já que

$$\|T(t)v\|_H^2=(T(t)v,T(t)v)_H=(v,T^*(t)T(t)v)_H=(v,v)_H=\|v\|_H^2.$$

Teorema 3.8 (Teorema de Stone)**.** *Um operador linear A em um espaço de Hilbert H é o gerador infinitesimal de um C^0-grupo unitário se, e somente se, $A^*=-A$.*

Demonstração

Seja A o gerador infinitesimal de um C^0-grupo unitário $\{T(t)\colon t\in\mathbb{R}\}$. Da Proposição 3.3, A é o gerador de um C^0-semigrupo $\{T(t)\colon t\geqslant 0\}$ e $-A$ é o gerador do C^0-semigrupo $\{T_-(t)\colon t\geqslant 0\}$. Pelo Teorema 2.4, A^* é o gerador infinitesimal de $\{T(t)^*\colon t\geqslant 0\}$. Assim segue que

$$T(t)^*=T(t)^{-1}=T(-t)=T_-(t),$$

e assim

$$\frac{T(t)^*v-v}{t}=\frac{T_-(t)v-v}{t},$$

o que implica que $D(A^*)=D(A)$ e $A^*v=-Av$, para todo $v\in D(A)$. Portanto $A^*=-A$.

Reciprocamente, assuma que $A^*=-A$. Da existência de A^* segue que $D(A)$ é denso em X. Para todo $v\in D(A)$ temos

$$(Av,v)_H=(v,A^*v)_H=-(v,Av)_H=-\overline{(Av,v)_H},$$

logo $\mathrm{Re}(Av,v)=0$. Portanto A e $-A=A^*$ são dissipativos e do Corolário 2.7 segue que A e $-A$ geram C^0-semigrupos, e portanto A gera um C^0-grupo $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$. Resta-nos apenas mostrar que este grupo é unitário. Mas se $\{T^*(t)\colon t \geqslant 0\}$ é o semigrupo gerado por $A^* = -A$ então $T(t)^* = T^*(t) = T(-t) = T(t)^{-1}$. Logo $(T(t)^{-1})^* = T(t)^{**} = T(t)$, o que implica que $T(t)^* = T(t)^{-1}$.

Observação 3.9. *Verifique que $-A = A^*$ se, e somente se, iA é autoadjunto. Logo, A gera um C^0-grupo unitário se, e somente se, iA é autoadjunto.*

Exercício 5. Mostre que a equação da onda (com $\beta = 0$) define um grupo de operadores lineares limitados.

Capítulo 4

Regularidade de Semigrupos

4.1 Semigrupos diferenciáveis

Sabemos que se $A\colon D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo $T \subset \mathcal{L}(X)$ e $x \in D(A)$ então $T(t)x \in D(A)$ para cada $t \geqslant 0$. Mas, em geral, esta propriedade não é válida para todo $x \in X$. De fato, assuma que $T(t)X \subset D(A)$, para cada $t \geqslant 0$. Em particular, $X = T(0)X \subset D(A)$, o que implica que $D(A) = X$ e portanto, $A \in \mathcal{L}(X)$. Logo, esta propriedade é válida somente para o caso de operadores lineares limitados.

Note que o problema surgiu quando assumimos que $T(t)X \subset D(A)$ *para todo* $t \geqslant 0$. Este raciocínio não pode ser repetido se pedirmos que $T(t)X \subset D(A)$ para $t > 0$, (ou mais geralmente que $t > t_0 \geqslant 0$).

Definição 4.1. Dizemos que um C^0-semigrupo $T \subset \mathcal{L}(X)$, com gerador infinitesimal A, é **diferenciável para** $t > t_0 \geqslant 0$ se $T(t)X \subset D(A)$ para cada $t > t_0 \geqslant 0$. Quando $t_0 = 0$, dizemos apenas que o semigrupo é **diferenciável**.

Lema 4.2. *Suponha que $T \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo diferenciável para $t > t_0 \geqslant 0$, com gerador infinitesimal A. Se $n \in \mathbb{N}$ e $x \in D(A^n)$ então $T(t)x \in D(A^{n+1})$ e $A^{n+1}T(t)x = AT(t)A^n x$ para todo $t > t_0$.*

Demonstração. Fixe $n \in \mathbb{N}$, $x \in D(A^n)$ e $t > t_0$. Da Proposição 1.11(2) sabemos que $T(t)x \in D(A^n)$ e $A^nT(t)x = T(t)A^n x$. Da diferenciabilidade de T, obtemos então que $A^nT(t)x \in D(A)$, o que nos dá $T(t)x \in D(A^{n+1})$, e

$$A^{n+1}T(t)x = A(A^nT(t)x) = AT(t)A^n x.$$

□

Lema 4.3. *Suponha que $T \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo diferenciável para $t > t_0 \geqslant 0$, com gerador infinitesimal A. Se $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ e $t > nt_0$ então $T(t)x \in D(A^n)$.*

Demonstração. Para $n = 0$, o resultado é trivial. Suponha o resultado válido para $n \in \mathbb{N}$ e seja $t > (n+1)t_0$. Tome $s \in \mathbb{R}$ tal que $t - t_0 > s > nt_0$. Como $s > nt_0$, da hipótese de indução temos $T(s)x \in D(A^n)$. Mas então $T(t)x = T(t-s)T(s)x$, e como $t - s > t_0$, segue do Lema 4.2 que $T(t-s)T(s)x \in D(A^{n+1})$, e portanto $T(t)x \in D(A^{n+1})$. □

Vejamos quais as propriedades destes semigrupos.

Teorema 4.4. *Seja $T \subset \mathcal{L}(X)$ um semigrupo diferenciável para $t > t_0 \geqslant 0$, com gerador infinitesimal $A\colon D(A) \subset X \to X$. Então:*

(i) *se $t - t_0 > s > nt_0$ temos $A^nT(t)x = T(t-s)A^nT(s)x$ para todos $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$;*

(ii) *se $t > nt_0$ temos $A^nT(t) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $n \in \mathbb{N}$;*

(iii) *se $t > nt_0$ temos $A^nT(t) = \left[AT(\frac{t}{n})\right]^n$, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$;*

(iv) *para cada $x \in X$, a função $t \mapsto T(t)x \in X$ é n-vezes continuamente diferenciável para todo $t > nt_0$ e*
$$\frac{d^n}{dt^n}T(t)x = A^nT(t)x,$$
para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$;

(v) *a função $t \mapsto A^nT(t) \in \mathcal{L}(X)$ é uma função contínua na topologia uniforme, para todo $t > (n+1)t_0$ e $n \in \mathbb{N}$;*

(vi) *a função $t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ é n-vezes continuamente diferenciável na topologia uniforme para todo $t > (n+1)t_0$ e*
$$\frac{d^n}{dt^n}T(t) = A^nT(t),$$
para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Demonstração

(i) O caso $n = 0$ é trivialmente satisfeito. Suponhamos que o resultado seja válido pra $n \in \mathbb{N}$ e seja $t - t_0 > s > (n+1)t_0$. Para $\tau - t_0 > r > nt_0$, da hipótese de indução, temos $A^nT(\tau)x = T(\tau - r)A^nT(r)x$, para todo $x \in X$.

Como $\tau - r > t_0$, da definição de diferenciabilidade do semigrupo, segue que $A^nT(\tau)x \in D(A)$ e, em particular, segue que $A^nT(s)x \in D(A)$. Assim $T(t-s)A^nT(s)x \in D(A)$ e portanto temos

$$A^{n+1}T(t)x = A(A^nT(t)x) = AT(t-s)A^nT(s)x = T(t-s)A^{n+1}T(s)x,$$

o que prova **(i)**.

(ii) Novamente o caso $n = 0$ é trivial. Suponhamos que o resultado seja válido para $n \in \mathbb{N}$ e seja $t > (n+1)t_0$, assim $t > nt_0$ e $A^nT(t) \in \mathcal{L}(X)$. Temos $t - t_0 > nt_0$ e, como no item **(i)**, $A^nT(t)x \in D(A)$ para todo $x \in X$. Portanto, como A é fechado, $A^{n+1}T(t) = A(A^nT(t))$ é também fechado e está definido em todo X. Pelo Teorema do Gráfico Fechado, $A^{n+1}T(t) \in \mathcal{L}(X)$.

(iii) O caso $n = 1$ é trivial. Suponha que o resultado é válido para n e assuma que $t > (n+1)t_0$. Se $t - t_0 > s > nt_0$, o item **(i)** nos dá

$$A^{n+1}T(t) = AA^nT(t) = AT(t-s)A^nT(s) = AT(t-s)\left[AT\left(\frac{s}{n}\right)\right]^n \tag{4.1}$$

Tome $s = \frac{nt}{n+1}$ e claramente temos $t - t_0 > s > nt_0$ e $t - s = \frac{t}{n+1}$, e usando estes valores em (4.1), obtemos

$$A^{n+1}T(t) = \left[AT\left(\frac{t}{n+1}\right)\right]^{n+1}.$$

(iv) Provemos primeiramente o cado $n = 1$, e para isso fixemos $x \in X$. Para $t > t_0$ temos $T(t)x \in D(A)$ e assim

$$AT(t)x = \lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = \frac{d^+}{dt}T(t)x.$$

Isso nos mostra que $(t_0, \infty) \ni t \mapsto T(t)x \in X$ é diferenciável à direita. Do item **(ii)**, $AT(s) \in \mathcal{L}(X)$ para $s > t_0$. Se $t > s > t_0$ temos

$$AT(t) = AT(s)T(t-s)$$

e assim, para $|h| < t - s$ obtemos

$$\begin{aligned}\|AT(t+h)x - AT(t)x\|_X &= \|AT(s)T(t+h-s)x - AT(s)T(t-s)x\|_X \\ &\leqslant \|AT(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\|T(t+h-s)x - T(t-s)x\|_X \to 0,\end{aligned}$$

quando $h \to 0^+$, já que T é um C^0-semigrupo. Logo, $t \mapsto AT(t)x$ é contínua para $t > t_0$, e segue do Lema de Dini que $t \mapsto T(t)x$ é continuamente diferenciável para $t > t_0$.

Suponha que o resultado vale para n e seja $t - t_0 > s > nt_0$. Do item **(i)** temos $A^nT(t)x = T(t-s)A^nT(s)x$, para todo $x \in X$. Como $t - s > t_0$, pelo caso $n = 1$ temos

$$\frac{d}{dt}A^nT(t)x = AT(t-s)A^nT(s)x = A^{n+1}T(t)x.$$

Da indução segue que $t \mapsto T(t)x$ é $(n+1)$-vezes continuamente diferenciável e

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}T(t)x = \frac{d}{dt}\left[\frac{d^n}{dt^n}T(t)x\right] = \frac{d}{dt}A^nT(t)x = A^{n+1}T(t)x.$$

(v) Faremos primeiramente o caso $n = 0$. Sejam $t > s > t_0$ e $|h| < t - s$. Temos

$$\begin{aligned}\|T(t+h)x - T(t)x\|_X &\leqslant \left|\int_t^{t+h} \|AT(\tau)x\|_X d\tau\right| = \left|\int_t^{t+h} \|AT(s)T(\tau - s)x\|_X d\tau\right| \\ &\leqslant \left|\int_t^{t+h} \|AT(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\|T(\tau - s)\|_{\mathcal{L}(X)}\|x\|_X d\tau\right| \leqslant M|h|\|x\|_X,\end{aligned}$$

onde M é uma constante, já que $AT(s) \in \mathcal{L}(X)$ e $T(\tau - s)$ é uniformemente limitado para τ num intervalo limitado, e portanto

$$\|T(t+h) - T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M|h|,$$

e prova o caso $n = 0$. Se $t - t_0 > s > nt_0$ e $|h| < t - s - t_0$, temos

$$\begin{aligned}\|A^nT(t+h)x - A^nT(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|T(t+h-s)A^nT(s)x - T(t-s)A^nT(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leqslant \|T(t+h-s) - T(t-s)\|_{\mathcal{L}(X)}\|A^nT(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0,\end{aligned}$$

quando $h \to 0$, pois $t - s > t_0$.

(vi) Fixe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, e sejam $t > (n+1)t_0$ e $|h| < t - (n+1)t_0$. Assim para todo $x \in X$, do que foi provado no item **(iv)** temos

$$A^{n-1}T(t+h)x - A^{n-1}T(t)x = \int_t^{t+h} A^nT(\tau)x d\tau,$$

pois $\frac{d}{dt}A^{n-1}T(t)x = A^nT(t)x$ para todo $x \in X$ e $t > nt_0$. Logo, como $t \mapsto A^nT(t) \in \mathcal{L}(X)$ é contínua na topologia uniforme (pelo item **(v)**), segue que

$$\frac{A^{n-1}T(t+h)x - A^{n-1}T(t)x}{h} = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} A^nT(\tau)x d\tau = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} A^nT(\tau)d\tau \cdot x,$$

e, fazendo $h \to 0$, obtemos

$$\frac{d}{dt}A^{n-1}T(t) = A^nT(t),$$

na topologia uniforme. Desta maneira, facilmente vemos que o caso $n = 1$ é válido. Suponhamos que o resultado é valido para n e tome $t > (n+2)t_0$. Usando o que foi provado acima, obtemos $t \mapsto A^nT(t) \in \mathcal{L}(X)$ continuamente diferenciável e $\frac{d}{dt}A^nT(t) = A^{n+1}T(t)$. Portanto, $t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ é $(n+1)$-vezes continuamente diferenciável e

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}T(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{d^n}{dt^n}T(t)\right] = \frac{d}{dt}A^nT(t) = A^{n+1}T(t),$$

o que conclui o item **(vi)**, e também a demonstração.

Corolário 4.5. *Se $T \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo diferenciável, então $(0,\infty) \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ é n-vezes continuamente diferenciável na topologia uniforme de operadores para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, e temos*

$$\frac{d^n}{dt^n}T(t) = A^nT(t) = \left[AT\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n.$$

4.2 Semigrupos compactos

Lembremos que, dados espaços métricos X, Y, uma aplicação $K\colon X \to Y$ é **compacta** se para todo $B \subset X$ limitado, $K(B)$ é relativamente compacto em Y. Quando X, Y são espaços de Banach, o conjunto dos operadores lineares compactos de X em Y é denotado por $\mathcal{K}(X, Y)$.

Exercício 6. Sejam X, Y espaços de Banach. Mostre que $\mathcal{K}(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ e que, dado $K\colon X \to Y$ um operador linear, as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $K \in \mathcal{K}(X,Y)$;

(b) $K(B_r^X(x))$ é relativamente compacto em Y para cada $r > 0$ e $x \in X$, onde $B_r^X(x)$ representa a bola aberta em X de centro x e raio r;

(c) $K(\overline{B}_r^X(x))$ é relativamente compacto em Y para cada $r > 0$ e $x \in X$, onde $\overline{B}_r^X(x)$ representa a bola fechada em X de centro x e raio r;

(d) $K(\overline{B}_1^X(0))$ é relativamente compacto em Y;

(e) $K(B_1^X(0))$ é relativamente compacto em Y;

(f) para cada sequência limitada $\{x_n\}$ em X, a sequência $\{Kx_n\}$ possui uma subsequência convergente em Y.

Mostre ainda que $\mathcal{K}(X,Y)$ é um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{L}(X,Y)$.

Exercício 7. Sejam X, Y, Z espaços de Banach, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Mostre que se $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ ou $B \in \mathcal{K}(Y,Z)$, então $AB \in \mathcal{K}(X,Z)$.

Definição 4.6. Dizemos que um C^0-semigrupo $T \subset \mathcal{L}(X)$ é **compacto para** $t > t_0 \geqslant 0$ se $T(t)$ é um operador compacto para cada $t > t_0 \geqslant 0$. Se $t_0 = 0$, dizemos simplesmente que o semigrupo é **compacto**.

Note que se $T(t)$ é um operador compacto para todo $t \geqslant 0$, então $T(0) = I$ é compacta, o que implica que X é um espaço finito dimensional (pelo Teorema de Riesz, veja [3, Teorema 2.4.7]). Note também que se $T(t_1)$ é compacto, então $T(t)$ é compacto para todo $t \geqslant t_1$, já que $T(t) = T(t-t_1)T(t_1)$.

Teorema 4.7. *Se $T \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo compacto para $t > t_0 \geqslant 0$, então a aplicação $t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ é contínua para $t > t_0$.*

Demonstração

Fixemos $t > t_0$ e $M \geqslant 0$ tal que $\sup\limits_{0 \leqslant s \leqslant 1} \|T(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M$. Dado $\varepsilon > 0$, da compacidade do semigrupo, o conjunto $T(t)\overline{B}_1^X(0)$ é relativamente compacto em X, e portanto existem $x_1, \cdots, x_k \in \overline{B}_1^X(0)$ tais que

$$T(t)\overline{B}_1^X(0) \subset \bigcup_{i=1}^{k} B^X_{\frac{\varepsilon}{2(M+1)}}(T(t)x_i).$$

Como para cada $x \in X$, a aplicação $[0,\infty) \ni t \mapsto T(t)x \in X$ é contínua, existe

$0 < h_0 < 1$ tal que para $0 < h \leqslant h_0$ temos

$$\sup_{1\leqslant i\leqslant k} \|T(t+h)x_i - T(t)x_i\|_X \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja agora $x \in \overline{B}_1^X(0)$. Então, existe $1 \leqslant i \leqslant k$ tal que $T(t)x \in B^X_{\frac{\varepsilon}{2(M+1)}}(T(t)x_i)$, e portanto para $0 < h \leqslant h_0$ temos

$$\begin{aligned}\|T(t+h)x - T(t)x\|_X \leqslant \|T(h)\|_{\mathcal{L}(X)}\|T(t)x - T(t)x_i\|_X + \|T(t+h)x_i - T(t)x_i\|_X \\ + \|T(t)x_i - T(t)x\|_X \leqslant M\frac{\varepsilon}{2(M+1)} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,\end{aligned}$$

o que prova a continuidade à direita de $t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ para $t > t_0$. Agora, fixado $t > t_0$ defina

$$t_1 = t_0 + \frac{t - t_0}{2}.$$

Note que $t_0 < t_1 < t$. Para $0 < h < t - t_1$ temos

$$T(t-h) - T(t) = T(t-h-t_1+t_1) - T(t) = T(t-h-t_1)(T(t_1) - T(t_1+h)),$$

e como $\|T(t-h-t_1)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é limitado para $h \to 0^+$, a continuidade à direita implica que $\|T(t_1) - T(t_1+h)\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0$ quanto $h \to 0^+$, e conclui a demonstração.

Teorema 4.8. *Sejam $T \subset \mathcal{L}(X)$ um C^0-semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então T é compacto se, e somente se, a aplicação $t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ é contínua para $t > 0$ e o operador resolvente $(\lambda - A)^{-1}$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$.*

Demonstração

Sejam M, ω constantes tais que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{\omega t}$, para todo $t \geqslant 0$. Do Teorema 4.7, sabemos que a aplicação $t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ é contínua para $t > 0$. Portanto,

$$(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)dt \quad \text{para } \mathrm{Re}\lambda > \omega, \tag{4.2}$$

e a integral existe na topologia uniforme de operadores. Agora, sejam $\varepsilon > 0$, $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ e defina

$$R_\varepsilon(\lambda) = \int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t}T(t)dt.$$

Como $T(t)$ é um operador compacto para todo $t > 0$, segue que $R_\varepsilon(\lambda)$ é compacto (mostre essa afirmação). Além disso

$$\|(\lambda - A)^{-1} - R_\varepsilon(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} = \left\| \int_0^\varepsilon e^{-\lambda t} T(t) dt \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M\varepsilon \to 0,$$

quando $\varepsilon \to 0^+$. Logo $(\lambda - A)^{-1}$ é o limite uniforme de operadores compactos, e portanto é compacto. Segue diretamente da identidade do resolvente que $(\lambda - A)^{-1}$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$.

Reciprocamente, assuma que a aplicação $t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ é contínua para $t > 0$ e que $(\lambda - A)^{-1}$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$. Segue de (4.2) que

$$\lambda(\lambda - A)^{-1} T(t) - T(t) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s} [T(t+s) - T(t)] ds.$$

Se λ é real, $\lambda > \max\{\omega, 0\}$, e $\delta > 0$ temos

$$\begin{aligned} \|\lambda(\lambda - A)^{-1} T(t) - T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leqslant \int_0^\delta \lambda e^{-\lambda s} \|T(t+s) - T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} ds \\ &\quad + \int_\delta^\infty \lambda e^{-\lambda s} \|T(t+s) - T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} ds \\ &\leqslant \sup_{0 \leqslant s \leqslant \delta} \|T(t+s) - T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} + 2M \frac{\lambda}{\lambda - \omega} e^{\omega(t+\delta)} e^{-\lambda \delta}, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|\lambda(\lambda - A)^{-1} T(t) - T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \sup_{0 \leqslant s \leqslant \delta} \|T(t+s) - T(t)\|_{\mathcal{L}(X)},$$

o como $\delta > 0$ é arbitrário e $t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ é contínua para $t > 0$, temos

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|\lambda(\lambda - A)^{-1} T(t) - T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 0,$$

e como $\lambda(\lambda - A)^{-1} T(t)$ é um operador compacto para cada λ, segue que $T(t)$ é compacto.

Corolário 4.9. *Sejam $T \subset \mathcal{L}(X)$ um C^0-semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Se $(\lambda - A)^{-1}$ é compacto para algum $\lambda \in \rho(A)$ e a aplicação $t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ é contínua para $t > t_0 \geqslant 0$, então T é compacto para $t > t_0$.*

Corolário 4.10. *Sejam $T \subset \mathcal{L}(X)$ um semigrupo uniformemente contínuo e $A \in \mathcal{L}(X)$ seu gerador infinitesimal. Então T é compacto se, e somente se, $(\lambda - A)^{-1}$ é compacto para algum $\lambda \in \rho(A)$.*

A caracterização de semigrupos compactos dada no Teorema 4.8 não é totalmente satisfatória, uma vez que não caracteriza o semigupo compacto $T \subset \mathcal{L}(X)$ somente em termos de propriedades do seu gerador infinitesimal A, mas precisamos assumir a continuidade da aplicação $t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$. A razão é que, até agora, não existem condições necessárias e suficientes, nem em termos de A nem do seu resolvente $(\lambda - A)^{-1}$, nas quais a aplicação $t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ seja contínua. Para uma condição necessária, veremos um resultado logo abaixo, mas para isto, precisamos do seguinte lema:

Lema 4.11. *Sejam $T \subset \mathcal{L}(X)$ um C^0-semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Se $B_\lambda(t)x = \int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)xds$, então*

$$(\lambda - A)B_\lambda(t)x = e^{\lambda t}x - T(t)x, \text{ para todo } x \in X, \tag{4.3}$$

$$B_\lambda(t)(\lambda - A)x = e^{\lambda t}x - T(t)x, \text{ para todo } x \in D(A). \tag{4.4}$$

Este resultado agora nos dá uma condição necessária para que a aplicação $t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ seja contínua:

Teorema 4.12. *Sejam $T \subset \mathcal{L}(X)$ um C^0-semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Se a aplicação $t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ é contínua para $t > 0$, então existe uma função $\psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que*

$$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} \colon \lambda = \sigma + i\tau, \ |\tau| \geqslant \psi(|\sigma|)\}, \tag{4.5}$$

e também

$$\lim_{|\tau|\to\infty} \|(\sigma + i\tau - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = 0 \quad \text{para todo real } \sigma. \tag{4.6}$$

Demonstração

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\rho(A) \supset \{\mathrm{Re}\lambda > 0\}$ e que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M$ (se este não é o caso, basta considerar o semigrupo $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$).

Se $\sigma > 0$, então $\lambda = \sigma + i\tau \in \rho(A)$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$ e usando $(\lambda - A)^{-1}x$ no lugar de x em (4.4), temos para $x \in X$:

$$e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}x - T(t)(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)xds,$$

o que implica que

$$(e^{\sigma t} - M)\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant e^{\sigma t}\left\|\int_0^t e^{-i\tau s}e^{-\sigma s}T(s)ds\right\|,$$

e escolhendo $t > \frac{1}{\sigma}\ln M$, temos

$$\|(\sigma + i\tau - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C\left\|\int_0^t e^{-i\tau s}e^{-\sigma s}T(s)ds\right\|,$$

para alguma constante $C > 0$ independente de τ. Segue do Lema de Riemann-Lebesgue (veja o Exercício 2) que o lado direito da inequação acima tende a zero quando $|\tau| \to \infty$.

Se $\sigma \leqslant 0$, escrevemos

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(1 + i\tau - \lambda)^k(1 + i\tau - A)^{-k-1},$$

e definimos

$$\phi(|\tau|) = \max_{|r|\geqslant|\tau|}\|(1 + ir - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)},$$

e já mostramos no caso anterior ($\sigma = 1 > 0$) que $\phi(|\tau|) \to 0$ quando $|\tau| \to \infty$. A série acima é claramente convergente (em $\mathcal{L}(X)$) para $|1-\sigma| \leqslant \frac{1}{2\phi(|\tau|)}$, o que implica (4.5). Mais ainda, fixado σ satisfazendo $|1-\sigma| \leqslant \frac{1}{2\phi(|\tau|)}$, para $|\tau|$ suficientemente grande temos

$$\|(\sigma + i\tau - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 2\|(1 + i\tau - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 2\phi(|\tau|),$$

e portanto vale (4.6).

Corolário 4.13. *Sejam $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ um C^0-semigrupo compacto e A seu gerador infinitesimal. Para cada $-\infty < \alpha \leqslant \beta < \infty$, a intersecção da faixa $\alpha \leqslant \mathrm{Re}\lambda \leqslant \beta$ com $\sigma(A)$ contém no máximo um número finito de autovalores de A.*

Demonstração

Sabemos que $\sigma(A)$ pode ser: vazio, ou um conjunto finito, ou um conjunto infinito com ∞ sendo seu único possível ponto de acumulação. Portanto, do Teorema 4.12, o resultado segue.

4.3 Semigrupos analíticos

Definição 4.14. Sejam $-\pi \leqslant \varphi_1 < 0 < \varphi_2 \leqslant \pi$ e defina o **setor** $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} \colon \varphi_1 < \arg z < \varphi_2\}$. Para cada $z \in \Lambda \cup \{0\}$, seja $T(z)$ um operador linear limitado. A família $\{T(z) \colon z \in \Lambda \cup \{0\}\} \subset \mathcal{L}(X)$ é dita um **semigrupo analítico** (ou um **semigrupo holomorfo**) em Λ se

(i) a aplicação $\Lambda \ni z \mapsto T(z) \in \mathcal{L}(X)$ é analítica;

(ii) $T(0) = I$ e $\lim\limits_{\Lambda \ni z \to 0} T(z)x = x$, para cada $x \in X$;

(iii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ para todos $z_1, z_2 \in \Lambda$.

Um semigrupo $\{T(t) \colon t \geqslant 0\}$ é dito **analítico** se ele possui uma extensão a um semigrupo analítico em algum setor $\Lambda \cup \{0\}$.

Claramente, a restrição de um semigrupo analítico ao eixo real é um C^0-semigrupo. Estaremos interessados então no problema oposto, isto é, dado um C^0-semigrupo, encontrar condições sob as quais possamos garantir que este semigrupo pode ser estendido a um semigrupo analítico em algum setor Λ em torno do eixo real positivo. Para isto, precisamos primeiro encontrar uma maneira de expressar o semigrupo em termos do seu gerador infinitesimal, e tal relação é dada pela transformada inversa de Laplace.

4.3.1 Transformada inversa de Laplace

Vimos no Teorema 1.9, item **(4)**, que para cada $x \in X$, temos

$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt,$$

se $\mathrm{Re}\lambda$ é grande. Isto sugere que usando a transformada inversa de Laplace poderemos encontrar $T(t)$, conhecido A. No que se segue perseguiremos este objetivo.

Exercício 2. Se a, b são números reais estendidos com $a < b$ e $f\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ é absolutamente integrável, mostre o *Lema de Riemann-Lebesgue*, isto é,

$$\lim_{\mu\to\infty} \int_a^b f(t)\ \sin(\mu t)\,dt = \lim_{\mu\to\infty} \int_a^b f(t)\cos(\mu t)\,dt = 0,$$

ou equivalentemente

$$\lim_{\mu\to\infty} \int_a^b f(t)e^{i\mu t}dt = 0.$$

Sugestão: No caso em que f é continuamente diferenciável e tem suporte compacto em (a,b), integre por partes para provar o resultado.

Lema 4.15. *Temos o seguinte:*

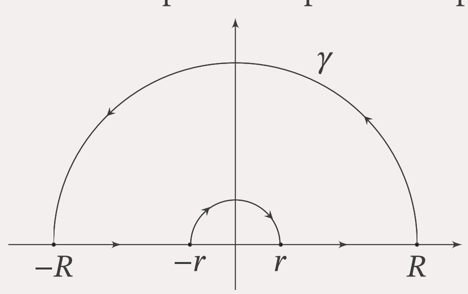
(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi;$

(b) *se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é tal que $f(t)(1+|t|)^{-1}$ é absolutamente integrável em $\mathbb{R}$ e $t^{-1}(f(t)-f(0))$ é absolutamente integrável em $[-1,1]$, então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin(mt)}{\pi t}dt \to f(0) \quad \text{quando } m \to +\infty.$$

Demonstração

(a) Para $0 < r < R$, seja γ a curva no plano complexo dada pela figura abaixo:



Integrando a função analítica $\mathbb{C}\setminus\{0\} \ni z \mapsto z^{-1}e^{iz} \in \mathbb{C}$ ao longo de γ, temos

$$0 = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t}dt + \int_r^R \frac{e^{it}}{t}dt + i\int_\pi^0 e^{ire^{i\theta}}d\theta + i\int_0^\pi e^{iRe^{i\theta}}d\theta.$$

O resultado agora segue notando que $\frac{\sin t}{t}$ é par, fazendo $r \to 0$, $R \to \infty$ e considerando que (do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) temos

$$\left|\int_0^{\pi} e^{iRe^{i\theta}} d\theta\right| \leqslant \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

(b) Note que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin mt}{\pi t} dt = \int_{-m}^{m} \frac{\sin t}{\pi t} dt \to 1$ quando $m \to \infty$ e assim

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin mt}{\pi t} dt - f(0)\int_{-1}^{1} \frac{\sin(mt)}{\pi t} dt &= \int_{|t|\leqslant 1} \frac{f(t)-f(0)}{\pi t}\sin(mt)\, dt \\ &\quad + \int_{|t|\geqslant 1} \frac{f(t)}{\pi t}\sin(mt)\, dt.\end{aligned}$$

Ambos os termos do lado direito da igualdade tendem a zero quando $m \to \infty$, pelo Lema de Riemann-Lebesgue (veja o Exercício 2).

Teorema 4.16. *Seja $T \subset \mathcal{L}(X)$ um C^0-semigrupo com gerador infinitesimal A, satisfazendo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{\omega t}$ para todo $t \geqslant 0$. Se $\gamma > \max\{0,\omega\}$, $x \in D(A^2)$ e $t > 0$ então*

$$T(t)x = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-im}^{\gamma+im} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}x\, d\lambda.$$

Além disso, para cada $0 < \varepsilon < 1$, o limite acima é uniforme para t no intervalo $[\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$.

Demonstração

Para Re$\lambda = \gamma > \omega$, $(\lambda - A)^{-1}$ existe e é uniformemente limitada, pois

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{\gamma - \omega}.$$

Agora, para $x \in D(A^2)$ temos

$$(\lambda - A)^{-1}x = \lambda^{-1}x + \lambda^{-2}Ax + \lambda^{-2}(\lambda - A)^{-1}A^2x,$$

e também

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-ik}^{\gamma+im} e^{\lambda t}(\lambda-A)^{-1}x\,d\lambda = \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-ik}^{\gamma+im}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}d\lambda\right)x$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-ik}^{\gamma+im}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2}[Ax+(\lambda-A)^{-1}A^2x]d\lambda,$$

e ambos os termos convergem, uniformemente para t em $[\varepsilon,\varepsilon^{-1}]$, quando $k,m\to\infty$. O primeiro termo por integração por partes e o segundo porque o integrando tem norma menor ou igual a $C/|\lambda|^2$, para alguma constante positiva C, e portanto converge absolutamente. Só resta mostrar que o limite é $T(t)x$.

Para $\mathrm{Re}\lambda=\gamma$ temos

$$(\lambda-A)^{-1}x=\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\,ds,$$

então

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-im}^{\gamma+im} e^{\lambda t}(\lambda-A)^{-1}x\,d\lambda = \int_0^\infty\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-im}^{\gamma+im}e^{\lambda(t-s)}d\lambda\right\}T(s)x\,ds$$
$$=\int_0^\infty\frac{\sin m(t-s)}{\pi(t-s)}e^{\gamma(t-s)}T(s)x\,ds=\int_{-t}^\infty\frac{\sin m\tau}{\pi\tau}e^{-\gamma\tau}T(t+\tau)x\,d\tau.$$

A função

$$f(\tau)=\begin{cases}\langle e^{-\gamma\tau}T(t+\tau)x,x^*\rangle, & \tau\geqslant -t\\ 0, & \tau<-t,\end{cases}$$

satisfaz as condições do Lema 4.15 para qualquer $x^*\in X^*$ e $t>0$, pois f é diferenciável em $\tau=0$ com $f'(0)=\langle T(t)(A-\gamma)x,x^*\rangle$ e

$$\frac{|f(\tau)|}{1+|\tau|}\leqslant C\,e^{-(\gamma-\omega)|\tau|},\quad \tau\in\mathbb{R},$$

para alguma constante positiva C. Assim,

$$\left\langle\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-im}^{\gamma+im}e^{\lambda t}(\lambda-A)^{-1}x\,d\lambda,x^*\right\rangle\xrightarrow{m\to\infty}f(0)=\langle T(t)\,x,x^*\rangle.$$

Como isto é válido para todo $x^*\in X^*$, a demonstração está completa.

Teorema 4.17. *Suponha que A é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo $T \subset \mathcal{L}(X)$. Assuma que existam $\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \pi$ e $M \geqslant 1$ tais que*

$$\rho(A) \supset \Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\arg(\lambda)| < \alpha\}$$

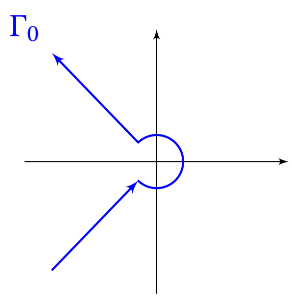
e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{|\lambda|}, \text{ para todo } \lambda \in \Sigma.$$

Então

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda,$$

onde Γ_0 é a curva que consiste de dois raios $\{\lambda \colon |\arg(\lambda)| = \varphi, |\lambda| > r > 0\}$, do arco $\{\lambda \colon |\lambda| = r, |\arg(\lambda)| \leqslant \varphi\}$ para r pequeno e $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \alpha)$, orientada no sentindo da parte imaginária crescente, como na figura abaixo.



Em particular, a aplicação $\{z \in \mathbb{C} \colon |\arg(z)| < \varphi - \frac{\pi}{2}\} \ni z \mapsto T(z) \in \mathcal{L}(X)$ é analítica.

Demonstração

Se $x \in D(A^2)$ e $t > 0$ então, para algum $\gamma > 0$, do Teorema 4.16 temos

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda.$$

O integrando é analítico para $\lambda \in \Sigma$ e portanto podemos deformar o contorno de integração para a curva Γ_0. De fato, quando $|\mathrm{Im}\lambda| = m$, $-km \leqslant \mathrm{Re}\lambda \leqslant \gamma$ ($k = |\mathrm{cotan}\, \varphi| > 0$), temos

$$\|e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x\|_X \leqslant \frac{M e^{t \mathrm{Re}\lambda} \|x\|_X}{\sqrt{(\mathrm{Re}\lambda)^2 + m^2}}$$

e, dividindo o intervalo de integração $[-km, \gamma]$ em $[-km, -m^{\frac{1}{2}}]$ e $[-m^{\frac{1}{2}}, \gamma]$, vemos que as integrais correspondentes tendem a zero quando $m \to \infty$. Portanto

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}x\, d\lambda,$$

e esta expressão vale para todo $x \in X$ porque converge em norma. De fato, para $t > 0$ e $|\arg\lambda| = \varphi$ obtemos

$$\|e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{Me^{-t|\lambda|k_1}}{|\lambda|}, \quad k_1 = |\cos\varphi| > 0,$$

então

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}d\lambda,$$

com convergência na norma de $\mathcal{L}(X)$ qualquer $t > 0$. A convergência é uniforme para $\varepsilon \leqslant t$, qualquer $\varepsilon > 0$. Mais ainda, a integral está bem definida e converge uniformemente para $t = z \in \mathbb{C}$ com $|\arg(z)| \leqslant \varepsilon_1 < \varphi - \frac{\pi}{2}$ e $\varepsilon_0 \leqslant |z|$, onde $\varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$, e portanto a aplicação $\{z \in \mathbb{C} \colon |\arg(z)| < \varphi - \frac{\pi}{2}\} \ni z \mapsto T(z) \in \mathcal{L}(X)$ é analítica.

4.3.2 Geração de semigrupos analíticos

Vejamos um resultado um pouco mais geral que o anterior, que garante que um operador densamente definido que satisfaz as condições do Teorema 4.17 é o gerador de um semigrupo analítico.

Teorema 4.18. *Sejam X um espaço de Banach e $A \colon D(A) \subset X \to X$ um operador densamente definido. Assuma que existam $a \in \mathbb{R}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \pi$ e $M \geqslant 1$ tais que*

$$\rho(A) \supset \Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\arg(\lambda - a)| < \alpha\}$$

e

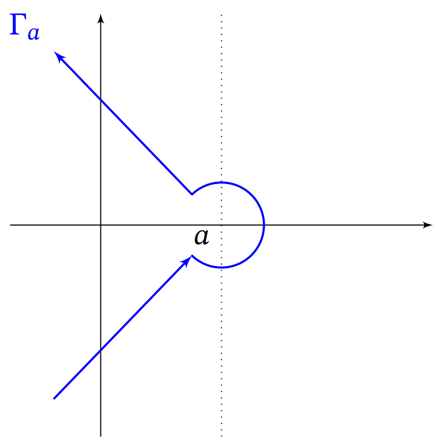
$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{|\lambda - a|}, \text{ para todo } \lambda \in \Sigma.$$

Então A é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo $T = \{T(t) \colon t \geqslant 0\} \subset \mathcal{L}(X)$, com

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_a} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}d\lambda, \tag{4.7}$$

onde Γ_a é a curva que consiste de dois raios $\{\lambda \colon |\arg(\lambda - a)| = \varphi, |\lambda| > r > 0\}$, do arco

$\{\lambda\colon |\lambda - a| = r, |\arg(\lambda - a)| \leqslant \varphi\}$ *para* r *pequeno e* $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \alpha)$*, orientada no sentindo da parte imaginária crescente, como na figura abaixo.*



Também $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$ *se estende a um semigrupo analítico no setor* $\{z \in \mathbb{C}\colon |\arg(z)| < \varphi - \frac{\pi}{2}\}$*. Além disso,* $\frac{d}{dt}T(t) = AT(t)$ *para todo* $t > 0$*,* $AT(t)$ *é um operador limitado para cada* $t > 0$ *e existe* $K \geqslant 0$ *tal que para todo* $t > 0$ *temos*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Ke^{at} \quad e \quad \|AT(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{K}{t}e^{at}.$$

Observação 4.19. *Antes de fazermos a prova desse resultado, vejamos que ele difere um pouco do Teorema 4.17, uma vez que aqui não estamos assumindo que* A *é o gerador infinitesimal de um* C^0*-semigrupo. Isso é uma das teses do teorema. Assim, precisaremos mostrar que a família* $\{T(t)\colon t \geqslant 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ *satisfazendo (4.7) para* $t > 0$ *é, de fato, um* C^0*-semigrupo em* X*.*

Demonstração

Considerando $B = A - a$, vemos que é suficiente provar o resultado para o caso $a = 0$.

Sabemos do Teorema 4.17 que $z \mapsto T(z) \in \mathcal{L}(X)$ é analítica no setor $\{z \in \mathbb{C}\colon |\arg(z)| < \varphi - \frac{\pi}{2}\}$. Provemos primeiramente que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ e $t\|AT(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ são limitadas para $t > 0$.

Como $t > 0$, fazendo a mudança de variável $\mu = \lambda t$, obtemos

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\mu}\left(\tfrac{\mu}{t} - A\right)^{-1}\frac{d\mu}{t},$$

e podemos manter o contorno Γ_0 inalterado, usando para isso o Teorema de Cauchy, já que o integrando é analítico. Assim

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0} e^{\mathrm{Re}\mu}\frac{Mt}{\mu}\frac{|d\mu|}{t} = K < \infty,$$

para todo $t > 0$. Analogamente

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}A(\lambda - A)^{-1}d\lambda &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}\big(-I + \lambda(\lambda - A)^{-1}\big)d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\mu}{t}\Big(\frac{\mu}{t} - A\Big)^{-1}\frac{d\mu}{t}.\end{aligned}$$

O primeiro termo é zero (aplicando o Teorema de Cauchy-Goursat) e, portanto,

$$\frac{t}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}A(\lambda - A)^{-1}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\mu}{t}\Big(\frac{\mu}{t} - A\Big)^{-1}d\mu.$$

Assim,

$$\left\|\frac{t}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}A(\lambda - A)^{-1}d\lambda\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma_0} e^{\mathrm{Re}\mu}|d\mu| = K_1 < \infty.$$

Exercício 8. Mostre que para $t > 0$ temos

$$AT(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}A(\lambda - A)^{-1}d\lambda.$$

Note também que se $x \in D(A)$ então $A(\lambda - A)^{-1}x = (\lambda - A)^{-1}Ax$ e, logo,

$$AT(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}A(\lambda - A)^{-1}x d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}Ax d\lambda = T(t)Ax.$$

Pela analiticidade de $T(t)$ e a convergência uniforme da integral para $t \geqslant \varepsilon > 0$, temos

$$\frac{d}{dt}T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}\lambda(\lambda - A)^{-1}d\lambda,$$

que é, como mostramos acima, $AT(t)$.

Se $x \in D(A)$ e $t > 0$, temos $(\lambda - A)^{-1}x = \lambda^{-1}x + \lambda^{-1}(\lambda - A)^{-1}Ax$ e assim

$$T(t)x = \Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}\frac{d\lambda}{\lambda}\Big)x + \frac{t}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\mu}\frac{\mu}{t}\Big(\frac{\mu}{t} - A\Big)^{-1}Axd\mu,$$

e assim

$$\|T(t)x - x\|_X \leqslant \frac{t}{2\pi}\int_{\Gamma_0} Me^{\mathrm{Re}\mu}\|Ax\|\left|\frac{d\mu}{\mu^2}\right| \to 0,$$

quando $t \to 0^+$. Como $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant K$ e $D(A)$ é denso em X, é fácil ver que $T(t)x \to x$ quando $t \to 0^+$ para cada $x \in X$.

Agora, a função $[0,t] \ni s \mapsto T(t-s)T(s)x \in X$ é contínua e diferenciável (analítica) em $(0,t)$, com

$$\frac{d}{ds}T(t-s)T(s)x = -AT(t-s)T(s)x + T(t-s)AT(s)x = 0,$$

e portanto é constante. Assim

$$T(t-s)T(s)x = T(t)x \quad \text{para } 0 \leqslant s \leqslant t \text{ e } x \in X,$$

que prova a propriedade de semigrupo, e mostra que $T = \{T(t) \colon t \geqslant 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ é um C^0-semigrupo em X.

Para completar a demonstração do teorema, devemos mostrar que A é o gerador infinitesimal de T. Mas para $t > 0$ e $x \in D(A)$ temos

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)Axds \to Ax$$

quando $t \to 0^+$. Assim, se $C \colon D(C) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de T, devemos ter $A \subset C$. Mas $1 \in \rho(A) \cap \rho(C)$, e portanto

$$(I-C)D(A) = (I-A)D(A) = X = (I-C)D(C),$$

e portanto $D(A) = D(C)$ e $A = C$.

Corolário 4.20. *Com as hipóteses do Teorema 4.18, se $(\lambda - A)^{-1}$ é compacto para algum $\lambda \in \rho(A)$, então T é um semigrupo compacto.*

Demonstração

Do Teorema 4.18, temos $(0,\infty) \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ diferenciável e, portanto, contínua. O resultado segue do Corolário 4.9.

Como a multiplicação de um C^0-semigrupo $T(t)$ por $e^{\omega t}$ não afeta a possibilidade de estendê-lo a um semigrupo analítico, podemos nos restringir ao caso de C^0-semigrupos uniformemente limitados, isto é, C^0-semigrupos $T \subset \mathcal{L}(X)$ para os quais existe uma constante $M \geqslant 1$ tal que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M$ para todo $t \geqslant 0$.

Ainda, é sempre possível assumir que $0 \in \rho(A)$, onde A é o gerador infinitesimal de T, bastando multiplicar o semigrupo uniformemente limitado por $e^{-\varepsilon t}$, para algum $\varepsilon > 0$. Com isso, temos o seguinte teorema:

Teorema 4.21. *Sejam $T \subset \mathcal{L}(X)$ um C^0-semigrupo uniformemente limitado, A seu gerador infinitesimal e assuma que $0 \in \rho(A)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *T pode ser estendido para um semigrupo analítico em um setor $\Lambda_\delta = \{z \in \mathbb{C} \colon |\arg(z)| < \delta\}$ e $\|T(z)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é uniformemente limitada em cada subsetor fechado $\overline{\Lambda_{\delta'}}$, $0 \leqslant \delta' < \delta$, de Λ_δ.*

(b) *Existe uma constante C tal que para cada $\sigma > 0$ e $\tau \neq 0$ temos*

$$\|(\sigma + i\tau - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{|\tau|}.$$

(c) *Existem $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ e $M > 0$ tais que*

$$\rho(A) \supset \Sigma = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\arg(\lambda)| \leqslant \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup \{0\}$$

e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{|\lambda|}, \text{ para todo } \lambda \in \Sigma \setminus \{0\}.$$

(d) *T é diferenciável e existe uma constante C tal que*

$$\|AT(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{t}, \text{ para todo } t > 0.$$

Demonstração

Mostremos que **(a)** implica **(b)**. Seja $0 < \delta' < \delta$ tal que $\|T(z)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C_1$ para todo $z \in \overline{\Lambda_{\delta'}}$. Para $x \in X$ e $\sigma > 0$ temos

$$(\sigma + i\tau - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-(\sigma+i\tau)t} T(t)x dt.$$

Exercício 9. Mostre que para $\tau \neq 0$, temos

$$\int_0^\infty e^{-(\sigma+i\tau)t}T(t)xdt = \int_\gamma e^{-(\sigma+i\tau)z}T(z)xdz,$$

onde $\gamma(\rho) = \rho e^{im\delta'}$ para $\rho \geqslant 0$, com $m = 1$ se $\tau < 0$ e $m = -1$ se $\tau > 0$.

Dica: Use a analiticidade e a limitação uniforme de T em $\overline{\Lambda_{\delta'}}$, juntamente com o Teorema de Cauchy.

Usando o exercício acima, veja que para $\tau < 0$ temos

$$\|(\sigma+i\tau-A)^{-1}x\|_X \leqslant C_1\|x\|_X \int_0^\infty e^{-\rho(\sigma\cos\delta'-\tau\sin\delta')}d\rho \leqslant \frac{C_1\|x\|_X}{\sigma\cos\delta'-\tau\sin\delta'} \leqslant \frac{C\|x\|_X}{|\tau|}.$$

Analogamente para $\tau > 0$, o que prova que **(b)** está verificado.

Mostremos agora que **(b)** implica **(c)**. Como A é por hipótese o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo temos $\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C_1}{\mathrm{Re}\lambda}$, para $\mathrm{Re}\lambda > 0$. De **(b)**, para $\mathrm{Re}\lambda > 0$ e $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$, segue que

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{|\mathrm{Im}\lambda|}.$$

Com isso, tomando $K = \max\{C_1, C\}$ temos

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant K\min\left\{\frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}, \frac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|}\right\} = \frac{K}{\max\{\mathrm{Re}\lambda, |\mathrm{Im}\lambda|\}} \leqslant \frac{\sqrt{2}K}{|\lambda|}$$

para $\mathrm{Re}\lambda > 0$ e $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$. Portanto

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{\sqrt{2}K}{|\lambda|} \quad \text{para todo } \mathrm{Re}\lambda > 0.$$

Agora fixemos $0 < \alpha < 1$ e defina $\delta = \arctan(\frac{\alpha}{C})$. Para $\tau \neq 0$, tome $\lambda = \xi + i\tau$, com $-\dfrac{\alpha|\tau|}{C} \leqslant \xi \leqslant 0$. Dado $\alpha < \beta < 1$, existe $\sigma > 0$ tal que

$$-\frac{\beta|\tau|}{C} \leqslant \xi - \sigma \leqslant 0.$$

Definindo $\lambda_0 = \sigma + i\tau$ temos $\lambda_0 \in \rho(A)$ (pois $\mathrm{Re}\lambda_0 = \sigma > 0$) e

$$|\lambda_0 - \lambda| \|(\lambda_0 - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant (\sigma - \xi)\frac{C}{|\tau|} \leqslant \beta < 1.$$

De [3, Teorema 2.1.11] segue que $\lambda \in \rho(A)$ e que

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n (\lambda_0 - A)^{-n-1},$$

o que nos dá

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{|\tau|}\frac{1}{1-\beta}.$$

Mas

$$\frac{|\lambda|}{|\tau|} = \frac{\sqrt{\xi^2 + \tau^2}}{|\tau|} \leqslant \frac{\sqrt{\frac{\alpha^2\tau^2}{C^2} + \tau^2}}{|\tau|} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + C^2}}{C},$$

e assim, obtemos

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\frac{\sqrt{\alpha^2 + C^2}}{1-\beta}.$$

Como $\beta > \alpha$ é arbitrário, fazendo $\beta \longrightarrow \alpha^+$ temos

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{\sqrt{\alpha^2 + C^2}}{1-\alpha}\frac{1}{|\lambda|},$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $-\dfrac{\alpha|\mathrm{Im}\lambda|}{C} \leqslant \mathrm{Re}\lambda \leqslant 0$ e $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$.

Tomando $M = \max\{\sqrt{2}K, \frac{\sqrt{\alpha^2+C^2}}{1-\alpha}\}$ temos

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{|\lambda|},$$

para todo $\lambda \in \{z \in \mathbb{C} \colon |\arg(z)| \leqslant \frac{\pi}{2} + \delta\}$. Como $0 \in \rho(A)$ por hipótese, A satisfaz o item **(c)**.

Sabemos diretamente do Teorema 4.18 que **(c)** implica **(d)**.

Finalmente, mostremos que **(d)** implica **(a)**. Como $T(t)$ é diferenciável para $t > 0$, segue do Corolário 4.5 que $T^{(n)}(t) = [AT(t/n)]^n$ para todos $n \geqslant 1$ e $t > 0$. Logo

$$\|T^{(n)}(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \|AT(t/n)\|^n_{\mathcal{L}(X)} \quad \text{para } n \geqslant 1 \text{ e } t > 0.$$

Assim, usando que $n^n \leqslant n!e^n$, temos

$$\frac{1}{n!}\|T^{(n)}(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \left(\frac{Ce}{t}\right)^n.$$

Fixemos $0 < \alpha < 1$ e defina $\delta = \arctan(\frac{\alpha}{Ce})$. Para $\mathrm{Re} z > 0$ e $|\arg(z)| \leqslant \delta$, definindo $t_z = \mathrm{Re} z > 0$, temos

$$|z - t_z| = |\mathrm{Im} z| < \frac{\alpha t_z}{Ce}.$$

Assim, a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty}(z - t_z)^n \frac{T^{(n)}(t_z)}{n!}$$

é convergente em $\mathcal{L}(X)$, pois

$$\frac{1}{n!}\|(z - t_z)^n T^{(n)}(t_z)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \alpha^n.$$

Assim, para $z \in \overline{\Lambda_\delta} = \{z \in \mathbb{C} \colon |\arg(z)| \leqslant \delta\}$, definimos

$$T(z) = T(t_z) + \sum_{n=1}^{\infty}(z - t_z)^n \frac{T^{(n)}(t_z)}{n!}.$$

Claramente, $\Lambda_\delta \ni z \mapsto T(z) \in \mathcal{L}(X)$ está bem definida e é analítica, uma vez que a série do lado direito é uma série de potências que converge no disco $|w - t_z| \leqslant \frac{\alpha t_z}{Ce}$. Além disso, para $z \in \Lambda_\delta$ temos

$$\|T(z)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \|T(t_z)\|_{\mathcal{L}(X)} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \leqslant C_1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} =: C_2,$$

o que mostra que $\Lambda_\delta \ni z \mapsto T(z) \in \mathcal{L}(X)$ é uniformemente limitada e, portanto, o mesmo vale para qualquer subsetor $\overline{\Lambda_{\delta'}}$ com $0 < \delta' < \delta$.

Exercício 10. Mostre que $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ para $z_1, z_2 \in \Lambda_\delta$.

Dica: use a analiticidade de $T(z)$, e o fato de que $\{T(t) \colon t \geqslant 0\}$ é um semigrupo.

Nos resta mostrar que $\|T(z)x - x\|_X \to 0$ quando $z \to 0$ em Λ_δ. Para isso, primeiro veja que para $z_0 \in \Lambda_\delta$, temos $\|T(z) - T(z_0)\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0$ quando $z \to z_0$ em Λ_δ (pela analiticidade). Assim, para $t > 0$ fixado, quando $z \to 0$ em Λ_δ temos $z + t \to t$ em

Λ_δ, o que nos dá

$$\|T(z)T(t)x - T(t)x\|_X = \|T(z+t)x - T(t)x\|_X \leqslant \|T(z+t) - T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|x\|_X \to 0.$$

Deste modo, mostramos que $\|T(z)y - y\|_X \to 0$ quando $z \to 0$, para todo $y \in Y = \cup_{t>0} T(t)X$. Supomos por um momento que Y seja denso em X. Assim, dados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $y \in Y$ tal que $\|x - y\|_X < \frac{\varepsilon}{3C_2}$ e, para este y, existe $\eta > 0$ tal que se $z \in \Lambda_\delta$ satisfaz $0 < |z| < \eta$ temos $\|T(z)y - y\|_X < \frac{\varepsilon}{3}$. Assim,

$$\begin{aligned}\|T(z)x - x\|_X &\leqslant \|T(z)x - T(z)y\|_X + \|T(z)y - y\|_X + \|y - x\|_X \\ &\leqslant \|T(z)\|_{\mathcal{L}(X)}\|x - y\|_X + \|T(z)y - y\|_X + \|y - x\|_X < \varepsilon.\end{aligned}$$

Isso nos mostra que $T(z)x \to x$ quando $z \to 0$ em Λ_δ. Para concluir a demonstração, devemos mostrar que Y é denso em X. Veja que, como T é um C^0-semigrupo, dados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $t > 0$ tal que $\|T(t)x - x\|_X < \varepsilon$. Definido $y = T(t)x \in Y$, o resultado segue.

Capítulo

5

Teoremas de Perturbação de Geradores

5.1 Perturbação por operadores lineares limitados

Nesta seção estudamos que tipos de operadores podem ser adicionados a geradores infinitesimais de C^0-semigrupos de forma que o resultado ainda seja o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo. No que segue, usaremos a notação $\{e^{At} : t \geqslant 0\}$ para o C^0-semigrupo gerado pelo operador linear $A \colon D(A) \subset X \to X$.

Teorema 5.1. *Se X é um espaço de Banach, $\{e^{At} : t \geqslant 0\}$ é um C^0-semigrupo em X com gerador infinitesimal $A \colon D(A) \subset X \to X$ e $B \in \mathcal{L}(X)$, então $A + B \colon D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo $\{e^{(A+B)t} : t \geqslant 0\}$. Se $\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{\omega t}$ para todo $t \geqslant 0$, então*

$$\|e^{(A+B)t}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{(\omega+M\|B\|_{\mathcal{L}(X)})t} \quad t \geqslant 0.$$

Demonstração

De acordo com o Lema 2.2, podemos escolher uma norma $|\cdot|_X$ em X tal que

$$\|\cdot\|_X \leqslant |\cdot|_X \leqslant M\|\cdot\|_X \quad \text{e} \quad |(\lambda - A)^{-1}|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{1}{\lambda - \omega},$$

para $\lambda > \omega$. Se $\lambda > \omega + |B|_{\mathcal{L}(X)}$ então

$$|B(\lambda - A)^{-1}|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{|B|_{\mathcal{L}(X)}}{\lambda - \omega} < 1$$

e $I - B(\lambda - A)^{-1}$ é um isomorfismo em $\mathcal{L}(X)$. Logo

$$\lambda - A - B = [I - B(\lambda - A)^{-1}](\lambda - A),$$

e assim temos

$$|(\lambda - A - B)^{-1}|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{1}{\lambda - \omega} \frac{1}{1 - |B|_{\mathcal{L}(X)}/(\lambda - \omega)} = \frac{1}{\lambda - (\omega + |B|_{\mathcal{L}(X)})}.$$

Do Teorema de Hille-Yosida, $A+B$ gera um C^0-semigrupo $|e^{(A+B)t}|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant e^{(\omega+|B|)t}$ para $t \geqslant 0$. Retornando à norma original temos a estimativa desejada.

Agora estudaremos as relações entre o semigrupo $\{e^{At}\colon t \geqslant 0\}$ e o semigrupo $\{e^{(A+B)t}\colon t \geqslant 0\}$ quando $B \in \mathcal{L}(X)$. Para este fim consideramos o operador $H(s) = e^{A(t-s)}e^{(A+B)s}$. Para $x \in D(A) = D(A+B)$, $s \mapsto H(s)x$ é diferenciável e $H'(s)x = e^{A(t-s)}Be^{(A+B)s}x$. Integrando $H'(s)x$ de 0 até t obtemos

$$e^{(A+B)t}x = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}Be^{(A+B)s}xds, \quad x \in D(A).$$

Como os operadores em ambos os lados da expressão acima são limitados, ela vale para todo $x \in X$. O semigrupo $\{e^{(A+B)t}\colon t \geqslant 0\}$ é portanto a solução da equação integral acima. Para tal equação integral temos:

Proposição 5.2. *Seja $\{e^{At}\colon t \geqslant 0\}$ um C^0-semigrupo satisfazendo $\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{\omega t}$ e $B \in \mathcal{L}(X)$. Então existe uma única família $\{V(t)\colon t \geqslant 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ tal que $t \mapsto V(t)x$ é contínua em $[0,\infty)$ para todo $x \in X$ e*

$$V(t)x = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}BV(s)xds, \quad x \in X. \tag{5.1}$$

Demonstração

Defina $V_0(t) = e^{At}$ e $V_n(t)$, indutivamente, por

$$V_{n+1}(t)x = \int_0^t e^{A(t-s)}BV_n(s)xds, \text{ para } x \in X,\ n \in \mathbb{N}.$$

É claro da definição acima que $t \mapsto V_n(t)x$ é contínua para $x \in X$, $t \geqslant 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Provemos por indução que,

$$\|V_n(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{\omega t}\frac{M^n\|B\|^n_{\mathcal{L}(X)}t^n}{n!}.$$

Claramente isto é valido para $n = 0$, e suponhamos que vale para n. Então temos

$$\begin{aligned}\|V_{n+1}(t)x\|_X &\leqslant \int_0^t Me^{\omega(t-s)}\|B\|_{\mathcal{L}(X)}Me^{\omega s}\frac{M^n\|B\|^n_{\mathcal{L}(X)}s^n}{n!}\|x\|_X ds\\ &= Me^{\omega t}\frac{M^{n+1}\|B\|^{n+1}_{\mathcal{L}(X)}t^{n+1}}{(n+1)!}\|x\|_X\end{aligned}$$

e portanto a desigualdade vale para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Definindo $V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t)$, segue que a série converge uniformemente em intervalos limitados na topologia uniforme de operadores. Portanto $t \mapsto V(t)x$ é contínua para cada $x \in X$ e além disso (5.1) está satisfeita. Isto conclui a prova da existência. Para provar a unicidade seja $\{U(t)\colon t \geqslant 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ tal que $t \mapsto U(t)x$ é contínua para todo $x \in X$ e

$$U(t)x = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}BU(s)xds, \quad x \in X. \tag{5.2}$$

Subtraindo as expressões (5.1) e (5.2) e estimando as diferenças obtemos

$$\|V(t)x - U(t)x\|_X \leqslant \int_0^t Me^{\omega(t-s)}\|B\|_{\mathcal{L}(X)}\|V(s)x - U(s)x\|_X ds, \quad x \in X,$$

o que pela desigualdade de Gronwall implica que $\|V(t)x - U(t)x\|_X = 0$, $t \geqslant 0$ e portanto $V(t) = U(t)$.

Segue imediatamente do resultado anterior que

$$e^{(A+B)t} = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t),$$

e a convergência da série é na topologia de operadores uniformemente para t em intervalos limitados de $\mathbb{R}_+$. Para a diferença entre e^{At} e $e^{(A+B)t}$ temos:

Corolário 5.3. *Se A é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo $\{e^{At}\colon t \geqslant 0\}$ que satisfaz*

$\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{\omega t}$ e $B \in \mathcal{L}(X)$, então

$$\|e^{(A+B)t} - e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{\omega t}(e^{M\|B\|_{\mathcal{L}(X)}t} - 1).$$

5.2 Soma de geradores infinitesimais

O teorema desta seção mostra que, sob certas condições, a soma $A + B$ de dois geradores A e B de C^0-semigrupos que comutam resulta em um gerador de um C^0-semigrupo $\{e^{(A+B)t} : t \geqslant 0\}$ que satisfaz $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$. Para isto precisaremos do seguinte lema:

Lema 5.4. *Se A é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo $\{e^{At} : t \geqslant 0\}$ com $\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M$ para todo $t \geqslant 0$ então existe uma norma $\|\cdot\|_*$ em X com*

$$\|x\| \leqslant \|x\|_* \leqslant M\|x\| \quad \text{e} \quad \|e^{At}x\|_* \leqslant \|x\|_* \quad \text{para todo } x \in X.$$

Demonstração

Defina $\|x\|_* = \sup_{\tau \geqslant 0} \|e^{A\tau}x\|$. Claramente $\|\cdot\|_*$ é uma norma em X com $\|x\| \leqslant \|x\|_* \leqslant M\|x\|$. Além disso

$$\|e^{At}x\|_* = \sup_{\tau\geqslant 0} \|e^{A\tau}e^{At}x\| = \sup_{\tau\geqslant 0} \|e^{A(t+\tau)}x\| \leqslant \sup_{\tau\geqslant 0} \|e^{A\tau}x\| = \|x\|_*,$$

e a demonstração está completa.

Teorema 5.5. *Suponha que A e B são geradores de semigrupos fortemente contínuos de operadores $\{e^{At} : t \geqslant 0\}$ e $\{e^{Bt} : t \geqslant 0\}$ tais que, para algum $M > 0$, $\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M$ e $\|e^{Bt}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M$. Suponha também que $D(A) = D(B)$, A e B comutam, que o operador $A + B : D(A) \subset X \to X$ é fechado e que $\lambda \in \rho(A + B)$ para algum $\lambda > 0$. Então $A + B$ gera um C^0-semigrupo $\{e^{(A+B)t} : t \geqslant 0\}$ tal que $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ e $\|e^{(A+B)t}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M^2$.*

Demonstração

Por um momento vamos mudar a norma do espaço de Banach X de forma que A gera um C^0-semigrupo de contrações, usando a norma $\|\cdot\|_*$ dada no Lema 5.4. Sejam $A_\lambda = \lambda A(\lambda - A)^{-1}$ e $B_\lambda = \lambda B(\lambda - B)^{-1}$, como na demonstração do Teorema de Hille-Yosida. Então $\|e^{A_\lambda t}\|_{*,\mathcal{L}(X)} \leqslant 1$ para todo $\lambda > 0$ e como $e^{A_\lambda t}x \to e^{At}x$ e $e^{B_\lambda s}e \to e^{Bs}x$

para todo $x \in D(A) = D(B) = D(A+B)$ e $s, t \geqslant 0$ temos

$$\lim_{\lambda \to \infty} e^{A_\lambda t + B_\lambda s} x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{A_\lambda t} e^{B_\lambda s} x = e^{At} e^{Bs} x.$$

É claro que isto continua verdadeiro se mudamos a norma do espaço para a norma original. Ainda, por um argumento similar, temos

$$\lim_{\lambda \to \infty} e^{B_\lambda t + A_\lambda s} x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{B_\lambda s} e^{A_\lambda s} x = e^{Bs} e^{At} x,$$

mostrando que $e^{At} e^{Bs} x = e^{Bs} e^{At} x$, para todo $x \in D(A+B)$. Como $D(A+B)$ é denso em X e ambos os lados desta expressão são operadores limitados, segue que $e^{At} e^{Bs} = e^{Bs} e^{At}$ em X.

Em seguida vamos mostrar que $T(t) = e^{At} e^{Bt}$ é um semigrupo fortemente contínuo com gerador $A + B$. Primeiro observe que a continuidade forte em $t = 0$ e a limitação são óbvias e de

$$T(t+s) = e^{A(t+s)} e^{B(t+s)} = e^{At} e^{As} e^{Bt} e^{Bs} = e^{At} e^{Bt} e^{As} e^{Bs} = T(t) T(s)$$

temos $\{T(t) \colon t \geqslant 0\}$ um semigrupo. Resta mostrar que $A + B$ é o gerador de $T(t)$.

Se $x \in D(A) = D(B) = D(A+B)$, então

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{\lambda \to \infty} (e^{tA_\lambda} e^{tB_\lambda} x - x) = \lim_{\lambda \to \infty} (e^{A_\lambda t} e^{B_\lambda t} x - e^{B_\lambda t} x + e^{B_\lambda t} x - x) \\ &= \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^t e^{A_\lambda s} e^{B_\lambda t} (A_\lambda x) ds + \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^t e^{B_\lambda s} (B_\lambda x) ds \\ &= \int_0^t e^{As} e^{Bt} A x ds + \int_0^t e^{Bs} B x ds. \end{aligned}$$

Agora

$$\frac{1}{t}(T(t)x - x) = \frac{1}{t} \int_0^t e^{As} e^{Bt} A x ds + \frac{1}{t} \int_0^t e^{Bs} B x ds \xrightarrow{t \to 0^+} (A+B)x,$$

para todo $x \in D(A+B)$. Portanto o gerador C de $\{T(t) \colon t \geqslant 0\}$ deve ser uma extensão de $A + B$. Da hipótese, existe $\lambda > 0$ no resolvente de $A + B$, e como $(0, \infty)$ está no resolvente do gerador infinitesimal C de $T(t)$, temos

$$(\lambda - C)D(C) = X = (\lambda - (A+B))D(A+B) = (\lambda - C)D(A+B),$$

e $A+B = C$ completando a demonstração.

Corolário 5.6. *Suponha que A e B são geradores de C^0-semigrupos $\{e^{At} : t \geqslant 0\}$ e $\{e^{Bt} : t \geqslant 0\}$, respectivamente, tais que, para algum $M > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{\alpha t}$ e $\|e^{Bt}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{\beta t}$. Suponha também que $D(A) = D(B)$, que A e B comutam, que o operador $A+B$ é fechado, e que $\lambda \in \rho(A+B)$ para algum $\lambda > 0$. Então $A+B$ gera um C^0-semigrupo $\{e^{(A+B)t} : t \geqslant 0\}$ tal que $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ e que $\|e^{(A+B)t}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M^2 e^{(\alpha+\beta)t}$.*

Demonstração

Basta aplicar o Teorema 5.5 aos operadores $A - \alpha I$ e $B - \beta I$.

5.3 Perturbação de geradores infinitesimais de semigrupos analíticos

Teorema 5.7. *Sejam $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador linear densamente definidos e constantes $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, $\omega \in \mathbb{R}$ e $M > 0$ tais que*

$$\rho(A) \supset \Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\arg(\lambda - \omega)| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup \{\omega\},$$

e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{|\lambda - \omega|}, \text{ para todo } \lambda \in \Sigma, \lambda \neq \omega.$$

Então sabemos que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico. Seja também $B\colon D(B) \subset X \to X$, $D(B) \supset D(A)$, um operador linear fechado tal que

$$\|Bx\|_X \leqslant \varepsilon \|Ax\|_X + K\|x\|_X, \text{ para todo } x \in D(A),$$

para algumas constantes $K, \varepsilon \geqslant 0$ com $\varepsilon(M+1) < 1$. Então $A+B$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico.

Demonstração

Escolha θ tal que $\varepsilon(M+1) < \theta < 1$. Para $\lambda \in \Sigma \setminus \{\omega\}$, temos $B(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ pelo Teorema do Gráfico Fechado, e para $|\lambda - \omega| \geqslant R > 0$ obtemos

$$\begin{aligned}\|B(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} &\leqslant \varepsilon\|A(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} + K\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leqslant \varepsilon\Big(1 + \frac{M|\lambda|}{|\lambda - \omega|}\Big) + \frac{KM}{|\lambda - \omega|} \leqslant \varepsilon\Big(1 + M + \frac{M|\omega|}{R}\Big) + \frac{KM}{R}.\end{aligned}$$

Fazendo R suficientemente grande, obtemos $\|B(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \theta < 1$. Assim, se $\lambda \in \Sigma \setminus \{\omega\}$ é tal que $|\lambda - \omega| \geqslant R$ obtemos $\lambda \in \rho(A+B)$ e

$$\|(\lambda - (A+B))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{(1-\theta)|\lambda - \omega|}.$$

Disto, é simples obter que $A+B$ é o gerador de um semigrupo analítico, usando o Teorema 4.18.

5.4 Perturbação de geradores infinitesimais de semigrupos de contração

Definição 5.8. Um operador dissipativo $A\colon D(A) \subset X \to X$ é dito **m-dissipativo** se $\mathrm{Im}(I - A) = X$.

Claramente, se A é m-dissipativo, então μA também é, para qualquer $\mu > 0$ e portanto se A é m-dissipatvo temos $\mathrm{Im}(\lambda - A) = X$ para todo $\lambda > 0$. Em termos de operadores m-dissipativos, o Teorema de Lumer-Philips pode ser rescrito da forma: Um operador densamente definido A é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações se, e somente se, A é m-dissipativo.

O resultado principal dessa seção é o seguinte teorema de perturbação para operadores m-dissipativos.

Teorema 5.9. *Sejam A e B operadores lineares em X tais que $D(A) \subset D(B)$ e $A + tB$ é dissipativo para $t \in [0,1]$. Se*

$$\|Bx\|_X \leqslant \alpha\|Ax\|_X + \beta\|x\|_X, \ \textit{para } x \in D(A),$$

onde $0 \leqslant \alpha < 1$, $\beta \geqslant 0$ *e para algum* $t_0 \in [0,1]$, $A + t_0 B$ *é m-dissipativo então* $A + tB$ *é m-dissipativo para todo* $t \in [0,1]$.

Demonstração

Mostremos que existe $\delta > 0$ tal que se $A+t_0B$ é $m-$dissipativo, $A+tB$ é $m-$dissipativo para todo $t \in [0,1]$ satisfazendo $|t - t_0| \leqslant \delta$. Como qualquer ponto em $[0,1]$ pode ser alcançado de qualquer outro ponto por um número finito de passos de tamanho δ, isso implica o resultado.

Assuma que para algum $t_0 \in [0,1]$, $A + t_0B$ é $m-$dissipativo, o que implica que $I-(A+t_0B)$ é inversível. Denotemos $R(t_0) = (I-(A+t_0B))^{-1}$ e temos $\|R(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 1$. Mostremos que o operador $BR(t_0)$ é um operador linear limitado.

Da nossa hipótese e da desigualdade triangular, temos para $x \in D(A)$ que

$$\begin{aligned} \|Bx\|_X &\leqslant \alpha\|(A+t_0B)x\|_X + \alpha t_0\|Bx\|_X + \beta\|x\|_X \\ &\leqslant \alpha\|(A+t_0B)x\|_X + \alpha\|Bx\|_X + \beta\|x\|_X, \end{aligned}$$

e portanto

$$\|Bx\|_X \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha}\|(A+t_0B)x\|_X + \frac{\beta}{1-\alpha}\|x\|_X.$$

Como $R(t_0)\colon X \to D(A)$ e $(A+t_0B)R(t_0) = R(t_0)-I$, segue da desigualdade acima que

$$\|BR(t_0)x\|_X \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha}\|(R(t_0)-I)x\|_X + \frac{\beta}{1-\alpha}\|R(t_0)x\|_X \leqslant \frac{2\alpha+\beta}{1-\alpha}\|x\|_X,$$

para todo $x \in X$, e portanto $BR(t_0)$ é limitado. Para mostrar que $A+tB$ é $m-$dissipativo, mostremos que $I - (A+tB)$ é inversível e portanto sua imagem é todo X. Temos

$$\begin{aligned} I - (A+tB) &= I - (A+t_0B) + (t_0 - t)B \\ &= (I + (t_0-t)BR(t_0))(I - (A+t_0B)). \end{aligned}$$

Portanto $I-(A+t_0B)$ é inversível se, e somente se, $I+(t_0-t)BR(t_0)$ é inversível. Mas $I + (t_0 - t)BR(t_0)$ para todo t satisfazendo $|t-t_0|\|BR(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant |t-t_0|\frac{2\alpha+\beta}{1-\alpha} < 1$ e portanto podemos escolher $\delta = \frac{1-\alpha}{4\alpha+2\beta}$ para concluir a demonstração.

O Teorema 5.9 é comumente usado através do seguinte simples corolário.

Corolário 5.10. *Seja A o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações. Seja B um operador dissipativo, satisfazendo $D(A) \subset D(B)$ e*

$$\|Bx\|_X \leqslant \alpha\|Ax\|_X + \beta\|x\|_X, \text{ para } x \in D(A),$$

onde $0 \leqslant \alpha < 1$ e $\beta \geqslant 0$. Então $A + B$ é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações.

Demonstração

Pelo Teorema de Lumer-Philips, $\overline{D(A)} = X$ e A é $m-$dissipativo. Portanto $A + tB$ é dissipativo para todo $t \in [0, 1]$. De fato, $\text{Re}\langle Ax, x^*\rangle \leqslant 0$, para todo $x^* \in J(x)$, e como B é dissipativo com $D(A) \subset D(B)$, então para cara $x \in D(A)$ existe um $x^* \in J(x)$ tal que $\text{Re}\langle Bx, x^*\rangle \leqslant 0$ e para este mesmo x^*, $\text{Re}\langle Ax + tBx, x^*\rangle \leqslant 0$.

Pelo Teorema 5.9 segue que $A + tB$ é $m-$dissipativo para todo $t \in [0, 1]$ e em particular $A + B$ é $m-$dissipativo. Como $D(A + B) = D(A)$ é denso em X, $A + B$ é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações pelo Teorema de Lumer-Philips.

O Teorema 5.9 e o Corolário 5.10 são falsos, em geral, se $\alpha = 1$. Uma das razões para isto é que neste caso, o operador $A + B$ não é necessariamente fechado. Se $A + B$ não é fechado, ele não pode ser o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo. Um simples exemplo desta situação é quando iA é um operador autoadjunto em um espaço de Hilbert. Se iA é autoadjunto, então A e $-A$ são geradores infinitesimais de um C^0-semigrupo de contrações. Tomando $B = -A$ no Teorema 5.9 temos a estimativa com $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, mas $A + B = 0$ restrito a $D(A)$ não é fechado. Entretanto o fecho de $A+B$, isto é, o operador nulo no espaço todo, é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações. Nosso próximo teorema mostra sobre certas hipóteses, que esse é sempre o caso.

Teorema 5.11. *Seja A o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações. Seja B um operador dissipativo tal que $D(A) \subset D(B)$ e*

$$\|Bx\|_X \leqslant \|Ax\|_X + \beta\|x\|_X, \text{ para todo } x \in D(A),$$

onde $\beta \geqslant 0$ é uma constante. Se B^*, o adjunto de B, está densamente definido então o fecho $\overline{A + B}$ de $A + B$ é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupos de contrações.

Demonstração

Temos $A+B$ dissipativo e densamente definido já que A é $m-$dissipativo e B é dissipativo com $D(A) \subset D(B)$. Portanto, de [3, Teorema 2.5.6], o operador $A+B$ é fechável e seu fecho $\overline{A+B}$ é dissipativo. Para provar que $\overline{A+B}$ é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações é suficiente mostrar que $\operatorname{Im}(I-\overline{A+B}) = X$. Como $\overline{A+B}$ é dissipativo e fechado segue de [3, Lema 2.5.6] que $\operatorname{Im}(I-\overline{A+B})$ é fechada e portanto é suficiente mostrar que $\operatorname{Im}(I-\overline{A+B})$ é densa em X.

Seja $y^* \in X^*$ tal que $\langle z, y^*\rangle = 0$ para todo $z \in \operatorname{Im}(I-\overline{A+B})$. Seja $y \in X$ tal que $\|y^*\|_{X^*} \leqslant \langle y, y^*\rangle$. Do Corolário 5.10, aplicado para tB, segue que $A+tB$ é $m-$dissipativo para $0 \leqslant t < 1$ e portanto a equação

$$x - Ax - tBx = y$$

tem uma única solução x_t para todo $0 \leqslant t < 1$. Mais ainda, como $A+tB$ é dissipativo $\|x_t\|_X \leqslant \|y\|_X$. Da nossa hipótese, temos

$$\begin{aligned}\|Bx_t\|_X &\leqslant \|Ax_t\|_X + \beta\|x_t\|_X \leqslant \|(A+tB)x_t\|_X + t\|Bx_t\|_X + \beta\|x_t\|_X \\ &\leqslant \|y - x_t\|_X + t\|Bx_t\|_X + \beta\|x_t\|_X\end{aligned}$$

e portanto

$$(1-t)\|Bx_t\|_X \leqslant \|y - x_t\|_X + \beta\|x_t\|_X \leqslant (2+\beta)\|y\|_X. \tag{5.3}$$

Seja $z^* \in D(B^*)$ então

$$\begin{aligned}|\langle (1-t)Bx_t, z^*\rangle| &= (1-t)|\langle x_t, B^*z^*\rangle| \\ &\leqslant (1-t)\|B^*z^*\|_X\|y\|_X \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

quando $t \longrightarrow 1$. Como $D(B^*)$ é denso em X e por (5.3), $(1-t)Bx_t$ é uniformemente limitada, segue que $(1-t)Bx_t$ tende fracamente a zero quando $t \longrightarrow 1$. A nossa escolha particular de y^* temos

$$\begin{aligned}\|y^*\|_{X^*} &\leqslant \langle y, y^*\rangle = \langle x_t - Ax_t - tBx_t, y^*\rangle \\ &= \langle (1-t)Bx_t, y^*\rangle \longrightarrow 0, \text{ quando } t \longrightarrow 1,\end{aligned}$$

o que implica $y^* = 0$ e portanto a imagem de $I - \overline{A+B}$ é densa em X.

Sejam X um espaço de Banach reflexivo e A um operador fechável densamente definido em X. Sabemos então que A^* está densamente definido e $D(A^*)$ é denso em X^*. Assim, para espaço de Banach reflexivos, temos:

Corolário 5.12. *Sejam X um espaço de Banach reflexivo e A o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações em X. Seja B um operador dissipativo tal que $D(A) \subset D(B)$ e*

$$\|Bx\|_X \leqslant \|Ax\|_X + \beta\|x\|_X, \text{ para todo } x \in D(A),$$

onde $\beta \geqslant 0$. Então $\overline{A+B}$, o fecho de $A+B$, é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações em X.

Capítulo 6

O Problema de Cauchy Abstrato

6.1 O problema de valor inicial homogêneo

Nesta seção estudaremos o problema linear de valor inicial, ou **problema de Cauchy homogêneo** (ou **linear**), dado por

$$\text{(CH)} \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au, \ \text{para } t > 0 \\ u(0) = u_0 \in X, \end{cases}$$

onde $A\colon D(A) \subset X \to X$ é um operador linear num espaço de Banach X.

Definição 6.1. Dizemos que uma função $u\colon [0,\infty) \to X$ é uma **solução forte** (ou **solução clássica**) de (CH) se u é contínua, continuamente diferenciável em $(0,\infty)$, com $u(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$ e u satisfaz (CH), isto é, $u(0) = u_0$ e

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t) \qquad \text{para todo } t > 0.$$

Observação 6.2. *Lembre-se que para um espaço de Banach X e $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado densamente definido com $\rho(A) \neq \emptyset$, temos $Y_1 = (D(A), \|\cdot\|_1)$ um espaço de Banach, onde $\|x\|_1 = \|x\|_X + \|Ax\|_X$ para cada $x \in D(A)$ (deduza isso argumentando como no Exercício 3).*

Teorema 6.3. *Assuma que $A\colon D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo $\{e^{At}\colon t \geqslant 0\}$ em X.*

(i) *Para cada $u_0 \in D(A)$, o problema (CH) possui uma única solução forte u. Essa solução satisfaz $u \in C([0,\infty), Y_1) \cap C^1([0,\infty), X)$.*

(ii) *As soluções fortes dependem continuamente dos dados iniciais em $D(A)$, isto é, se $\{u_0^n\} \subset D(A)$ é tal que $\|u_0^n - u_0\|_X \to 0$ quando $n \to \infty$ para algum $u_0 \in D(A)$, u_n é a solução forte de (CH) com dado inicial u_0^n e u é a solução forte de (CH) com dado inicial u_0, então para cada $T > 0$ temos*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t) - u(t)\|_X \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Se, além disso, $\|u_0^n - u_0\|_1 \to 0$ quando $n \to \infty$, então para cada $T > 0$ temos

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t) - u(t)\|_1 \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Demonstração

(i) Se $u_0 \in D(A)$ então sabemos que

$$[0,\infty) \ni t \mapsto u(t) = e^{At}u_0 \in C([0,\infty), Y_1) \cap C^1([0,\infty), X),$$

pelo Teorema 1.9 e pela Observação 1.12. Além disso, u satisfaz (CH) e portanto u é uma solução forte. Para provar a unicidade, assuma que u_1 é uma outra solução forte de (CH). Fixe $t > 0$ e defina a função $\psi\colon [0,t] \to X$ por

$$\psi(s) = e^{A(t-s)}u_1(s).$$

Temos ψ contínua em $[0,t]$ e continuamente diferenciável em $(0,t)$, com

$$\frac{d}{ds}\psi(s) = -Ae^{A(t-s)}u_1(s) + e^{A(t-s)}Au_1(s) = 0, \text{ para todo } s \in (0,t).$$

Logo, ψ é constante em $[0,t]$ e, portanto,

$$u(t) = e^{At}u_0 = \psi(0) = \psi(t) = u_1(t),$$

o que mostra a unicidade e conclui o item (i).

(ii) Note que para $T > 0$ fixado temos $K = \sup_{t\in[0,T]} \|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$ e, do item (i), segue que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t) - u(t)\|_X = \sup_{t\in[0,T]} \|e^{At}(u_0^n - u_0)\|_X \leqslant K\|u_0^n - u_0\|_X.$$

Analogamente, veja que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t) - u(t)\|_1 \leqslant K\|u_0^n - u_0\|_1,$$

o que conclui a demonstração.

Teorema 6.4. *Assuma que $A\colon D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo diferenciável $\{e^{At}\colon t \geqslant 0\}$ em X. Então para cada $u_0 \in X$, a função $u(t) = e^{At}u_0$, $t \geqslant 0$, é a única solução forte de* (CH)*. Além disso, as soluções dependem continuamente dos dados iniciais em X, isto é, se $u_0^n \to u_0$ em X, u_n é a solução forte com dado inicial em u_0^n e u é a solução forte com dado inicial em u_0, então para cada $T > 0$ temos*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t) - u(t)\|_X \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Demonstração

Sabemos que u é contínua, $u(0) = u_0$, e que $u(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$. Do Teorema 4.4 sabemos que u é continuamente diferenciável em $(0, \infty)$, e que $\frac{du}{dt}(t) = Au(t)$ para todo $t > 0$. Portanto, u é uma solução forte de (CH). A unicidade e a dependência contínua dos dados iniciais em X se provam exatamente como no Teorema 6.3, e a demonstração está completa.

6.2 Aplicações

Nesta seção resolveremos algumas EDP's lineares, usando as técnicas desenvolvidas nos capítulos anteriores.

6.2.1 Equação da onda unidimensional

Nesta subseção estudaremos a equação da onda unidimensional com condições iniciais, e com condições de fronteira de Dirichlet nulas, dada por

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < 1 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x), & 0 < x < 1 \\ u_t(0,x) = u_1(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Formulação abstrata do problema.

Defina $v = u_t$. Assim, temos $v_t = u_{tt} = u_{xx}$ e podemos escrever

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ u_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \partial_{xx} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Usando a notação $z = \left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right]$, $z_0 = \left[\begin{smallmatrix} u_0 \\ u_1 \end{smallmatrix}\right]$ e $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \partial_{xx} & 0 \end{smallmatrix}\right]$ temos

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = Az, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \tag{6.1}$$

onde nos falta escolher o espaço de Banach X e o domínio $D(A)$ do operador A adequados para trabalharmos, e garantir que A gere um C^0-semigrupo em X. Uma das maneiras de escolhermos estes espaços adequadamente é olhar para a **energia** do sistema, e para isto, multiplicando formalmente a equação acima por $v = u_t$ e integrando no intervalo $[0,1]$ (isto é, tomando o produto interno da equação com u_t em $L^2(0,1)$) temos

$$\int_0^1 u_{tt}u_t dx = \int_0^1 u_{xx}u_t dx,$$

o que nos dá (assumindo as diferenciabilidades adequadas) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2_{L^2(0,1)} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 |v|^2 dx = \overbrace{vu_x\Big|_0^1}^{=0} - \int_0^1 u_x v_x dx \\ &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 |u_x|^2 dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_x u\|^2_{L^2(0,1)}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Definindo assim $E(t) = \frac{1}{2}(\|\partial_x u\|^2_{L^2(0,1)} + \|v\|^2_{L^2(0,1)})$ temos $\frac{d}{dt}E(t) = 0$, o que nos dá que $E(t) = E(0)$ para todo $t \geqslant 0$ (desde que a solução esteja definida até t) que

$$E(t) = \frac{1}{2}(\|\partial_x u(0)\|^2_{L^2(0,1)} + \|v(0)\|^2_{L^2(0,1)}) = \frac{1}{2}(\|\partial_x u_0\|^2_{L^2(0,1)} + \|u_1\|^2_{L^2(0,1)}),$$

e isto nos indica que o espaço X adequado para trabalharmos é $X = H^1_0(0,1) \times L^2(0,1)$, com norma

$$\|\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right]\|^2_X = \|\partial_x u\|^2_{L^2(0,1)} + \|v\|^2_{L^2(0,1)},$$

que é um espaço de Hilbert (verifique).

Agora, para escolher $D(A)$, lembre-se que devemos escolhê-lo de forma que A seja um operador fechado, densamente definido. Olhando para (6.2), vemos que as diferenciabilidades (fracas) que usamos para realizar adequadamente todas os passos foram: v deve ter v_x bem definida, isto é $v \in H^1_0(0,1)$, e além disso, devemos ser capazes de integrar $u_{xx}u_t$, e como $u_t = v \in L^2(0,1)$, é suficiente que $u_{xx} \in L^2(0,1)$. Assim devemos ter

$$A\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} v \\ u_{xx} \end{smallmatrix}\right] \in X,$$

e portanto escolhemos

$$D(A) = \{\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] \in X \colon A\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] \in X\}.$$

Vamos agora dar uma caracterização explícita de $D(A)$. Para isto, seja $\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] \in D(A)$. Como u_{xx} existe e está em $L^2(0,1)$, segue que $u \in H^2(0,1) \cap H^1_0(0,1)$. Além disso, $v \in H^1_0(0,1)$ e portanto

$$D(A) \subset [H^2(0,1) \cap H^1_0(0,1)] \times H^1_0(0,1).$$

Reciprocamente, é simples ver que $D(A) \supset [H^2(0,1) \cap H^1_0(0,1)] \times H^1_0(0,1)$, e portanto

$$D(A) = [H^2(0,1) \cap H^1_0(0,1)] \times H^1_0(0,1).$$

Ainda, como $C^\infty_0(0,1) \subset H^2(0,1) \cap H^1_0(0,1)$ e $\overline{C^\infty_0(0,1)}^{H^1_0(0,1)} = H^1_0(0,1)$, segue que

$$\overline{H^2(0,1) \cap H^1_0(0,1)}^{H^1_0(0,1)} = H^1_0(0,1).$$

Analogamente, $C^\infty_0(0,1) \subset H^1_0(0,1)$ e $\overline{C^\infty_0(0,1)}^{L^2(0,1)} = L^2(0,1)$, logo

$$\overline{H^1_0(0,1)}^{L^2(0,1)} = H^1_0(0,1).$$

Consequentemente, mostramos que $\overline{D(A)}^X = X$, isto é, A é densamente definido.

Exercício 3. Mostre que $A\colon D(A) \subset X \to X$ é um operador fechado.

Geração de semigrupo.

Mostremos primeiramente que A é um operador dissipativo. Se $\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] \in D(A)$ temos

$$\langle A \left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right]\rangle_X = \langle \left[\begin{smallmatrix} v \\ u_{xx} \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right]\rangle_X = \int_0^1 v_x u_x dx + \int_0^1 u_{xx} v dx = 0.$$

Mostremos ainda que A é m-dissipativo; isto é, $\mathrm{Im}(I - A) = X$, isto é, dado $\left[\begin{smallmatrix} f \\ g \end{smallmatrix}\right] \in X$, existe $\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] \in D(A)$ tal que $(I - A)\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} f \\ g \end{smallmatrix}\right]$. Tal $\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] \in D(A)$ existe se, e somente se, existe $\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] \in D(A)$ tal que $\left[\begin{smallmatrix} u-v \\ v-u_{xx} \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} f \\ g \end{smallmatrix}\right]$.

A formulação variacional para a equação $u - u_{xx} = f + g$ é dada por

$$\int_0^1 u\varphi dx + \int_0^1 u_x \varphi_x dx = \int_0^1 (f+g)\varphi dx, \text{ para toda } \varphi \in H_0^1(0,1).$$

Em $H = H_0^1(0,1)$ definimos a forma bilinear $a\colon H \times H \to \mathbb{R}$, dada por

$$a(u,\varphi) = \int_0^1 u\varphi dx + \int_0^1 u_x\varphi_x dx = \langle u,\varphi\rangle_{L^2(0,1)} + \langle u,\varphi\rangle_{H_0^1(0,1)},$$

e mostremos que a é contínua e coerciva. De fato, temos

$$\begin{aligned} |a(u,\varphi)| &\leqslant \|u\|_{L^2(0,1)}\|\varphi\|_{L^2(0,1)} + \|u\|_{H_0^1(0,1)}\|\varphi\|_{H_0^1(0,1)} \\ &\leqslant 2\|u\|_{H_0^1(0,1)}\|\varphi\|_{H_0^1(0,1)}, \end{aligned}$$

onde para a última desigualdade utilizamos a *desigualdade de Poincaré em* $(0,1)$[1]. Portanto a é contínua. Além disso

$$|a(u,u)| = \langle u,u\rangle_{L^2(0,1)} + \langle u,u\rangle_{H_0^1(0,1)} \geqslant \langle u,u\rangle_{H_0^1(0,1)},$$

portanto a é coerciva. Defina o funcional linear contínuo (verifique) $\xi \in H^*$ por

$$\langle \varphi, \xi\rangle = \int_0^1 (f+g)\varphi dx.$$

[1] $\|u\|_{L^2(0,1)} \leqslant \|u\|_{H_0^1(0,1)}$, para toda $u \in H_0^1(0,1)$. Verifique este fato.

Assim, do Teorema de Lax-Milgram, existe um único $u \in H$ tal que

$$a(u,\varphi) = \xi(\varphi), \text{ para todo } \varphi \in H,$$

ou seja, existe um único $u \in H$ tal que

$$\int_0^1 u\varphi dx + \int_0^1 u_x\varphi_x dx = \int_0^1 (f+g)\varphi dx, \text{ para toda } \varphi \in H_0^1(0,1),$$

o que implica que u_{xx} está bem definida e $u - u_{xx} = f + g$ em $L^2(0,1)$. Portanto $u \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$. Definindo $v = u - f \in H_0^1(0,1)$ concluímos a prova de que $\operatorname{Im}(I - A) = X$. Segue então do Teorema de Lumer-Phillips que A é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações $\{e^{At} : t \geqslant 0\}$.

Do Teorema 6.3 seque que para cada $z_0 \in D(A)$, existe uma única solução

$$z \in C([0,\infty), Y_1) \cap C^1([0,\infty), X)$$

de (6.1). Podemos ainda facilmente ver que, se $z = \left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right]$ então

$$u \in C([0,\infty), H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)) \cap C^1([0,\infty), H_0^1(0,1)) \cap C^2([0,\infty), L^2(0,1)),$$

onde usamos que a norma de $Y_1 = (D(A), \|\cdot\|_1)$ é equivalente à norma de $[H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)] \times H_0^1(0,1)$.

6.2.2 Equação da onda dissipativa

Agora estudaremos a seguinte equação de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)u_t = 0, & x \in \Omega,\ t > 0 \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \Omega \\ u_t(0,x) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto, limitado e com $\partial\Omega$ suave, e $a \in L^\infty(\Omega)$ com $a(x) \geqslant 0$ para $x \in \Omega$.

Formulação abstrata.

Novamente, façamos $v = u_t$, $z = \left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right]$, $z_0 = \left[\begin{smallmatrix} u_0 \\ u_1 \end{smallmatrix}\right]$, e a equação acima se torna

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = Az, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \tag{6.3}$$

onde $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & I \\ \Delta & -a(x) \end{smallmatrix}\right]$.

Exercício 11. Como na equação da onda unidimensional, multiplique a equação por u_t, assumindo as regularidades necessárias (diga quais são), e integrando o resultado em Ω, mostre que se

$$E(t) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |v|^2 dx\right\},$$

então

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_\Omega a(x)|v|^2 dx,$$

e portanto

$$E(t) + \int_0^t \int_\Omega a(x)|v|^2 dx = E(0).$$

Com o exercício acima, podemos definir novamente $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ com produto interno

$$\langle \left[\begin{smallmatrix} w_1 \\ w_2 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \end{smallmatrix}\right] \rangle_X = \langle w_1, \tilde{w}_1 \rangle_{H_0^1(\Omega)} + \langle w_2, \tilde{w}_2 \rangle_{L^2(\Omega)},$$

e além disso definimos, como anteriormente

$$D(A) = \{\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] \in X : A\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] \in X\}.$$

Geração de semigrupo.

Exercício 12. Mostre que:

1. $D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$.
2. A é densamente definido e fechado.
3. A é dissipativo.
4. $\mathrm{Im}(I - A) = X$.

Pelo Teorema de Lumer-Philips, A é o gerador de um C^0-semigrupo de contrações, e pelo Teorema 6.3, dado $z_0 \in D(A)$, existe uma única solução clássica z de (6.3) a e

$$z \in C([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), X),$$

e se $z = \left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right]$ então

$$u \in C([0,\infty), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty), H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,\infty), L^2(\Omega)).$$

Observação 6.5. *Para obtermos soluções mais regulares, p.e. $u \in C^3([0,\infty), L^2(\Omega))$, basta considerarmos dados iniciais em $D(A^2)$.*

6.2.3 Equação de placas

Considere a equação

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \\ u_t(0,x) = u_1(x). \end{cases}$$

Formulação abstrata.

Como anteriormente, para $v = u_t$, $z = \left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right]$, $z_0 = \left[\begin{smallmatrix} u_0 \\ u_1 \end{smallmatrix}\right]$ e $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & I \\ -\Delta^2 - I & 0 \end{smallmatrix}\right]$ o problema se torna

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = Az, \\ z(0) = z_0. \end{cases} \tag{6.4}$$

Encontremos uma energia adequada para esta equação, de modo a encontrar o espaço X e o domínio $D(A)$ do operador. Multiplicando a equação por u_t e integrando em $\mathbb{R}^n$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} u_{tt}u_t dx + \int_{\mathbb{R}^n} \Delta^2 u u_t dx + \int_{\mathbb{R}^n} u u_t dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u_{tt}u_t dx + \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \Delta u_t dx + \int_{\mathbb{R}^n} u u_t dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} (|v|^2 + |\Delta u|^2 + |u|^2) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u\|_{L^2}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u\|_{H^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2),$$

o que nos leva a escolher $X = H^2 \times L^2$ com a o produto interno adequado à norma que aparece na última igualdade da expressão acima. Ainda, para o cálculo desta integral, precisamos que $\Delta^2 u \in L^2$; isto é, $u \in H^4$ e além disso necessitamos que $v = u_t \in H^2$. Assim, escolhemos

$$D(A) = H^4 \times H^2 \; (= \{[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}] \in X : A[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}] \in X\}).$$

Exercício 4. Mostre que:

1. A é densamente definido e fechado.
2. A é dissipativo.
3. $\mathrm{Im}(I - A) = X$

   (Dica: use o seguinte fato de regularidade de soluções elípticas: se $\Delta^2\varphi \in L^2$, então $\varphi \in H^4$).

Pelo Teorema de Lumer-Philips, A é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações. Ainda, do Teorema 6.3, concluímos que para cada $z_0 \in D(A)$ existe uma única solução clássica z de (6.4) e

$$z \in C([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), X)).$$

Se $z = [\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}]$, então

$$u \in C([0,\infty), H^4) \cap C^1([0,\infty), H^2) \cap C^2([0,\infty), L^2).$$

6.2.4 Equação de Schrödinger (parte 1)

Vamos estudar nesta subseção e seguinte equação

$$\begin{cases} u_t - i\Delta u = 0, \; x \in \mathbb{R}^n, \; t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases}$$

Para o espaço de energia, multiplicamos a equação por $\overline{u}$ e integramos em $\mathbb{R}^n$ para encontrar

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_t \overline{u} dx - i \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \overline{u} dx = 0.$$

Tomando a parte real, encontramos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 = 0,$$

e integrando em $(0,t)$, obtemos

$$\|u\|_{L^2}^2 = \|u_0\|_{L^2}.$$

Assim, escolhemos $X = L^2$, e para $A = i\Delta$ temos

$$D(A) = \{u \in X\colon Au \in X\} = H^2.$$

Assim A é fechado e densamente definido. Mostremos que $-iA = \Delta$ é autoadjunto, donde seguirá que iA é autoadjunto. De fato, Δ é simétrico por para $u, v \in H^2$, temos

$$\langle \Delta u, v\rangle_{L^2} = \int_\Omega \Delta u\overline{v}dx = \int_\Omega u\overline{\Delta v}dx = \langle u, \Delta v\rangle_{L^2}.$$

Agora, mostremos que $1 \in \rho(\Delta)$ e que $\operatorname{Im}(I-\Delta) = L^2$, o que mostra que Δ é autoadjunto. Notemos que Δ é dissipativo, pois

$$\langle \Delta u, u\rangle_{L^2} = -\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \leqslant 0,$$

para todo $u \in H^2$. Assim $\|u\|_{L^2} \leqslant \|(I-\Delta)u\|_{L^2}$, para todo $u \in H^2$, e mostra que $(I-\Delta)$ é injetivo. Assim $(I-\Delta)^{-1}\colon \operatorname{Im}(I-\Delta) \to L^2$ está bem definido e

$$\|(I-\Delta)^{-1}v\|_{L^2} \leqslant \|v\|_{L^2}.$$

Resta-nos mostrar que $\operatorname{Im}(I-\Delta) = L^2$. Para isto, note que do Teorema da Representação de Riesz, para cada $f \in L^2$, existe um único $u \in H^1$ tal que, se $\xi \in (H^1)^*$ é dado por $\xi(\varphi) = \langle \varphi, f\rangle_{L^2}$, então

$$\xi(\varphi) = \langle \varphi, u\rangle_{H^1},$$

isto é

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\overline{\varphi}dx = \int_{\mathbb{R}^n} u\overline{\varphi}dx + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u\overline{\nabla\varphi}dx \quad \text{para toda } \varphi \in H^1,$$

o que nos dá $u \in H^2$ e $(I-\Delta)u = f$ em L^2.

Segue do Teorema de Stone que A gera um C^0-grupo unitário em L^2. Ainda, para cada $u_0 \in D(A)$, existe uma única solução clássica u da equação de Schödinger, que está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e além disso

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

6.2.5 Equação de Schrödinger (parte 2)

Nesta subseção estudaremos uma perturbação limitada da equação de Shrödinger que estudamos na parte 1, dada por

$$\begin{cases} u_t - i\Delta u = (\alpha + i\beta)u, \ x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases}$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \leqslant 0$ estão fixados. Sabemos da Parte 1 acima que $A = i\Delta$ é o gerador infinitesimal de um C^0-grupo unitário. Além disso, se definirmos o operador linear limitado $B\colon L^2 \to L^2$ dado por $Bu = (\alpha + i\beta)u$, temos

$$\mathrm{Re}\langle Bu, u\rangle_{L^2} = \mathrm{Re}\big((\alpha + i\beta)\|u\|_{L^2}^2\big) = \alpha\|u\|_{L^2}^2 \leqslant 0,$$

e portanto B é dissipativo. Segue então do Corolário 5.10 que $A+B$ é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo de contrações.

6.3 O problema de Cauchy não-homogêneo

A seguir estudamos **problemas de Cauchy não-homogêneos** da forma

$$\text{(CnH)} \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + f(t), \quad t_0 < t < t_1 \\ u(t_0) = u_0 \in X \end{cases}$$

onde $A\colon D(A) \subset X \to X$ é o gerador de um C^0-semigrupo $\{e^{At}\colon t \geqslant 0\}$ em X e $f\colon [t_0, t_1) \to X$ é contínua.

Definição 6.6.

(a) Uma **solução forte** de (CnH) em $[t_0, t_1)$ é uma função contínua $u\colon [t_0, t_1) \to X$ tal que $u\colon (t_0, t_1) \to X$ é continuamente diferenciável, $u(t_0) = u_0$, $u(t) \in D(A)$ e

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t) \quad \text{para todo } t \in (t_0, t_1).$$

(b) Uma **solução fraca** de (CnH) em $[t_0, t_1)$ é uma função contínua $u\colon [t_0, t_1) \longrightarrow X$ tal que $u(t_0) = u_0$ e para todo $x^* \in D(A^*)$, $(t_0, t_1) \ni t \mapsto \langle u(t), x^*\rangle \in \mathbb{K}$ é continuamente diferenciável em (t_0, t_1) e

$$\frac{d}{dt}\langle u(t), x^*\rangle = \langle u(t), A^*x^*\rangle + \langle f(t), x^*\rangle \quad \text{para todo } t \in (t_0, t_1). \tag{6.5}$$

Antes de continuar, provaremos um lema técnico.

Lema 6.7. *Sejam X um espaço de Banach, $A\colon D(A) \subset X \longrightarrow X$ o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo $\{e^{At}\colon t \geqslant 0\}$ em X, e $A^*\colon D(A^*) \subset X^* \longrightarrow X^*$ o operador dual de A. Então:*

(i) *para cada $x^* \in D(A^*)$ e $x \in X$, a aplicação $[0, \infty) \ni t \mapsto \langle e^{At}x, x^*\rangle$ é continuamente diferenciável e*
$$\frac{d}{dt}\langle e^{At}x, x^*\rangle = \langle e^{At}x, A^*x^*\rangle \quad \textit{para } t \geqslant 0;$$

(ii) *se $x, z \in X$ são tais que $\langle z, x^*\rangle = \langle x, A^*x^*\rangle$ para todo $x^* \in D(A^*)$, então $(x, z) \in G(A)$, isto é, $x \in D(A)$ e $Ax = z$.*

Demonstração

(i) Note que para $x \in D(A)$, $x^* \in D(A^*)$, $t \geqslant 0$ e $h > 0$ temos

$$\langle e^{A(t+h)}x, x^*\rangle - \langle e^{At}x, x^*\rangle = \int_0^h \Big\langle \frac{d}{ds}e^{A(t+s)}x, x^*\Big\rangle ds = \int_0^h \langle e^{A(t+s)}x, A^*x^*\rangle ds,$$

isto é

$$\langle e^{A(t+h)}x, x^*\rangle - \langle e^{At}x, x^*\rangle = \int_0^h \langle e^{A(t+s)}x, A^*x^*\rangle ds. \tag{6.6}$$

Como $D(A)$ é denso em X e as expressões em ambos os lados em (6.6) definem operadores limitados em X, (6.6) vale para todo $x \in X$. Desta forma

$$\frac{d^+}{dt}\langle e^{At}x, x^*\rangle = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^h \langle e^{A(t+s)}x, A^*x^*\rangle ds = \langle e^{At}x, A^*x^*\rangle,$$

e como a expressão do lado direito é contínua em t, o resultado segue do Lema de Dini (Lema A.3).

(ii) Assuma que $(x, z) \notin G(A)$. Sendo A um operador fechado, $G(A)$ é fechado, e segue do Teorema de Hahn-Banach que existem $x^*, y^* \in X^*$ tais que $\langle x, x^*\rangle - \langle z, y^*\rangle \neq$

0 e

$$\langle y, x^* \rangle - \langle Ay, y^* \rangle = 0 \quad \text{para todo } y \in D(A).$$

Mas a segunda equação implica que $y^* \in D(A^*)$ e $A^* y^* = x^*$, e assim

$$0 \neq \langle x, x^* \rangle - \langle z, y^* \rangle = \langle x, A^* y^* \rangle - \langle z, y^* \rangle = 0,$$

o que dá uma contradição e mostra o resultado.

O teorema a seguir nos dá formas de manuseio mais simples para as soluções fracas e estabelece algumas relações importantes entre soluções fracas e fortes.

Teorema 6.8. *São válidas as seguintes afirmações:*

(1) *se u é uma solução forte de* (CnH) *em $[t_0, t_1)$ então é também uma solução fraca de* (CnH) *em $[t_0, t_1)$.*

(2) *Se u é uma solução fraca de* (CnH) *em $[t_0, t_1)$, então*

$$u(t) = e^{A(t-t_0)} u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f(s) ds \quad \text{para } t \in [t_0, t_1). \tag{6.7}$$

Em particular, existe uma única solução fraca de (CnH) *em $[t_0, t_1)$.*

(3) *Se $u \colon [t_0, t_1) \to X$ é definida por* (6.7)*, então u é uma solução fraca de* (CnH) *em $[t_0, t_1)$.*

(4) *Se $u \colon [t_0, t_1) \to X$ é uma solução fraca e para algum $t \in (t_0, t_1)$ ou $u(t) \in D(A)$ ou $\frac{d^+u}{dt}(t)$ existe, então ambos são verdadeiros, e para este instante t temos*

$$\frac{d^+u}{dt}(t) = Au(t) + f(t).$$

Demonstração

A afirmativa **(1)** segue diretamente da definição. Provaremos **(3)** e a unicidade de soluções fracas, o que implica **(2)**.

Prova de **(3)**. Defina $u \colon [t_0, t_1) \to X$ por (6.7) e seja $x^* \in D(A^*)$. Para $t \in [t_0, t_1)$ e $h > 0$ temos

$$\langle u(t+h), x^* \rangle - \langle u(t), x^* \rangle = \langle e^{A(t+h-t_0)} u_0, x^* \rangle - \langle e^{A(t-t_0)} u_0, x^* \rangle$$

$$+\left\langle \int_{t_0}^{t+h} e^{A(t+h-s)} f(s)ds, x^*\right\rangle - \left\langle \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f(s)ds, x^*\right\rangle,$$

e escrevendo $x = \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} f(s)ds$ obtemos

$$\frac{\langle u(t+h), x^*\rangle - \langle u(t), x^*\rangle}{h} = \frac{\langle e^{A(t+h-t_0)}u_0, x^*\rangle - \langle e^{A(t-t_0)}u_0, x^*\rangle}{h}$$
$$+ \frac{\langle e^{Ah}x, x^*\rangle - \langle x, x^*\rangle}{h} + \left\langle \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{A(t+h-s)} f(s)ds, x^*\right\rangle.$$

Usando o item **(i)** do Lema 6.7 nas duas primeiras parcelas da direita, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d^+}{dt}\langle u(t), x^*\rangle &= \langle e^{A(t-t_0)}u_0, A^*x^*\rangle + \left\langle \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f(s)ds, A^*x^*\right\rangle + \langle f(t), x^*\rangle \\ &= \langle u(t), A^*x^*\rangle + \langle f(t), x^*\rangle.\end{aligned}$$

Segue do Lema de Dini que u é uma solução fraca de (CnH) em $[t_0, t_1)$.

Prova da unicidade em **(2)**. Se u_1, u_2 são duas soluções fracas de (CnH) em $[t_0, t_1)$, então a função $v\colon [t_0, t_1) \to X$, dada por $v(t) = u_1(t) - u_2(t)$ para $t \in [t_0, t_1)$, é uma função contínua com $v(t_0) = 0$ e, se $x^* \in D(A^*)$, então $\frac{d}{dt}\langle v(t), x^*\rangle = \langle v(t), A^*x^*\rangle$, para $t_0 \leqslant t < t_1$. Defina $V\colon [t_0, t_1) \to X$ por $V(t) = \displaystyle\int_{t_0}^t v(s)ds$ para $t \in [t_0, t_1)$. Assim V é diferenciável, $\frac{dV}{dt}(t) = v(t)$ para $t \in [t_0, t_1)$, e portanto para todo $x^* \in D(A^*)$ temos

$$\left\langle \frac{dV}{dt}(t), x^*\right\rangle = \langle v(t), x^*\rangle = \int_{t_0}^t \langle v(s), A^*x^*\rangle ds = \langle V(t), A^*x^*\rangle.$$

Usando **(ii)** do Lema 6.7 obtemos $V(t) \in D(A)$ e $AV(t) = \frac{dV}{dt}(t)$. Assim

$$\frac{d}{ds}e^{A(t-s)}V(s) = -Ae^{A(t-s)}V(s) + e^{A(t-s)}\frac{dV}{ds}(s) = 0.$$

Portanto $[t_0, t] \ni s \mapsto e^{A(t-s)}V(s)$ é constante, e como $V(t_0) = 0$, temos $V(t) = e^{A(t-t_0)}V(t_0) = 0$, ou seja $V(t) = 0$ para todo $t \in [t_0, t_1)$. Isto implica que $v(t) = \frac{dV}{dt}(t) = 0$ em $[t_0, t_1)$ e completa a prova da unicidade.

Prova de **(4)**. Se u é uma solução fraca de CnH, então u tem a forma (6.7), e para

$t_0 < t < t+h < t_1$ temos

$$\frac{u(t+h)-u(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{A(t+h-s)} f(s)ds + \frac{1}{h}(e^{Ah}-I)u(t).$$

O termo do meio converge para $f(t)$ quando $h \to 0^+$, e portanto se um dos outros termos converge, ambos devem convergir.

6.3.1 Diferenciabilidade de soluções fracas

A seguir damos condições que asseguram a diferenciabilidade de uma solução fraca.

Lema 6.9. *Se $u_0 \in D(A)$ então uma solução fraca u de (CnH) em $[t_0,t_1)$ é uma solução forte de (CnH) em $[t_0,t_1)$ se, e somente se, a função $v\colon [t_0,t_1) \to X$ dada por*

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f(s)ds$$

é continuamente diferenciável em (t_0,t_1).

Demonstração

A solução fraca u de (CnH) em $[t_0,t_1)$ é dada por (6.7), e assim $u(t) = e^{A(t-t_0)}u_0 + v(t)$ para $t \in [t_0,t_1)$. Se u é uma solução forte então $v(t) = u(t) - e^{A(t-t_0)}u_0$ é continuamente diferenciável em (t_0,t_1).

Reciprocamente, se $u_0 \in D(A)$, u é uma solução fraca de (CnH) e v é continuamente diferenciável em (t_0,t_1), então para $t \in (t_0,t_1)$ e $h > 0$ suficientemente pequeno, podemos escrever

$$\frac{u(t+h)-u(t)}{h} = \frac{e^{A(t+h-t_0)}u_0 - e^{A(t-t_0)}u_0}{h} + \frac{v(t+h)-v(t)}{h},$$

e portanto

$$\frac{d^+u}{dt}(t) = e^{A(t-t_0)}Au_0 + \frac{dv}{dt}(t),$$

e do Lema de Dini (Lema A.3) segue que u é continuamente diferenciável em (t_0,t_1). Usando o item **(4)** do Teorema 6.8, obtemos $u(t) \in D(A)$ e $\frac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t)$. Portanto u é uma solução forte de (CnH).

Corolário 6.10. *Se $u_0 \in D(A)$ então uma solução fraca $u\colon [t_0,t_1) \to X$ de (CnH) é uma solução forte de (CnH) em $[t_0,t_1)$ se $v(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f(s)ds \in D(A)$ para todo $t \in [t_0,t_1)$ e $(t_0,t_1) \ni t \mapsto Av(t) \in X$ é contínua.*

Demonstração

Já vimos que

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = \frac{e^{Ah}-I}{h}v(t) + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{A(t+h-s)}f(s)ds,$$

o como $v(t) \in D(A)$ segue que v é diferenciável à direita em (t_0,t_1) e

$$\frac{d^+v}{dt}(t) = Av(t) + f(t).$$

Logo $\frac{d^+v}{dt}$ é contínua em (t_0,t_1), e do Lema de Dini (Lema A.3), v é continuamente diferenciável. O resultado segue então do Lema 6.9.

Teorema 6.11. *Seja $u\colon [t_0,t_1) \to X$ é uma solução fraca de (CnH) em $[t_0,t_1)$. Se $u_0 \in D(A)$ e*

(a) *$f(t) \in D(A)$ para $t \in [t_0,t_1)$ e $[t_0,t_1) \ni t \mapsto Af(t) \in X$ contínua, ou*

(b) *f é continuamente diferenciável em (t_0,t_1),*

então $\frac{du}{dt}(t)$ existe e $u(t) \in D(A)$ para $t \in [t_0,t_1)$. Mais ainda, u é uma solução forte de (CnH) em $[t_0,t_1)$.

Demonstração

Usando (6.7), escrevemos $u(t) = e^{A(t-t_0)}u_0 + v(t)$, onde $v(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}f(s)ds$ para todo $t \in [t_0,t_1)$. Como $u_0 \in D(A)$, $[t_0,t_1) \ni t \mapsto e^{A(t-t_0)}u_0$ é continuamente diferenciável. Agora, fixe $t_2 \in (t_0,t_1)$ e $h > 0$ tal que $t_0 \leqslant t < t+h \leqslant t_2$. No caso **(a)**, como $f(s) \in D(A)$ para todo $s \in [t_0,t_1)$, então para cada $t \in (t_0,t_1)$ fixado obtemos $e^{A(t-s)}f(s) \in D(A)$ e $Ae^{A(t-s)}f(s) = e^{A(t-s)}Af(s)$ para $s \in [t_0,t]$. Como $[t_0,t] \ni s \mapsto Af(s) \in X$ é contínua, obtemos $[t_0,t] \ni s \mapsto Ae^{A(t-s)}f(s) \in X$ contínua. Como $[t_0,t] \ni s \mapsto e^{A(t-s)}f(s) \in X$ é contínua e A é fechado, segue que

$v(t) \in D(A)$ e que

$$Av(t) = \int_{t_0}^{t} Ae^{e^{A(t-s)}} f(s)ds.$$

O resultado então segue do Corolário 6.10.

No caso **(b)**, escrevemos

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} e^{A(t+h-s)} f(s)ds + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} \frac{f(s+h)-f(s)}{h} ds.$$

Sabemos que $\frac{df}{dt}$ é uniformemente contínua no compacto $[t_0, t_2]$. Usando a Proposição A.4 obtemos

$$\frac{d}{dt}v(t) = e^{A(t-t_0)} f(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} \frac{df}{dt}(s)ds,$$

para $t \in [t_0, t_2]$. Como $t_2 \in (t_0, t_1)$ é arbitrário, a expressão acima é válida em $[t_0, t_1)$ e portanto v é continuamente diferenciável em (t_0, t_1) e o resultado segue do Lema 6.9.

6.4 O problema de Cauchy semilinear - caso hiperbólico

Nesta seção consideramos o problema de valor inicial

$$\text{(CsL)} \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + f(t,u) & t > t_0 \\ u(t_0) = u_0 \in X, \end{cases}$$

onde A é o gerador de um C^0-semigrupo, f é uma função contínua que está definida em um subconjunto U de $\mathbb{R} \times X$ e toma valores em X e $(t_0, u_0) \in U$.

Definição 6.12.

(a) Uma **solução forte** de (CsL) em $[t_0, t_1)$ é uma função contínua $u\colon [t_0, t_1) \to X$ tal que $u\colon (t_0, t_1) \to u_0$ é continuamente diferenciável, $u(t_0) = u_0$, $(t, u(t)) \in U$, $u(t) \in D(A)$ e (CsL) vale para $t_0 < t < t_1$.

(b) Uma **solução fraca** de (CsL) em $[t_0, t_1)$ é uma função contínua $u\colon [t_0, t_1) \to X$ tal que $u(t_0) = u_0$ $(t, u(t)) \in U$, para todo $x^* \in D(A^*)$, $(t_0, t_1) \ni t \mapsto \langle u(t), x^* \rangle \in \mathbb{K}$ é diferenciável e

$$\frac{d}{dt}\langle u(t), x^*\rangle = \langle u(t), A^*x^*\rangle + \langle f(t, u(t)), x^*\rangle \quad \text{para } t \in (t_0, t_1). \tag{6.8}$$

Com isto temos o seguinte teorema:

Teorema 6.13. *São válidas as seguintes afirmações:*

(1) *se u é uma solução forte de (CsL) em $[t_0, t_1)$ então é também uma solução fraca de (CsL) em $[t_0, t_1)$.*

(2) *Uma solução fraca u de (CsL) em $[t_0, t_1)$ é também uma solução forte se, e somente se, é continuamente diferenciável em (t_0, t_1). Isto é válido se, e somente se, $u(t) \in D(A)$ para $t \in (t_0, t_1)$ e $(t_0, t_1) \ni t \mapsto Au(t) \in X$ contínua.*

(3) *Se u é uma solução fraca de (CsL) em $[t_0, t_1)$, então*

$$u(t) = e^{A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f(s, u(s))ds \quad \textit{para } t \in [t_0, t_1). \tag{6.9}$$

(4) *Se u é contínua, $(t, u(t)) \in U$ para $[t_0, t_1)$ e u satisfaz (6.9) em $[t_0, t_1)$, então u é uma solução fraca de (CsL) em $[t_0, t_1)$.*

Demonstração

As afirmativas do teorema seguem do Teorema 6.8 uma vez que, dada uma solução fraca u de (CsL) em $[t_0, t_1)$, a aplicação $[t_0, t_1) \ni t \mapsto f(t, u(t)) \in X$ é contínua.

No que segue assumiremos as seguintes hipóteses:

(H1) X é um espaço de Banach e $A\colon D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C^0-semigrupo $\{e^{At} : t \geqslant 0\}$.

(H2) $U \subset \mathbb{R} \times X$ é aberto e $f\colon U \to X$ é contínua, onde em $\mathbb{R} \times X$ consideramos a norma do máximo, isto é, $\|(t, x)\|_{\mathbb{R}\times X} = \max\{|t|, \|x\|_X\}$.

(H3) f é **localmente Lipschitz na segunda variável em U**, isto é, dado $(t_0, u_0) \in U$, existem $0 < \delta < d((t_0, u_0), \partial U)$ e $L \geqslant 0$ tais que

$$\|f(t, u_1) - f(t, u_2)\|_X \leqslant L\|u_1 - u_2\|_X, \tag{6.10}$$

para todos $(t, u_1),\ (t, u_2) \in U$ com $|t - t_0| \leqslant \delta$ e $\|u_i - u_0\|_X \leqslant \delta$, $i = 1, 2$.

Teorema 6.14. *Suponha que são válidas* **(H1)**, **(H2)** *e* **(H3)**. *Então dado* $(t_0, u_0) \in U$ *existem* $\tau = \tau(t_0, u_0) > 0$ *e uma solução fraca* u *de* (CsL) *em* $[t_0, t_0 + \tau)$.

Mais ainda, se $\eta > 0$ *e* $\tilde{u}$ *é uma solução fraca de* (CsL) *em* $[t_0, t_0 + \eta)$, *então* $\tilde{u}(t) = u(t)$ *para* $t \in [t_0, t_0 + \min\{\tau, \eta\})$.

Demonstração

Usando **(H3)**, escolhemos $0 < \delta < d_{\mathbb{R}\times X}((t_0, u_0), \partial U)$ e $L \geqslant 0$ tais que vale (6.10) para todos $(t, u_1),\ (t, u_2) \in R$, onde

$$R = \{(t, u) \in U\colon |t - t_0| \leqslant \delta \text{ e } \|u - u_0\|_X \leqslant \delta\},$$

e tal que $\|f(t, u) - f(t_0, u_0)\|_X \leqslant 1$ para todo $(t, u) \in R$. Assim, para $M = 1 + \|f(t_0, u_0)\|_X$, temos

$$\|f(t, u)\|_X \leqslant M \quad \text{para } (t, u) \in R.$$

Por **(H1)**, existe $0 < \epsilon < \delta$ tal que para $0 \leqslant h \leqslant \epsilon$ temos

$$\|e^{Ah}u_0 - u_0\|_X \leqslant \frac{\delta}{2}.$$

Finalmente, defina $M_0 = \sup_{h\in[0,\epsilon]} \|e^{Ah}\|_{\mathcal{L}(X)}$ e tome

$$0 < \tau = \min\left\{\frac{\delta}{2MM_0}, \frac{1}{2M_0L}, \epsilon\right\}.$$

Considere $\mathcal{S}$ o conjunto das funções contínuas $u\colon [t_0, t_0 + \tau] \to X$ tal que $\|u(t) - u_0\|_X \leqslant \delta$, para $t \in [t_0, t_0 + \tau]$. Para $u, \tilde{u} \in \mathcal{S}$, defina $d_{\mathcal{S}}(u, \tilde{u}) = \sup\limits_{t\in[t_0,t_0+\tau]} \|u(t) - \tilde{u}(t)\|_X$. Então $(\mathcal{S}, d_{\mathcal{S}})$ é um espaço métrico completo, já que é um subespaço fechado do conjunto das funções contínuas de $[t_0, t_0+\tau]$ em X com a norma da supremo. Para $u \in \mathcal{S}$ defina $G(u)\colon [t_0, t_0 + \tau] \to X$ por

$$G(u)(t) = e^{A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f(s, u(s))ds \quad \text{para } t \in [t_0, t_0 + \tau].$$

Então $G(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$, $d_{\mathcal{S}}(G(u), G(\tilde{u})) \leqslant \frac{1}{2} d_{\mathcal{S}}(u, \tilde{u})$ para $u, \tilde{u} \in \mathcal{S}$ e, do Princípio da Contração de Banach, segue que G tem um único ponto fixo em $\mathcal{S}$, isto é, existe uma única $u \in \mathcal{S}$ tal que $G(u)(t) = u(t)$ para todo $t \in [t_0, t_0 + \tau]$. Juntamente com os itens (3) e (4) do Teorema 6.13, isso conclui a demonstração.

6.4.1 Continuação de soluções

A seguir obtemos resultados sobre extensões de soluções de (CsL) e a existência de intervalos maximais de definição para soluções de (CsL). Estes resultados são essenciais no estudo do comportamento assintótico de soluções de (CsL), e permitem, em muitos casos, obter a existência global de soluções através de alguma estimativa *a priori*.

Definição 6.15. Uma solução fraca $u\colon [t_0, t_1) \to X$ de (CsL) é chamada de **solução fraca maximal** se: ou $t_1 = \infty$, ou $t_1 < \infty$ e não existem $t_2 > t_1$ e uma solução fraca $\tilde{u}\colon [t_0, t_2) \to X$ de (CsL) com $u(t) = \tilde{u}(t)$ para $t \in [t_0, t_1)$.

Teorema 6.16. *Assuma que valem* **(H1)**, **(H2)** *e* **(H3)**. *Então para cada* $(t_0, u_0) \in U$ *existe uma única solução fraca maximal* $u\colon [t_0, \tau_{\max}) \to X$ *de* (CsL). *Se para esta solução temos* $\tau_{\max} < \infty$, *então ou existe* $u_1 \in X$ *tal que* $(\tau_{\max}, u_1) \in \partial U$ *e* $u(t) \to u_1$ *quando* $t \to \tau_{\max}^-$ *ou*

$$\limsup_{t \to \tau_{\max}^-} \frac{\|f(t, u(t))\|_X}{1 + \|u(t)\|_X} = \infty.$$

Adicionalmente, se $U = \mathbb{R} \times X$ *e* f *leva subconjuntos limitados de* $\mathbb{R} \times X$ *em subconjuntos limitados de* X, *então* $\limsup_{t \to \tau_{\max}^-} \|u(t)\|_X = \infty$.

Demonstração

Primeiramente, definamos

$$\tau_{\max} = \sup\{t_1 : \text{existe uma solução fraca de (CsL) em } [t_0, t_1)\}.$$

Para cada $t \in [t_0, \tau_{\max})$ defina

$$u(t) = \{\tilde{u}(t) \mid \tilde{u} \text{ é uma solução fraca de (CsL) em } [t_0, t_1) \text{ com } t_1 > t\}.$$

Segue do Teorema 6.14 que u está bem definida, já que toda solução fraca tem o mesmo valor em t. Claramente, u é uma solução fraca maximal de (CsL), e portanto u é a única solução maximal de (CsL).

Suponhamos agora que $\tau_{\max} < \infty$ e que existe o limite

$$u_1 = \lim_{t \to \tau_{\max}^-} u(t). \tag{6.11}$$

Claramente $(\tau_{\max}, u_1) \in \overline{U}$. Se $(\tau_{\max}, u_1) \in U$, do Teorema 6.14, existem $\tau_1 > 0$ e uma solução fraca $\tilde{u}\colon [\tau_{\max}, \tau_{\max} + \tau_1) \to X$ para algum $\delta > 0$ com $\tilde{u}(\tau_{\max}) = u_1$. Definimos então $\hat{u}\colon [t_0, \tau_{\max} + \delta] \to X$ por

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t_0 \leqslant t < \tau_{\max} \\ \tilde{u}(t) & \tau_{\max} \leqslant t < \tau_{\max} + \tau_1. \end{cases}$$

Então $\hat{u}$ é uma solução fraca de (CsL), o que contradiz a definição de $\tau_{\max}$. Portanto, se o limite em (6.11) existe, devemos ter $(\tau_{\max}, u_1) \in \partial U$.

Mostremos que se

$$\sup_{t \in [t_0, \tau_{\max})} \frac{\|f(t, u(t))\|_X}{1 + \|u(t)\|_X} \leqslant B < \infty,$$

então o limite em (6.11) existe, e isto completará a prova da primeira parte.

Seja $M = \sup\limits_{t \in [t_0, \tau_{\max})} \|e^{A(t-t_0)}\|_{\mathcal{L}(X)} \geqslant 1$ e note que

$$\|u(t)\|_X \leqslant M\|u_0\|_X + \int_{t_0}^{t} B(1 + \|u(s)\|_X) ds \quad \text{para todo } t \in [t_0, \tau_{\max}).$$

Segue da Desigualdade de Gronwall que $\|u(t)\|_X$ é limitada, e portanto existe $B_1 > 0$ tal que $\|f(t, u(t))\|_X \leqslant B_1$, $t_0 \leqslant t < \tau_{\max}$. Agora, dado $\varepsilon > 0$, escolha

$$0 < \varepsilon_1 < \min\left\{\tau_{\max} - t_0, \frac{\varepsilon}{4M^2 B_1}\right\},$$

fixe $t^* = \tau_{\max} - \varepsilon_1$, e tome $0 < \delta \leqslant \varepsilon_1$ tal que para $0 \leqslant r - s < \delta$ temos

$$\|e^{A(r-s)} u(t^*) - u(t^*)\|_X \leqslant \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Então para $t^* \leqslant \tau_{\max} - \delta \leqslant s \leqslant r < \tau_{\max}$, temos

$$\begin{aligned} u(s) - u(r) &= e^{A(s-t^*)}(u(t^*) - e^{A(r-s)} u(t^*)) \\ &\quad + (I - e^{A(r-s)}) \int_{t^*}^{s} e^{A(s-\theta)} f(\theta, u(\theta)) d\theta + \int_{s}^{r} e^{A(r-\theta)} f(\theta, u(\theta)) d\theta, \end{aligned}$$

e assim obtemos

$$\|u(s) - u(r)\|_X \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + 2\int_{t^*}^{s} M^2 B_1 d\theta + \int_{s}^{r} M B_1 d\theta \leqslant \varepsilon,$$

o que mostra que o limite em (6.11) existe.

Finalmente, assuma que $U = \mathbb{R} \times X$ e f leva subconjuntos limitados de $\mathbb{R} \times X$ em subconjuntos limitados de X. Claramente se $\tau_{\max} < \infty$, o segundo caso deve ocorrer, já que $\partial U = \varnothing$. Se u for limitada quando $t \to \tau_{\max}^-$, então u é limitada (pois é contínua), e assim $\sup_{t \in [t_0, \tau_{\max})} \|f(t, u(t))\|_X < \infty$ e

$$\limsup_{t \to \tau_{\max}^-} \frac{\|f(t, u(t))\|_X}{1 + \|u(t)\|_X} < \infty,$$

o que nos dá uma contradição e completa a prova.

Corolário 6.17. *Assuma que valem* **(H1)**, **(H2)** *e* **(H3)**. *Assuma também que* $U = \mathbb{R} \times X$ *e que existe uma constante* $C \geqslant 0$ *tal que* $\|f(t, u)\|_X \leqslant C(1 + \|u\|_X)$ *para todo* $(t, u) \in \mathbb{R} \times X$. *Então, para cada* $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times X$ *existe uma única solução fraca maximal* $u\colon [t_0, \infty) \to X$ *de* (CsL).

Demonstração

Do Teorema 6.16, para $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times X$ existe uma única solução fraca maximal $u\colon [t_0, \tau_{\max}) \to X$ de (CsL). Como na demonstração do Teorema 6.16, se $\tau_{\max} < \infty$ então o segundo caso deve ocorrer, uma vez que $\partial U = \varnothing$. Mas

$$\limsup_{t \to \tau_{\max}^-} \frac{\|f(t, u(t))\|_X}{1 + \|u(t)\|_X} \leqslant C < \infty,$$

o que nos dá uma contradição.

6.4.2 Diferenciabilidade de soluções fracas

Lema 6.18. *Suponha válidas* **(H1)**, **(H2)** *e* **(H3)**, *e seja* u *uma solução fraca de* (CsL) *em* $[t_0, t_1)$. *Se* $f\colon U \to X$ *é continuamente diferenciável, então para cada* $v_0 \in X$ *o problema*

$$\begin{cases} \dot{v} = Av + f_t(t, u(t)) + f_u(t, u(t))v, & t > t_0, \\ v(t_0) = v_0. \end{cases} \tag{6.12}$$

tem uma solução fraca v em $[t_0, t_1)$.

Demonstração

Seja u uma solução fraca de (CsL) em $[t_0, t_1)$ e defina $g\colon (-\infty, t_1) \times X \to X$ por

$$g(t,v) = \begin{cases} f_t(t,u(t)) + f_u(t,u(t))v, & t \geqslant t_0 \text{ e } v \in X, \\ f_t(t_0,u(t_0)) + f_u(t_0,u(t_0))v, & t < t_0 \text{ e } v \in X. \end{cases}$$

Assim g é contínua e localmente Lipschitz na segunda variável em $(-\infty, t_1) \times X$. Do Teorema 6.16, existe uma única solução fraca maximal $v\colon [t_0, \tau_{\max}) \to X$ de (6.12). Se $\tau_{\max} \geqslant t_1$, restringindo esta solução v ao intervalo $[t_0, t_1)$, o resultado está provado.

Assuma então que $\tau_{\max} < t_1$. Como u é contínua, o conjunto $K = \{(t, u(t))\colon t \in [t_0, \tau_{\max}]\}$ é compacto. Como f é continuamente diferenciável em U, existe $M \geqslant 0$ tal que

$$\|f_t(t,u(t))\|_X \leqslant M \quad \text{e} \quad \|f_u(t,u(t))\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M,$$

para todo $(t, u(t)) \in K$. Assim

$$\|g(t,v(t))\|_X \leqslant M(1 + \|v(t)\|_X) \quad \text{para todo } t \in [t_0, \tau_{\max}),$$

o que mostra que existe $v_1 \in X$ tal que $(\tau_{\max}, v_1) \in \partial[(-\infty, t_1) \times X]$ e $v(t) \to v_1$ quando $t \to \tau_{\max}^-$. Mas $\partial[(-\infty, t_1) \times X] = \{t_1\} \times X$, o que implica que $\tau_{\max} = t_1$, e nos dá uma contradição. Portanto $\tau_{\max} \geqslant t_1$, e completa a prova.

Teorema 6.19. *Suponha válidas* **(H1)**, **(H2)** *e* **(H3)**, *e seja u uma solução fraca de* (CsL) *em* $[t_0, t_1)$. *Se $u(t_0) = u_0 \in D(A)$ e $f\colon U \to X$ é continuamente diferenciável, então $u\colon [t_0, t_1) \to X$ é continuamente diferenciável, e portanto uma solução forte de* (CsL) *em* $[t_0, t_1)$. *Adicionalmente*

$$\frac{d^+u}{dt}(t_0) = Au(t_0) + f(t_0, u(t_0)).$$

Demonstração

Como $u_0 \in D(A)$, segue do Lema 6.18 que o problema (6.12), com $v_0 = Au_0 + f(t_0, u(t_0))$, tem uma solução fraca v em $[t_0, t_1)$. Usando o Teorema 6.13, sabemos que

$$v(t) = e^{A(t-t_0)}(Au_0 + f(t_0, u(t_0))) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f_t(s, u(s))\,ds + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f_u(s, u(s)) v(s)\,ds,$$

para $t \in [t_0, t_1)$.

Fixemos $t_2 \in (t_0, t_1)$, e para $0 < h < t_1 - t_2$ definimos $\Delta_h(t) = u(t+h) - u(t) - hv(t)$, para $t \in [t_0, t_2]$. Provemos que $\Delta_h(t) = o(h)$ quando $h \to 0^+$ uniformemente em $[t_0, t_2]$, o que mostra que u é continuamente diferenciável em $[t_0, t_2]$ e $\frac{du}{dt} = v$. Temos

$$\Delta_h(t) = \underbrace{(e^{Ah} - I - hA)e^{A(t-t_0)}u_0}_{=o(h)} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+h} (e^{A(t+h-s)} f(s, u(s)) - e^{A(t-t_0)} f(t_0, u_0))}_{=o(h)}$$

$$+ \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} [\underbrace{f(s+h, u(s+h)) - f(s, u(s)) - hf_t(s, u(s)) - f_u(s, u(s))hv(s)}_{(I)}]ds.$$

Para $k = u(s+h) - u(s)$, temos

$$(I) = \underbrace{f(s+h, u(s)+k) - f(s, u(s)) - hf_t(s, u(s)) - f_u(s, u(s))k}_{=o(h)} + f_u(s, u(s))\Delta_h(s),$$

e assim, usando a Proposição A.4 obtemos

$$\Delta_h(t) = o(h) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f_u(s, u(s))\Delta_h(s)ds.$$

Como f_u é limitada no conjunto compacto $\{(s, u(s)) \colon s \in [t_0, t_2]\}$, obtemos

$$\|\Delta_h(t)\|_X \leqslant o(h) + C \int_{t_0}^{t} \|\Delta_h(s)\|_X ds,$$

quando $h \to 0^+$ uniformemente para $t \in [t_0, t_2]$, para alguma constante $C \geqslant 0$. Logo, pela Desigualdade de Gronwall, $\|\Delta_h(t)\|_X \leqslant o(h)$, o que completa a prova.

6.4.3 Dependência contínua dos dados iniciais

Lema 6.20. *Suponha válidas* **(H1)**, **(H2)** *e* **(H3)**. *Sejam u uma solução fraca de* (CsL) *em $[t_0, t_1)$ e $t^* \in (t_0, t_1)$. Então existem $r > 0$ e $L \geqslant 0$ tais que para $\tau \in [t_0, t^*]$, $\|u_i - u(\tau)\| < r$, $i = 1, 2$, temos $(\tau, u_i) \in U$, $i = 1, 2$, e*

$$\|f(\tau, u_1) - f(\tau, u_2)\|_X \leqslant L\|u_1 - u_2\|_X.$$

Demonstração

De fato, como f é localmente Lipschitz contínua na segunda variável, para cada $\tau \in [t_0, t^*]$, existem $\delta_\tau > 0$ e $L_\tau \geqslant 0$ tais que se $|t - \tau| < \delta_\tau$ e $\|u_i - u(\tau)\|_X < \delta_\tau$, $i = 1, 2$, então $(t, u_i) \in U$, $i = 1, 2$, e

$$\|f(t, u_1) - f(t, u_2)\|_X \leqslant L_\tau \|u_1 - u_2\|_X.$$

O conjunto $K = \{(\tau, u(\tau)) : \tau \in [t_0, t^*]\} \subset U$ é compacto em $\mathbb{R} \times X$, onde em $\mathbb{R} \times X$ colocamos a norma do máximo. Definindo

$$V_\tau = \{(t, u) \in \mathbb{R} \times X : |t - \tau| < \tfrac{\delta_\tau}{2} \text{ e } \|u - u(\tau)\|_X < \tfrac{\delta_\tau}{2}\} \subset U, \tag{6.13}$$

vemos que a coleção $\{V_\tau\}_{\tau \in [t_0, t^*]}$ é uma cobertura aberta de K em $\mathbb{R} \times X$, e portanto existem $\tau_j \in [t_0, t^*]$, $j = 1, \ldots, n$ tais que $K \subset \cup_{j=1}^n V_{\tau_j}$.

Defina $r = \min\{\frac{\delta_{\tau_j}}{2} : j = 1, \ldots, n\} > 0$ e $L = \max\{L_{\tau_j} : j = 1, \ldots, n\} \geqslant 0$. Dado $\tau \in [t_0, t^*]$, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $(\tau, u(\tau)) \in V_{\tau_j}$, isto é, $|\tau - \tau_j| < \frac{\delta_{\tau_j}}{2}$ e $\|u(\tau) - u(\tau_j)\|_X < \frac{\delta_{\tau_j}}{2}$. Assim, se $\|u_i - u(\tau)\|_X < r$ então

$$\|u_i - u(\tau_j)\|_X \leqslant \|u_i - u(\tau)\|_X + \|u(\tau) - u(\tau_j)\|_X < r + \frac{\delta_{\tau_j}}{2} < \delta_{\tau_j},$$

e portanto $(\tau, u_i) \in U$, $i = 1, 2$ e também

$$\|f(\tau, u_1) - f(\tau, u_2)\|_X \leqslant L_{\tau_j} \|u_1 - u_2\|_X \leqslant L \|u_1 - u_2\|_X.$$

Lema 6.21. *Suponha válidas* **(H1)**, **(H2)** *e* **(H3)**. *Suponha que $f_n : U \to X$ satisfaz* **(H2)** *e* **(H3)** *para $n \in \mathbb{N}$, que u é uma solução fraca de* (CsL) *em $[t_0, t_1)$ e que $f_n(t, u) \to f(t, u)$ quando $n \to \infty$, uniformemente para (t, u) em uma vizinhança de cada ponto $(\tau, u(\tau))$, $\tau \in [t_0, t_1)$. Então dado $t^* \in (t_0, t_1)$ existem $r > 0$ e sequência $\{\varepsilon_n\} \subset [0, \infty)$ com $\varepsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$ tal que se $\tau \in [t_0, t^*]$ e $\|u - u(\tau)\|_X < r$ então $(\tau, u) \in U$ e*

$$\|f_n(\tau, u) - f(\tau, u)\|_X \leqslant \varepsilon_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração

Para cada $\tau \in [t_0, t^*]$ existe $\delta_\tau > 0$ tal que, se

$$W_\tau = \{(t,u) \in \mathbb{R} \times X \colon |t-\tau| < \delta_\tau \text{ e } \|u - u(\tau)\|_X < \delta_\tau\},$$

temos $W_\tau \subset U$ e

$$\sup_{(t,u)\in W_\tau} \|f_n(t,u) - f(t,u)\|_X \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Novamente, da compacidade do conjunto $K = \{(\tau, u(\tau)) \colon \tau \in [t_0, t^*]\}$ e do fato que a coleção $\{V_\tau\}_{\tau\in[t_0,t^*]}$, onde V_τ é como em (6.13), é uma cobertura aberta de K, existem $\tau_j \in [t_0, t^*]$, $j = 1, \ldots, p$ tais que $K \subset \cup_{j=1}^p V_{\tau_j}$. Defina, como no lema anterior, $r = \min\{\frac{\delta_{\tau_j}}{2} \colon j = 1, \ldots, p\}$, e para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$\varepsilon_n = \sup_{j=1,\ldots,p} \sup_{(t,u)\in W_{\tau_j}} \|f_n(t,u) - f(t,u)\|_X.$$

Assim $\varepsilon_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$.

Se $\tau \in [t_0, t^*]$ então $(\tau, u(\tau)) \in V_{\tau_j}$ para algum $j \in \{1, \ldots, p\}$, e se $\|u - u(\tau)\|_X < r$ então $\|u - u(\tau_j)\|_X < \delta_{\tau_j}$, isto é $(\tau, u) \in W_{\tau_j}$ e temos

$$\|f_n(\tau,u) - f(\tau,u)\|_X \leqslant \sup_{(t,v)\in W_{\tau_j}} \|f_n(t,v) - f(t,v)\|_X \leqslant \varepsilon_n,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 6.22. *Suponha válidas* **(H1)**, **(H2)** *e* **(H3)**. *Suponha também que $f_n \colon U \to X$ satisfaz* **(H2)** *e* **(H3)** *para $n \in \mathbb{N}$, que u é uma solução fraca de* (CsL) *em $[t_0, T)$ e que $f_n(t,u) \to f(t,u)$ quando $n \to \infty$, uniformemente para (t,u) em uma vizinhança de cada ponto $(\tau, u(\tau))$, $\tau \in [t_0, T)$. Seja $\{u_{n,0}\}$ uma sequência em X convergente para $u_0 \in X$ e u_n a solução fraca maximal de*

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} = Au_n + f_n(t, u_n(t)), \\ u_n(t_0) = u_{n,0}, \end{cases} \tag{6.14}$$

em um intervalo maximal $[t_0, t_n)$. Dado $t^* \in (t_0, T)$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n > t^*$ para todo

$n \geqslant n_0$. Além disso

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[t_0,t^*]} \|u_n(t) - u(t)\|_X = 0.$$

Demonstração

Dado $t^* \in (t_0, T)$, dos Lemas 6.20 e 6.21 existem $r > 0$, $L \geqslant 0$ e sequência $\{\varepsilon_n\} \subset [0, \infty)$ com $\varepsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$ tais que se $\tau \in [t_0, t^*]$ e

$$\|u_1 - u(\tau)\|_X < r, \quad \|u_2 - u(\tau)\|_X < r \quad \text{e} \quad \|u - u(\tau)\|_X < r$$

então (τ, u_1), (τ, u_2), $(\tau, u) \in U$,

$$\|f(\tau, u_1) - f(\tau, u_2)\|_X \leqslant L\|u_1 - u_2\|_X$$

e

$$\|f_n(\tau, u) - f(\tau, u)\|_X \leqslant \varepsilon_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Podemos também escolher $M \geqslant 1$ tal que $\|e^{A(s-t_0)}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M$ para $s \in [t_0, t^*]$, e tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant n_0$ temos

$$Me^{ML(t^*-t_0)}\big(\|u_{n,0} - u_0\|_X + \varepsilon_n(t^* - t_0)\big) < r.$$

Afirmação 1. Fixado $n \geqslant n_0$, se $\|u_n(s) - u(s)\| < r$ para todo $s \in [t_0, \min\{t_n, t^*\})$, então $t_n > t^*$.

De fato, assuma que $t_n \leqslant t^*$. Então para $s \in [t_0, t_n)$ temos

$$\begin{aligned}
\|f_n(s, u_n(s))\|_X &\leqslant \|f_n(s, u_n(s)) - f(s, u_n(s))\|_X + \|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))\|_X \\
&\quad + \|f(s, u(s))\|_X \\
&\leqslant \varepsilon_n + L\|u_n(s) - u(s)\| + \|f(s, u(s))\|_X \\
&\leqslant \varepsilon_n + L\|u_n(s)\|_X + L\|u(s)\|_X + \|f(s, u(s))\|_X,
\end{aligned}$$

o que nos dá

$$\limsup_{s\to t_n^-} \frac{\|f_n(s, u_n(s))\|_X}{1 + \|u_n(s)\|_X} \leqslant \varepsilon_n + L(1 + \|u(t_n)\|_X) + \|f(t_n, u(t_n))\|_X < \infty,$$

e o Teorema 6.16 implica que existe $u_1 \in X$ tal que $(t_n, u_1) \in \partial U$ e $u_n(s) \to u_1$ quando

$s \to t_n^-$. Mas para $x \in [t_0, t_n)$ temos

$$u_n(x) - u(x) = e^{A(x-t_0)}(u_{n,0} - u_0) + \int_{t_0}^{x} e^{A(x-s)}(f_n(s, u_n(s)) - f(s, u(s)))ds,$$

e assim

$$\begin{aligned}\|u_n(x) - u(x)\|_X &\leqslant M\|u_{n,0} - u_0\|_X + M\Big(\int_{t_0}^{x} \|f_n(s, u_n(s)) - f(s, u_n(s))\|_X ds \\ &\quad + \int_{t_0}^{x} \|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))\|_X ds\Big) \\ &\leqslant M\|u_{n,0} - u_0\|_X + M\varepsilon_n(t^* - t_0) + ML\int_{t_0}^{x} \|u_n(s) - u(s)\|_X ds,\end{aligned}$$

e obtemos da desigualdade de Gronwall que

$$\|u_n(x) - u(x)\|_X \leqslant Me^{ML(t^*-t_0)}\big(\|u_{n,0} - u_0\|_X + \varepsilon_n(t^* - t_0)\big).$$

Fazendo $x \to t_n^-$, obtemos

$$\|u_1 - u(t_n)\|_X \leqslant Me^{ML(t^*-t_0)}\big(\|u_{n,0} - u_0\|_X + \varepsilon_n(t^* - t_0)\big) < r,$$

o que implica que $(t_n, u_1) \in U$, e contradiz o fato de $(t_n, u_1) \in \partial U$.

Afirmação 2. Fixado $n \geqslant n_0$, existe $s_n \in (t_0, \min\{t_n, t^*\})$ tal que $\|u_n(s) - u(s)\|_X < r$ para $s \in [t_0, s_n)$.

Para $n \geqslant n_0$, temos $\|u_{0,n} - u_0\|_X < r$ e logo existe $0 < \theta < r$ tal que $\|u_{n,0} - u_0\|_X < \theta$. Da continuidade de u e u_n, existe $s_n \in (t_0, \min\{t_n, t^*\})$ tal que $\|u_n(s) - u_{n,0}\|_X < \frac{r-\theta}{2}$ e $\|u(s) - u_0\|_X < \frac{r-\theta}{2}$ para $s \in [t_0, s_n)$. Portanto para $s \in [t_0, s_n)$ temos

$$\begin{aligned}\|u_n(s) - u(s)\|_X &\leqslant \|u_n(s) - u_{n,0}\|_X + \|u_{n,0} - u_0\|_X + \|u_0 - u(s)\|_X \\ &< \frac{r-\theta}{2} + \theta + \frac{r-\theta}{2} = r.\end{aligned}$$

Usando a Afirmação 2, para cada $n \geqslant n_0$, podemos definir

$$\tau_n = \sup\{s \in [t_0, \min\{t_n, t^*\}) \colon \|u_n(x) - u(x)\|_X < r \text{ para } x \in [t_0, s)\},$$

e sabemos que $\tau_n > t_0$ para $n \geqslant n_0$. Além disso, vemos que

$$\|u_n(s) - u(s)\|_X < r \quad \text{para } s \in [t_0, \tau_n).$$

Afirmação 3. Temos $\tau_n = \min\{t_n, t^*\}$ para todo $n \geqslant n_0$.

Se este não é o caso, existe $n \geqslant n_0$ tal que $\tau_n < \min\{t_n, t^*\}$. Usando as mesmas desigualdades da Afirmação 1, para $x \in [t_0, \tau_n)$, chegamos em

$$\|u_n(x) - u(x)\|_X \leqslant Me^{ML(t^*-t_0)}\big(\|u_{n,0} - u_0\|_X + \varepsilon_n(t^* - t_0)\big),$$

e como $\tau_n < \min\{t_n, t^*\}$, fazendo $x \to \tau_n^-$, da continuidade de u_n e u obtemos

$$\|u_n(\tau_n) - u(\tau_n)\|_X \leqslant Me^{ML(t^*-t_0)}\big(\|u_{n,0} - u_0\|_X + \varepsilon_n(t^* - t_0)\big) < r.$$

Usando a Afirmação 2, mas com os pontos iniciais $u_{n,0}$ e u_0 substituídos por $u_n(\tau_n)$ e $u(\tau_n)$, obtemos um $s_n \in (\tau_n, \min\{t_n, t^*\})$ tal que $\|u_n(s) - u(s)\|_X < r$ para $s \in [t_0, s_n)$, o que contradiz a definição de τ_n, e mostra esta afirmação.

Juntando as Afirmações 3 e 1, obtemos $t_n > t^*$ para todo $n \geqslant n_0$. Além disso, usando o mesmo processo de desigualdades da Afirmação 1, obtemos

$$\sup_{s\in[t_0,t^*]} \|u_n(s) - u(s)\|_X \leqslant Me^{ML(t^*-t_0)}\big(\|u_{n,0} - u_0\|_X + \varepsilon_n(t^* - t_0)\big),$$

para todo $n \geqslant n_0$, e o resultado está completo.

Corolário 6.23. *Suponha válidas* **(H1)**, **(H2)** *e* **(H3)**. *Assuma também que f é continuamente diferenciável. Se u é uma solução fraca de* (CsL) *em $[t_0, t_1)$ e $t^* \in (t_0, t_1)$, então para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $u_{n,0} \in D(A)$ e solução forte u_n do problema*

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} = Au_n + f(t, u_n(t)), \\ u_n(t_0) = u_{n,0}, \end{cases} \tag{6.15}$$

tais que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[t_0,t^*]} \|u_n(t) - u(t)\|_X = 0.$$

Demonstração

Tome $u_{n,0} \in D(A)$ com $\|u_{n,0} - u_0\|_X \to 0$ quando $n \to \infty$. Assim cada solução fraca u_n de (6.15) é uma solução forte, pelo Teorema 6.19.

6.5 Exemplo: a equação do calor não-linear

Considere o seguinte problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u), & t > 0 \text{ e } x \in (0,1), \\ u(t,0) = u(t,1), & t \geqslant 0, \\ u_x(t,0) = u_x(t,1), & t \geqslant 0, \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{6.16}$$

A variável $u(t,x)$ representa a temperatura em um instante $t \geqslant 0$ no ponto $x \in [0,1]$, esse problema modela a condução de calor em uma barra (com espessura infinitesimal) de comprimento um, com uma fonte que depende da temperatura u. Nesta seção provaremos, sob certas condições, a existência de soluções locais (num intervalo $[0,t_0)$, com $t_0 < \infty$) e globais (em $[0,\infty)$) deste problema de valor inicial e de fronteira. Estudaremos tam'̲em o comportamento assintótico das soluções globais.

Começamos introduzindo uma estrutura abstrata conveniente. Seja $X = C_p([0,1],\mathbb{R})$ o espaço de todas as funções contínuas de período um a valores reais com a norma do supremo, isto é, $\|u\|_X = \sup_{x\in[0,1]} |u(x)|$. Assim X é portanto o espaço das funções contínuas em $[0,1]$ satisfazendo $u(0) = u(1)$. Seja A o operador linear definido em X por $D(A) = \{u \in X : u', u'' \in X\}$ onde u' e u'' são a primeira e segunda derivadas de u, respectivamente. Para $u \in D(A)$, $Au = u''$.

Observação 6.24. *Note que a complexificação de X é $X_{\mathbb{C}} = C_p([0,1],\mathbb{C})$ e que a complexificação $A_{\mathbb{C}}$ de A a $X_{\mathbb{C}}$, é dada por $D(A_{\mathbb{C}}) = \{u \in X_{\mathbb{C}} : u', u'' \in X_{\mathbb{C}}\}$ e $A_{\mathbb{C}}u = u''$ para $u \in D(A_{\mathbb{C}})$. Para simplificar os resultados a seguir, denotaremos $A_{\mathbb{C}}$ simplesmente por A.*

Lema 6.25. *Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, a única função $u \in C_p([0,1],\mathbb{C})$ duas vezes diferenciável em $(0,1)$ com $u'(0) = u'(1)$ que satisfaz o problema de valor de fronteira*

$$\begin{cases} zu - u'' = 0, \ x \in (0,1) \\ u(0) = u(1), \ u'(0) = u'(1). \end{cases} \tag{6.17}$$

é $u(x) = 0$ *para* $x \in [0,1]$.

Demonstração

Se $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ com $|\arg(\lambda)| < \frac{\pi}{2}$ tal que $z = \lambda^2$. Podemos então escrever a solução geral de $\lambda^2 u - u'' = 0$ na forma

$$u(x) = c_1 \cosh(\lambda x) + c_2 \operatorname{senh}(\lambda x) \qquad \text{para } x \in [0,1].$$

Aplicando as condições de fronteira obtemos o sistema linear

$$\begin{pmatrix} \cosh(\lambda) - 1 & \operatorname{senh}(\lambda) \\ \operatorname{senh}(\lambda) & \cosh(\lambda) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

cuja única solução é $c_1 = c_2 = 0$, e portanto $u(x) = 0$ para $x \in [0,1]$.

Lema 6.26. *Dada* $g \in C_p([0,1], \mathbb{C})$, *para cada* $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, *o problema de valor de fronteira*

$$\begin{cases} zu - u'' = g, \ x \in (0,1) \\ u(0) = u(1), \ u'(0) = u'(1). \end{cases} \tag{6.18}$$

tem uma única solução clássica, isto é, existe uma única função $u \in C_p([0,1], \mathbb{C})$ *duas vezes diferenciável em* $(0,1)$ *com* $u'(0) = u'(1)$ *que satisfaz* (6.20).

Demonstração

A unicidade segue diretamente do Lema 6.25. Agora, para $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ com $|\arg(\lambda)| < \frac{\pi}{2}$ e $z = \lambda^2$. Um cálculo direto nos mostra então que

$$u(x) = \frac{1}{2\lambda \sinh(\frac{\lambda}{2})} \left[\int_0^x \cosh \lambda (x - y - \tfrac{1}{2}) g(y) dy + \int_x^1 \cosh \lambda (x - y + \tfrac{1}{2})) g(y) dy \right] \tag{6.19}$$

é uma solução clássica (e portanto, a única solução clássica) de (6.20).

Proposição 6.27. *O operador* A *é densamente definido e fechado.*

Demonstração

A densidade segue do Teorema da Aproximação de Weiertrass (veja o Apêndice **??**). Mostremos agora que A é fechado, e para isto, seja $\{u_n\} \subset D(A)$, com $u_n \to u$ e $u_n'' \to w$ em X. Note que

$$u_n'(x) = \int_0^x u_n''(t)t dt + \int_x^1 u_n''(t)(1-t)dt,$$

para cada $x \in [0,1]$. Como $u_n'' \to w$ em X (a convergência é uniforme), temos

$$u_n'(x) \to \int_0^x w(t)t dt + \int_x^1 w(t)(1-t)dt =: v(x),$$

uniformemente em $[0,1]$. Como $u_n' \in X$, segue que $v \in X$. Mas claramente vemos que $v'(x) = w(x)$ para cada $x \in [0,1]$.

Analogamente, vemos que

$$u_n(x) = \int_0^x u_n'(t)t dt + \int_x^1 u_n'(t)(1-t)dt,$$

e portanto

$$u_n(x) \to \int_0^x v(t)t dt + \int_x^1 v(t)(1-t)dt,$$

uniformemente em $[0,1]$. Como $u_n \to u$ em X, da unicidade do limite, obtemos

$$u(x) = \int_0^x v(t)t dt + \int_x^1 v(t)(1-t)dt \quad \text{para } x \in [0,1].$$

Portanto $u', u'' \in X$ e $u'' = w$, o que completa a prova.

Lema 6.28. *O operador A definido acima é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico compacto* $\{e^{At} : t \geqslant 0\} \subset \mathcal{L}(X)$.

Demonstração

Como o domínio de A contém todos os polinômios trigonométricos (com o período um) ele é denso em X pelo teorema de aproximação de Weierstrass. Sejam $g \in X$ e

$\lambda = \rho e^{i\nu}$ com $\rho > 0$ e $-\pi/2 < \nu < \pi/2$. Considere o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} \lambda^2 u - u'' = g, \ x \in (0,1) \\ u(0) = u(1), \ u'(0) = u'(1). \end{cases} \tag{6.20}$$

Um cálculo direto mostra que este problema tem uma solução u dada por

$$u(x) = \frac{1}{2\lambda \sinh(\frac{\lambda}{2})}\left[\int_0^x \cosh\lambda(x-y-\frac{1}{2})g(y)dy + \int_x^1 \cosh\lambda(x-y+\frac{1}{2}))g(y)dy\right]$$

e que esta solução é única. Denotando por $\mathrm{Re}\lambda = \mu = \rho\cos\nu > 0$ e usando as desigualdades elementares

$$\left|\sinh\frac{\lambda}{2}\right| \geqslant \sinh\frac{\mu}{2}, \quad \left|\cosh\lambda(x-y\pm\frac{1}{2})\right| \leqslant \cosh\mu(x-y\pm\frac{1}{2})$$

encontramos

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leqslant \frac{\|g\|_X}{2|\lambda|\sinh\frac{\mu}{2}}\left[\int_0^x \cosh\mu(x-y-\tfrac{1}{2})dy + \int_x^1 \cosh\mu(x-y+\tfrac{1}{2})dy\right] \\ &= \frac{\|g\|_X}{|\lambda|^2\cos\nu}. \end{aligned}$$

Fixando qualquer $\pi/4 < \nu_0 < \pi/2$ encontramos que

$$\rho(A) \supset \Sigma(\nu_0) = \{\lambda : |\arg\lambda| < 2\nu_0\}$$

e também

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant (\cos\nu_0)^{-1}, \ \text{para } \lambda \in \Sigma(\nu_0).$$

Segue então do Teorema 4.18 que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{e^{At} : t \geqslant 0\}$. Adicionalmente, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, $D(A)$ dotado da norma do gráfico, isto é Y_1, está compactamente imerso em X. Segue que para todo $\lambda \in \Sigma(\nu_0)$, $(\lambda - A)^{-1}$ é um operador compacto e que $\{e^{At} : t \geqslant 0\}$ é um semigrupo compacto, do Corolário 4.20. A prova está completa.

Segue do Lema 6.28 e dos resultados deste capítulo, o seguinte resultado:

Teorema 6.29. *Para toda função localmente Lipschitz $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e para todo $u_0 \in X$ existe* *um* $t_0 > 0$ *tal que o problema de valor inicial e de fronteira* (6.16) *tem uma única solução fraca* $u(t,x)$ *em* $[0, t_0)$ *e ou* $t_0 = \infty$ *ou se* $t_0 < \infty$ *então* $\limsup_{t\to t_0^-} \|u(t,\cdot)\|_X = \infty$.

Demonstração

Note que a função $f\colon X \to X$ dada por $f(u)(x) = f(u(x))$ é localmente Lipschitz contínua.

6.5.1 Comportamento assintótico de soluções

Agora, nos voltamos para o estudo das soluções globais do problema de valor inicial e de fronteira (6.16) e começamos notando que as condições do Teorema 6.29 não implicam a existência global de soluções de (6.16). De fato, escolhendo por exemplo $f(s) = s^2$ e $u_0 \equiv 1$ é fácil ver que a única solução de (6.16) neste caso é $u(t,x) = (1-t)^{-1}$ que explode quando $t \to 1$.

Lema 6.30. *Sejam* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função localmente Lipschitz contínua e* u *uma solução fraca de* (6.16) *em* $[0,\infty)$ *limitada. Então o conjunto* $\{u(t)\colon t \geqslant 0\}$ *é precompacto em* X.

Demonstração

Seja $\|u(t)\|_X \leqslant K$ para $t \geqslant 0$. A continuidade de f implica que $\|f(u(t))\|_X \leqslant N$ para alguma constante N. Seja $\{e^{At}\colon t \geqslant 0\}$ o semigrupo gerado por A e recorde que pelo Lema 6.28, e^{At} é compacto para $t > 0$. Sejam $0 < \varepsilon < 1$, $t > \varepsilon$ e faça

$$u(t) = e^{A\varepsilon}u(t-\varepsilon) + [u(t) - e^{A\varepsilon}u(t-\varepsilon)] = u_\varepsilon(t) + v_\varepsilon(t).$$

O conjunto $\{u_\varepsilon(t)\colon t \geqslant 1\}$ é precompacto em X pois $\{u(t-\varepsilon)\colon t \geqslant 1\}$ é limitado e $e^{A\varepsilon}$ é compacto. Também,

$$\begin{aligned}
\|v_\varepsilon(t)\|_X &= \left\| \int_{t-\varepsilon}^t e^{A(t-s)} f(u(s))ds \right\|_X \\
&\leqslant \int_{t-\varepsilon}^t \|e^{A(t-s)}\|_{\mathcal{L}(X)} \|f(u(s))\|_X \leqslant \varepsilon M N
\end{aligned}$$

onde $M = \sup\{\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)}\colon 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. Portanto $\{u(t)\colon t \geqslant 1\}$ é totalmente limitado e portanto precompacto. Como $\{u(t)\colon 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ é compacto o resultado segue.

Lema 6.31. *Seja f localmente Lipschitz contínua. Se para algum $u_0 \in X$ o problema (6.16) tem uma solução forte em $[0,\infty)$ limitada $u(t,x)$, então existe uma sequência $t_k \to \infty$ tal que*

$$\lim_{t_k \to \infty} u(t_k, x) = \varphi(x),$$

onde $\varphi(x)$ é uma solução do problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} \varphi'' + f(\varphi) = 0, \ x \in (0,1) \\ \varphi(0) = \varphi(1), \ \varphi'(0) = \varphi'(1). \end{cases}$$

Demonstração

Multiplicando a equação (6.16) por u_t e integrando em x e t temos

$$\begin{aligned} \int_1^T \int_0^1 |u_t|^2 dx\, dt + \frac{1}{2} \int_0^1 |u_x(T,x)|^2 dx - \int_0^1 F(u(T,x)) dx \\ \leqslant \frac{1}{2} \int_0^1 |u_x(1,x)|^2 dx - \int_0^1 F(u(1,x)) dx \end{aligned} \tag{6.21}$$

onde $F(s) = \displaystyle\int_0^x f(r) dr$. Como $|u(t,x)| \leqslant K$ para alguma constante K, deduzimos de (6.21) que

$$\int_1^\infty \int_0^1 |u_t|^2 dx\, dt < \infty.$$

Portanto existe uma sequência $t_j \to \infty$ para a qual $\lim_{t_j \to \infty} u_t(t_j, x) = 0$ quase sempre em $[0,1]$, ou $\lim_{t_j \to \infty} u_t(t_j) = 0$ em $L^2(0,1)$. Do Lema 6.30 segue que para uma subsequência de $\{t_j\}$ que denotaremos por $\{t_k\}$ temos $\lim_{t_k \to \infty} u(t_k, x) = \varphi(x)$ uniformemente para $0 \leqslant x \leqslant 1$. Portanto

$$\lim_{t_k \to \infty} f(u(t_k, x)) = f(\varphi(x)),$$

uniformemente para $0 \leqslant x \leqslant 1$. Passando o limite quando $t \to \infty$ através da sequência t_k, na equação (6.16) no sentido de $L^2(0,1)$ e usando o fato que $Au = u''$ é fechado como um operador em $L^2(0,1)$ encontramos que $\varphi''(x) + f(\varphi(x)) = 0$ em $L^2(0,1)$. Como $f(\varphi(x))$ é contínua a equação vale no sentido clássico. Adicionalmente, as condições de periodicidade estão satisfeitas para $\varphi(x)$ já que elas estão satisfeitas para $u(t,x)$.

Corolário 6.32. *Se f é localmente Lipschitz contínua e $f(s) \neq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$, então o problema de valor inicial* (6.16) *não tem soluções fortes limitadas.*

Demonstração

Se $f(s) \neq 0$ o problema de valor de fronteira (6.31) não tem solução. De fato, integrando a equação $\varphi'' + f(\varphi) = 0$ em $[0,1]$ resulta

$$\varphi'(1) - \varphi'(0) = -\int_0^1 f(\varphi(s))ds \neq 0$$

e portanto as condições de fronteira não podem estar satisfeitas. Portanto pelo Lema 6.31 não pode haver solução limitada de (6.16).

Teorema 6.33. *Se f é localmente Lipschitz contínua e $sf(s) < 0$ para todo $s \neq 0$ então todas as soluções fortes do problema de valor inicial e de fronteira* (6.16) *são limitadas. Adicionalmente, toda solução forte de* (6.16) *está definida em $[0,\infty)$ e tende a zero quando $t \to \infty$.*

Demonstração

Multiplicando a equação (6.16) por u e integrando em x temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u_t^2 dx = -\int_0^1 u_x^2 dx + \int_0^1 f(u)u dx \leqslant 0,$$

ou seja, e integrando de s a t, com $s \leqslant t$ obtemos

$$\|u(t)\|_{L^2([0,1])} \leqslant \|u(s)\|_{L^2([0,1])} \leqslant \sup_{x\in[0,1]} |u(s,x)|.$$

A limitação das soluções e ainda mais a estimativa:

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} |u(t,x)| \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |u(s,x)|, \ t \geqslant s, \tag{6.22}$$

são consequências imediatas do princípio do máximo. Portanto todas as soluções do problema de valor inicial (6.16) são limitadas. Adicionalmente do Lema 6.31 sabemos que para alguma sequência $t_k \to \infty$, $u(t_k, x) \to \varphi(x)$ onde φ é uma solução do problema de valor de fronteira (6.31). Mas a única solução deste problema de valor de fronteira é $\varphi \equiv 0$. Isto pode ser visto multiplicando $\varphi'' + f(\varphi) = 0$ por φ e integrando em $[0,1]$ para obter

$$\int_0^1 |\varphi'(x)|^2 dx \leqslant 0$$

o que implica $\varphi' \equiv 0$ e $\varphi = const$. Contudo a única solução $f(s) = 0$ é $s = 0$ e portanto $\varphi \equiv 0$. Portanto temos

$$\lim_{t_k \to \infty} u(t_k, x) = 0. \tag{6.23}$$

Combinando (6.22) com (6.23) obtemos $u(t,x) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Apêndice

$\mathcal{A}$

Lema de Dini e Convergência para Derivadas

Nosso objetivo nesta seção é demonstrar o *Lema de Dini*, e um outro resultado sobre convergência para derivadas. Para começar, precisaremos de alguns conceitos e resultados auxiliares.

Definição A.1. Sejam X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$, $a < b$ números reais e $f\colon [a,b) \to X$ uma função. Diremos que f é **diferenciável à direita** em $[a,b)$ se para cada $x \in [a,b)$ o seguinte limite

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{existe} .$$

Neste caso, definimos

$$\frac{d^+ f}{dx}(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Lema A.2. *Sejam X um espaço de Banach, $a < b$ números reais e $f\colon [a,b) \to X$ uma função contínua e diferenciável à direita no intervalo $[a,b)$. Se $\frac{d^+ f}{dx}(x) = 0$, para todo $x \in [a,b)$ então f é constante em $[a,b)$.*

Demonstração

De fato, assuma por absurdo que f não é constante. Assim, existem $x_0, y_0 \in [a,b)$, com $x_0 > y_0$, tais que $f(x_0) \neq f(y_0)$. Defina

$$\eta = \frac{\|f(x_0) - f(y_0)\|}{2(x_0 - y_0)} > 0,$$

e considere o conjunto

$$\Lambda = \{x \in (y_0, x_0] \colon \|f(x) - f(y_0)\| > \eta(x - y_0)\}.$$

Claramente $x_0 \in \Lambda$, portanto Λ é não-vazio e podemos definir $c = \inf \Lambda$.

Afirmação 1: Temos $c > y_0$.

De fato, se $c = y_0$ então para cada $\varepsilon > 0$, existe $y_\varepsilon \in (y_0, y_0 + \varepsilon)$ tal que $y_\varepsilon \in \Lambda$. Assim $\|f(y_\varepsilon) - f(y_0)\| > \eta(y_\varepsilon - y_0)$, para todo $\varepsilon > 0$. Fazendo $\varepsilon \to 0^+$, obtemos $0 = \|\frac{d^+ f}{dx}(y_0)\| \geqslant \eta$, o que é uma contradição.

Afirmação 2: Temos $\|f(c) - f(y_0)\| = \eta(c - y_0)$.

De fato, é simples verificar que $\|f(c) - f(y_0)\| \geqslant \eta(c - y_0)$. Agora, assuma que $\|f(c) - f(y_0)\| > \eta(c - y_0)$. Da continuidade da função

$$(y_0, x_0] \ni x \longrightarrow g(x) = \frac{\|f(x) - f(y_0)\|}{x - y_0},$$

e do fato de que $g(c) > \eta$, existe $0 < \delta < c - y_0$ tal que $g(x) > \eta$ para todo $x \in (c - \delta, c + \delta)$. Assim $c - \delta \in (y_0, x_0]$ e $g(c - \delta) > \eta$, o que contraria o fato de c ser o ínfimo de Λ.

Agora, como $\frac{d^+ f}{dx}(c) = 0$, existe $d > c$ tal que

$$\|f(x) - f(c)\| < \eta(x - c) \qquad \text{para todo } x \in (c, d]$$

e assim, se $x \in (c, d]$, temos

$$\|f(x) - f(y_0)\| \leqslant \|f(x) - f(c)\| + \|f(c) - f(y_0)\| < \eta(x - c) + \eta(c - y_0) = \eta(x - y_0),$$

o que, novamente contraria o fato de c ser o ínfimo de Λ, o que conclui a demonstração, e prova que f deve ser constante em $[a, b)$.

Com este resultado, enunciamos e demonstramos o Lema de Dini.

Lema A.3 (Lema de Dini). *Seja $\varphi\colon [a,b) \to X$ uma função contínua e diferenciável à direita no intervalo $[a,b)$. Se $\frac{d^+\varphi}{dx}$ é contínua em $[a,b)$, então φ é diferenciável em $[a,b)$.*

Demonstração

Defina a função

$$\Phi(t) = \int_a^t \frac{d^+\varphi}{ds}(s)ds \quad \text{para cada } t \in [a,b).$$

Como $\frac{d^+\varphi}{dx}$ é contínua em $[a,b)$, segue que Φ é diferenciável em $[a,b)$, e além disso temos $\Phi'(t) = \frac{d^+\varphi}{dt}(t)$, para cada $t \in [a,b)$. Ainda, como $\Phi' = \frac{d^+\Phi}{dt}$, temos $\frac{d^+}{dt}(\Phi - \varphi)(t) = 0$, para todo $t \in [a,b)$, e o lema anterior nos dá que existe uma constante c tal que

$$\varphi(t) = \Phi(t) + c \quad \text{para todo } t \in [a,b),$$

e portanto, φ é diferenciável.

Vejamos agora um resultado sobre convergência de derivadas.

Proposição A.4. *Sejam X, Y espaços de Banach, $U \subset X$ um aberto e $f: U \to Y$ uma função continuamente diferenciável, com derivada $Df \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se $K \subset U$ é um compacto então*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(u+k) - f(u) - Df(u)h\|_Y}{\|h\|_X} = 0,$$

uniformemente em K.

Demonstração

Da continuidade uniforme de Df em K, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\|h\|_X < \delta$, $u, u+h \in K$ então

$$\|Df(u+k) - Df(u)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \epsilon.$$

Assim, para $|h| < \delta$, $u, u+h \in K$ temos

$$\begin{aligned}\|f(u+h) - f(u) - Df(u)h\|_Y &= \left\|\int_0^1 \frac{d}{d\theta} f(u+\theta h)d\theta - Df(u)h\right\|_Y \\ &= \left\|\int_0^1 \Big(Df(u+\theta h) - Df(u)\Big)hd\theta\right\|_Y \leqslant \epsilon\|h\|_X,\end{aligned}$$

e prova o resultado.

Apêndice

$\mathcal{B}$

Topologias fraca e fraca*

B.1 Topologia induzida por uma família de funções

Dados X um conjunto qualquer, $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ uma coleção de espaços topológicos e, para cada $\alpha \in \Lambda$, uma função $f_\alpha\colon X \to X_\alpha$, queremos dotar X da topologia τ menos fina que torne contínua todas as funções f_α, que será chamada de **topologia gerada por** $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$.

Notemos que, para que cada f_α seja contínua devemos ter

$$f_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \tau,$$

para todo $U_\alpha \in \tau_\alpha$ e $\alpha \in \Lambda$. Assim, a topologia τ menos fina que torna todas as funções f_α^{-1} é a dada pela coleção de todas as uniões de intersecções finitas de elementos da forma $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, onde $U_\alpha \in \tau_\alpha$ e $\alpha \in \Lambda$, além dos conjuntos $\varnothing$ e X. Sendo assim, a seguinte proposição tem demonstração simples, e é deixada à cargo do leitor.

Proposição B.1. *A coleção formada pelos conjuntos da forma*

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} f_\alpha^{-1}(U_\alpha), \quad \Gamma \textit{ é um subconjunto finito de } \Lambda \textit{ e } U_\alpha \in \tau_\alpha \textit{ para cada } \alpha \in \Gamma,$$

forma uma base para τ.

Exemplo B.2. Sejam $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ é uma coleção de espaços topológicos, e defina

$$X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha = \{f\colon \Lambda \to \cup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \text{ com } f(\alpha) \in X_\alpha \text{ para todo } \alpha \in \Lambda\}.$$

Identificamos um elemento f de X por $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, onde $x_\alpha = f(\alpha)$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Para cada $\alpha_0 \in \Lambda$ fixado, a projeção na coordenada α_0 é definida por

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha_0}\colon X &\to X_{\alpha_0} \\ (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} &\mapsto \pi_{\alpha_0}((x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}) = x_{\alpha_0}. \end{aligned}$$

A topologia τ gerada por $(\pi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ é chamada de **topologia produto de X**. Sabemos do Teorema de Tychonoff (veja [6, Theorem 37.3], por exemplo) que se (X_α, τ_α) é compacto para cada $\alpha \in \Lambda$ então (X, τ) é compacto.

Proposição B.3. *Seja τ a topologia gerada por $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ em X. Então $x_n \to x$ em (X, τ) se, e somente se, $f_\alpha(x_n) \to f_\alpha(x)$ em (X_α, τ_α) para cada $\alpha \in \Lambda$.*

Demonstração. Se $x_n \to x$ em (X, τ) então $f_\alpha(x_n) \to f_\alpha(x)$ em (X_α, τ_α), uma vez que $f_\alpha\colon X \to X_\alpha$ é contínua, para cada $\alpha \in \Lambda$.

Reciprocamente, assuma que $f_\alpha(x_n) \to f_\alpha(x)$ em (X_α, τ_α) para todo $\alpha \in \Lambda$ e considere uma vizinhança U de x em (X, τ). Da Proposição B.1, existe um subconjunto finito $\Gamma \subset \Lambda$ e abertos $U_\alpha \in \tau_\alpha$ para cada $\alpha \in \Gamma$ tais que

$$x \in \bigcap_{\alpha\in\Gamma} f_\alpha^{-1}(U_\alpha) \subset U.$$

Assim, para cada $\alpha \in \Gamma$, como $f_\alpha(x) \in U_\alpha$, existe $n_0(\alpha) \in \mathbb{N}$ tal que $f_\alpha(x_n) \in U_\alpha$ para $n \geqslant n_0(\alpha)$. Para $n \geqslant n_0 := \max\{n_0(\alpha)\colon \alpha \in \Gamma\}$ temos $f_\alpha(x_n) \in U_\alpha$ e todo $\alpha \in \Gamma$, ou seja, $x_n \in \cap_{\alpha\in\Gamma} f_\alpha^{-1}(U_\alpha) \subset U$ para todo $n \geqslant n_0$, o que mostra que $x_n \to x$. □

A demonstração do próximo resultado é imediata e fica a cargo do leitor.

Proposição B.4. *Seja (Z, ω) um espaço topológico. Então $g\colon (Z, \omega) \to (X, \tau)$ é contínua se, e somente se, $f_\alpha \circ g\colon (Z, \omega) \to (X_\alpha, \tau_\alpha)$ é contínua para cada $\alpha \in \Lambda$.*

B.2 Topologia fraca

Sejam X um espaço vetorial normado sobre um corpo $\mathbb{K}$. Para cada $x^* \in X^*$, definimos

$$\begin{aligned} f_{x^*}\colon X &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto f_{x^*}(x) = \langle x, x^* \rangle. \end{aligned}$$

A **topologia fraca**, denotada por $\sigma(X,X^*)$, é a topologia gerada pela família $(f_{x^*})_{x^*\in X^*}$. Claramente, se τ é a topologia da norma em X, temos $\sigma(X,X^*)\subset\tau$.

Proposição B.5. *Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$. A topologia fraca $\sigma(X,X^*)$ em X é Hausdorff.*

Demonstração. Para $x_1,x_2\in X$ com $x_1\neq x_2$, do Teorema de Hahn-Banach existe $x^*\in X^*$ tal que $\langle x_1,x^*\rangle\neq\langle x_2,x^*\rangle$.

Se $\mathrm{Re}\langle x_1,x^*\rangle\neq\mathrm{Re}\langle x_2,x^*\rangle$, podemos assumir que $\mathrm{Re}\langle x_1,x^*\rangle<\mathrm{Re}\langle x_2,x^*\rangle$, e existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Re}\langle x_1,x^*\rangle<\alpha<\mathrm{Re}\langle x_2,x^*\rangle$. Assim, $V_1=f_{x^*}^{-1}(\{z\in\mathbb{K}\colon \mathrm{Re}z<\alpha\})$ e $V_2=f_{x^*}^{-1}(\{z\in\mathbb{K}\colon \mathrm{Re}z>\alpha\})$ são abertos disjuntos de (X,τ), com $x_1\in V_1$ e $x_2\in V_2$.

O procedimento é análogo quando $\mathrm{Im}\langle x_1,x^*\rangle\neq\mathrm{Im}\langle x_2,x^*\rangle$.

Portanto (X,τ) é Hausdorff. □

Proposição B.6. *Os conjuntos da forma*

$$\{x\in X\colon |\langle x-x_0,x_i^*\rangle|<\epsilon,\ i=1,\cdots,n\},$$

onde $n\in\mathbb{N}$, $x_0\in X$, $\epsilon>0$, e $x_i^*\in X^*$ para $i=1,\cdots,n$, constituem uma base para $\sigma(X,X^*)$.

Demonstração. Veja que ao denotar $a_i=\langle x_0,x_i^*\rangle$ para $i=1,\cdots,n$, temos

$$\{x\in X\colon |\langle x-x_0,x_i^*\rangle|<\epsilon,\ i=1,\cdots,n\}=\bigcap_{i=1}^{n} f_{x_i^*}^{-1}(B_\epsilon^{\mathbb{K}}(a_i)),$$

que é um aberto de τ e contém x_0. Agora, se U é uma vizinhança de x_0 em τ, então existem $x_i^*\in X^*$ e abertos U_i de $\mathbb{R}$ para $i=1,\cdots,n$ tais que

$$x_0\in\bigcap_{i=1}^{n} f_{x_i^*}^{-1}(U_i)\subset U.$$

Como $a_i=\langle x_0,x_i^*\rangle\in U_i$ para cada $i=1,\cdots,n$, existe $\epsilon>0$ tal que $B_\epsilon^{\mathbb{K}}(a_i)\subset U_i$ para todo $i=1,\cdots,n$, e portanto

$$x_0\in\bigcap_{i=1}^{n} f_{x_i^*}^{-1}(B_\epsilon^{\mathbb{K}}(a_i))\subset\bigcap_{i=1}^{n} f_{x_i^*}^{-1}(U_i)\subset U,$$

o que conclui a demonstração. □

Denotaremos $x_n\rightharpoonup x$ para denotar que $\{x_n\}$ converge para x na topologia fraca $\sigma(X,X^*)$.

Proposição B.7. *Sejam X espaço vetorial real normado sobre $\mathbb{K}$ e $\{x_n\}$ uma sequência em X. Temos*

(a) $x_n \rightharpoonup x$ *se e só se* $\langle x_n, x^*\rangle \to \langle x, x^*\rangle$ *para todo* $x^* \in X^*$.

(b) *Se* $x_n \to x$ *então* $x_n \rightharpoonup x$.

(c) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *então* $\{x_n\}$ *é limitada e*

$$\|x\|_X \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

(d) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *e* $x_n^* \to x^*$ *em* X^* *então* $\langle x_n, x_n^*\rangle \to \langle x, x^*\rangle$.

Demonstração. A prova de **(a)** segue da Proposição B.3. Notando que

$$|\langle x_n, x^*\rangle - \langle x, x^*\rangle| \leqslant \|x_n - x\|_X \|x^*\|_{X^*} \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty,$$

temos **(b)**. Para **(c)**, veja que $\{\langle x_n, x^*\rangle\}$ é convergente, e portanto limitada, para cada $x^* \in X^*$. Segue do Princípio da Limitação Uniforme que $\{x_n\}$ é limitada. Além disso, para cada $x^* \in X^*$ com $\|x^*\|_{X^*} = 1$ temos

$$|\langle x_n, x^*\rangle \leqslant \|x_n\|_X,$$

e tomando o $\liminf\limits_{n\to\infty}$ em ambos os lados, temos

$$|\langle x, x^*\rangle| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_X.$$

Tomando o supremo do lado esquerdo para $x^* \in X^*$ com $\|x^*\|_{X^*} = 1$ temos o resultado.

Deixamos a cargo do leitor a prova do item **(d)**. □

Teorema B.8. *Seja X um espaço de vetorial real normado e $C \subset X$ convexo. Então C é fechado na topologia forte (topologia da norma) se, e somente se, C é fechado na topologia fraca.*

Demonstração. Se C é fechado na topologia fraca e $C \ni x_n \to x \in X$, então $C \ni x_n \rightharpoonup x$, o que nos dá $x \in C$ e C é fechado na topologia forte.

Reciprocamente, seja C um fechado na topologia forte. Mostraremos que C^c é um aberto em $\sigma(X, X^*)$. Dado $x_0 \notin C$, da Segunda Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach, existe $x^* \in X^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$\langle x_0, x^*\rangle < \alpha < \langle z, x^*\rangle \quad \text{para todo } z \in C.$$

Assim $V = \{x \in X\colon \langle x, x^*\rangle < \alpha\} = f_{x^*}^{-1}((-\infty, \alpha))$ é um aberto de $\sigma(X, X^*)$ com $x_0 \in V$ e $V \cap C = \varnothing$, o que mostra que $x_0 \in V \subset C^c$, e conclui o resultado. $\square$

Exercício 13. Mostre que o resultado acima é verdadeiro também para espaços vetoriais normados complexos.

B.3 Topologia fraca*

Para um espaço normado X, temos a isometria linear canônica $\mathrm{av}_\cdot\colon X \to X^{**}$ definida da seguinte maneira: para cada $x \in X$, o elemento $\mathrm{av}_x \in X^{**}$ é dado por $\langle x^*, \mathrm{av}_x\rangle = \langle x, x^*\rangle$ para todo $x^* \in X^*$.

Claramente $\mathrm{av}_\cdot$ é uma isometria linear, e é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem $\mathrm{av}(X)$ em X^{**}, e portanto, podemos identificar X como um subespaço de X^{**}. Quando $\mathrm{av}(X) = X^{**}$, dizemos que X é **reflexivo** (mas nem sempre esse é o caso).

Em X^* temos definidas a topologia da norma e sua topologia fraca $\sigma(X^*, X^{**})$. Definiremos uma terceira topologia em X^*, chamada de **topologia fraca*** e denotada por $\sigma(X^*, X)$, dada como a topologia gerada pelas família de aplicações $(\mathrm{av}_x)_{x \in X}$.

Como anteriormente, temos os seguintes resultados (cujas demonstrações deixamos a cargo do leitor): a topologia fraca* em X^* é de Hausdorff, e os conjuntos

$$\{x^* \in X^*\colon |\langle x_i, x^* - x_0^*\rangle| < \epsilon,\ i = 1, \cdots, n\},$$

com $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$ para $i = 1, \cdots, n$, $x_0^* \in X^*$ e $\epsilon > 0$, formam uma base para $\sigma(X^*, X)$.

Escrevemos $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$ para denotar que $\{x_n^*\}$ converge para x^* na topologia fraca*.

Proposição B.9. *Sejam X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ e $\{x_n^*\} \subset X^*$. Temos:*

(a) *$x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$ se e só se $\langle x, x_n^*\rangle \to \langle x, x^*\rangle$ para todo $x \in X$.*

(b) *Se $\|x_n^* - x^*\|_{X^*} \to 0$ então $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$.*

(c) *Se $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$ então $\{x_n^*\}$ é limitada e $\|x^*\|_{X^*} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|x_n^*\|_{X^*}$.*

(d) *se $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$ e $x_n \to x$ então $\langle x_n, x_n^*\rangle \to \langle x, x^*\rangle$.*

Teorema B.10 (Teorema de Banach-Alaoglu)**.** *Se X é um espaço vetorial normado então $B = \overline{B}_1^{X^*}(0) = \{x^* \in X^*\colon \|x^*\|_{X^*} \leqslant 1\}$ é compacta na topologia fraca*.*

Demonstração. Considere $Z = \{h \colon X \to \mathbb{C}\}$ dotado da topologia produto ω, e defina $\Phi \colon X^* \to Z$ por

$$\Phi(x^*) = (\langle x, x^* \rangle)_{x \in X}.$$

Note que para cada $x \in X$ fixado temos $\pi_x \circ \Phi \colon X^* \to X$ dada por $\pi_x(\Phi(x^*)) = \langle x, x^* \rangle$. Da definição de $\sigma(X^*, X)$, vemos que $\pi_x \circ \Phi$ é contínua, e da Proposição B.4 segue que Φ é contínua. Claramente Φ é injetora, e portanto tem uma inversa $\Phi^{-1} \colon \Phi(X^*) \subset Z \to X^*$.

Provemos agora que Φ^{-1} é contínua. Da Proposição B.4, é suficiente notar que $\mathrm{av}_x \circ \Phi^{-1} \colon \Phi(X^*) \to \mathbb{C}$ é contínua para cada $x \in X$. De fato, note que para cada $x \in X$ fixado

$$\mathrm{av}_x(\Phi^{-1}h) = \langle x, \Phi^{-1}h \rangle = h(x),$$

ou seja, a aplicação $\Phi(X^*) \ni h \mapsto (\mathrm{av}_x \circ \Phi^{-1})(h) = h(x)$ é contínua, pela definição da topologia produto.

Note que

$$\Phi(B) = \{h \in Z \colon |h(x)| \leqslant \|x\|_X,\ h(x + \lambda y) = h(x) + \lambda h(y),\ \lambda \in \mathbb{C} \text{ e } x, y \in X\},$$

e que podemos escrever $\Phi(B) = K_1 \cap K_2$, com

$$K_1 = \{h \in Z \colon |h(x)| \leqslant \|x\|_X,\ x \in X\} = \prod_{x \in X} \overline{B}^{\mathbb{C}}_{\|x\|_X}(0),$$

e

$$\begin{aligned} K_2 &= \{h \in Z \colon h(x + \lambda y) = h(x) + \lambda h(y),\ \lambda \in \mathbb{C} \text{ e } x, y \in X\} \\ &= \bigcap_{x,y \in X,\ \lambda \in \mathbb{C}} \underbrace{\{h \in Z \colon h(x + \lambda y) = h(x) + \lambda h(y)\}}_{= D_{x,y,\lambda}}. \end{aligned}$$

Do Teorema de Tychonoff, K_1 é compacto, e como a aplicação $h \mapsto h(x + \lambda y) - h(x) - \lambda h(y)$ é contínua, $D_{x,y,\lambda}$ é fechado para cada $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Portanto K_2 é fechado, e assim $\Phi(B)$ é compacto, o que nos dá B compacto. □

Referências Bibliográficas

[1] S. Agmon, A. Douglis, and L. Nirenberg. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 12:623–727, 1959.

[2] H. Amann. *Linear and quasilinear parabolic problems. Vol. I*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.

[3] M.C. Bortolan. *Elementos da Teoria Espectral*. Notas de Aula, 2021.

[4] A.M. Gomes. *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução*. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2011.

[5] D. B. Henry. *Semigroups*. Handwritten Notes. IME-USP, São Paulo SP, Brazil, 1981.

[6] James Munkres. *Topology*. Pearson Education, 2000.

[7] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[8] Walter Rudin et al. *Principles of mathematical analysis*, volume 3. McGraw-hill New York, 1976.