Existência de soluções fortes para equações de Navier-Stokes com dissipação não-linear

Jáuber Cavalcante de Oliveira
Departamento de Matemática, UFSC

Resumo: Neste seminário revisaremos resultados da literatura sobre questões de existência de soluções globais fortes para as equações de Navier-Stokes sob efeito de uma dissipação não-linear. Em especial, um resultado recente de Y. Kim e K. Li (EJDE, 2017) sobre a existência de soluções periódicas fortes será apresentado em detalhe.

REF. Y. Kim, K. Li (EJDE (2017), Nº 244, p. 1-11)

Apresentado no Seminário de EDP 15/03/2018

Soluções Fortes Periódicas no Tempo para as equações de Navier-Stokes em Domínios Limitados Tridimensionais com Termo de Amortecimento

$$(1)\begin{cases} u_t + (u\cdot\nabla)u - \nu\Delta u + \boxed{\alpha|u|^{q-1}u} = -\nabla p + f, & x\in\Omega, t>0 \\ \operatorname{div} u = 0, & x\in\Omega, t>0 \\ u(x,t)=0, & x\in\partial\Omega, t>0 \\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega \end{cases}$$

$\nu>0$, $\alpha>0$
$q\in\mathbb{R}$, $q\geq 1$.
$f(x,t)$: força externa

$\Omega\subset\mathbb{R}^3$ conj. aberto limitado com $\partial\Omega$ suave

$u(x,t)$: campo vetorial de velocidades
$p(x,t)$: campo escalar de pressões

X. Cai & Q. Jiu (2008; JMAA) estudaram o problema de Cauchy em $\Omega=\mathbb{R}^3$ provando a existência de soluções fracas se $q\geq 1$ e de soluções globais fortes se $\beta\geq\frac{7}{2}$. Eles obtiveram unicidade se $\beta\in\left[\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right]$ $\left(7/2\leq\beta\leq\frac{5}{5}\right)$.

Z. Zhang & X. Wu & M. Lu (2011) provaram que para $\beta>3$, (1) tem ~~xxxx~~ soluções global forte, que é única quando $3 < \beta \leq 5$.

Y. Zhou (2012) provou que a solução forte existe globalmente para $\beta = 3$ e $\alpha = \nu = 1$, e provou também unicidade dentre as soluções fracas em $L^\infty(0,T; L^2(\Omega)^3)$ se $\beta \geq 1$.

$\mathcal{V} := \{ v \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \operatorname{div} v = 0 \}$

$H := \overline{\mathcal{V}}^{L^2(\Omega)^3}$ $\qquad (u,v) := \int_\Omega u \cdot v \, dx, \ \forall u,v \in H$

$V := \overline{\mathcal{V}}^{H_0^1(\Omega)^3}$ $\qquad ((u,v)) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \ \forall u,v \in V.$

$V^* :=$ dual de V

$\|\cdot\|_q := \|\cdot\|_{L^q(\Omega)^3} \quad (1 \leq q \leq \infty)$

$\|\cdot\| := \|\cdot\|_2$

Def. $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; H) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; V) \cap L^{\beta+1}_{loc}(\mathbb{R}^+; L^{\beta+1}(\Omega)^3)$

é uma solução fraca de (1) se satisfaz

$$(2) \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u,v) + \nu((u,v)) + b(u,u,v) + \alpha\left(|u|^{\beta-1}u, v\right) = (f,v), \\ \forall v \in V \cap L^{\beta+1}(\Omega)^3, \ \forall t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

onde $b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u_i \, \partial_i v_j \, w_j \, dx$, $\quad \partial_i := \dfrac{\partial}{\partial x_i}$

Formulação Abstrata Equivalente

$$
(3)\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \nu Au + B(u) + G(u) = Pf, & t>0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}
$$

onde

$Au = -P\Delta u$, Projeção ortogonal de $L^2(\Omega)^3$ em H.

$G(u) := \alpha P(|u|^{\beta-1}u)$

$\langle B(u), w\rangle := b(u,u,w)$

A existência de soluções globais fracas de (1) foi provada quando $\beta \geq 1$, $\alpha > 0$, $u_0 \in H$ e $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)^3)$ pelo MÉTODO DE FAEDO-GALERKIN por X. Cai & Q. Jiu (2008), X. Song & Y. Hou (2012) e X. Song & Y. Hou (2015).

Solução "G-fraca": solução fraca obtida como o limite de aproximações de Galerkin.

Def. $(u(x,t), p(x,t))$ é uma solução forte de (1) se $u(x,t)$ é uma solução fraca e

$$u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; V \cap L^{\beta+1}(\Omega)^3) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; D(A)).$$

$\boxed{\text{TEOREMA 1}}$ Se $u_0 \in V$, $f \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)^3)$ e $3 < \beta < 5$, $\alpha > 0$ OU $\beta = 3$ e $\alpha\nu > \frac{1}{4}$ então as soluções G-fracas de (1) são soluções fortes.

Teorema 2 Se $\beta > 3$, $\alpha > 0$ ou $\beta = 3$ e $\alpha\nu \geq \frac{1}{4}$ então existe uma constante δ (não necessariamente positiva) tal que

(3) $$\|u(t) - v(t)\|^2 \leq \|u_0 - v_0\|^2 . \exp(-\delta t), \ \forall t \geq 0$$

e $\forall u_0, v_0 \in H$, onde u e v são soluções G-fracas com dados iniciais u_0, v_0, respectivamente. Além disso, se $\beta \geq 3$, $\alpha > 0$ e

(4) $$\lambda_1^{\beta-3} . \alpha^2 . (2\nu)^{2\beta-4} > \frac{(2\beta-4)^{2\beta-4}}{(\beta-1)^{2\beta-2}}$$

então existe $\delta > 0$ que satisfaz (3), onde λ_1 é o primeiro autovalor do operador de Stokes.

Teorema 3 Se $f \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)^3)$ e $f(\cdot, t) = f(\cdot, t+T)$, $\forall t \geq 0$, e

$$3 < \beta < 5, \ \alpha > 0 \ \text{ou} \ \beta = 3, \ \alpha\nu > \frac{1}{4}$$

então existe uma solução T-periódica

forte de (1). Além disso, se (4) é satisfeita a solução periódica de (1) é ÚNICA e as soluções fracas de (1) convergem exponencialmente para a solução periódica quando $t \to \infty$.

Dem. do Teorema 3

Seja $F := \|f\|^2_{W^{1,2}(0,T;\, L^2(\Omega)^3)}$.

Seja

$$(S u_0)(x) := u(x, T; u_0)$$

a única solução G-fraca de (1) com dado inicial $u_0 \in H$.

Seja

$$X := \left\{ u_0 \in H : \|u_0\|^2 \leq C_4 := \frac{F}{\lambda_1 \nu (1 - e^{-\lambda_1 \nu T})} \right\}.$$

Seja $u_0 \in X$.

Multiplicando $(1)_1$ por u e integrando em Ω:

$$(5) \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \nu \|\nabla u\|^2 + \alpha \|u\|^{\beta+1}_{\beta+1} \leq \frac{\lambda_1 \nu}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2\cancel{\lambda_1}\nu}\|f(t)\|^2.$$

Como $\lambda_1 \|u\|^2 \leq \|\nabla u\|^2$, descartando o termo $\alpha \|u\|^{\beta+1}_{\beta+1}$ e aplicando o Lema de Gronwall, obtemos

$$(6) \quad \|u(t)\|^2 \leq e^{-\lambda_1 \nu t}\|u_0\|^2 + \frac{F}{\lambda_1 \nu}, \quad \forall t \in [0, T].$$

$$C_4 := \frac{F}{\lambda_1 \nu (1 - e^{-\lambda_1 \nu T})}$$

$\Rightarrow \|u(T; u_0)\|^2 \leq C_4$, se $\|u_0\|^2 \leq C_4$; ou seja,

$$SX \subset X.$$

Se $\|u_0\|^2 \leq C_4$, integrando (5) sobre $[0,T]$ e usando (6) obtemos

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|^2 + \nu \int_0^T \|\nabla u\|^2(s)\,ds + \alpha \int_0^T \|u\|_{\beta H}^{\beta H}(s)\,ds$$

$$\leq \frac{1}{2}\underbrace{\|u(0)\|^2}_{\leq C_4} + \frac{\nu\lambda_1}{2}\underbrace{\int_0^T \|u\|^2(s)\,ds}_{\leq \int_0^T e^{-\lambda_1 \nu s}\|u_0\|^2 ds} + \frac{1}{2\lambda_1 \nu}\underbrace{\int_0^T \|f(t)\|^2\,dt}_{\leq F}$$

$$+ \frac{FT}{\cancel{\lambda_1 \nu}}\,\frac{\cancel{\nu\lambda_1}}{2}$$

e logo
$$\nu \int_0^T \|\nabla u(t)\|^2\,dt \leq \frac{C_4}{2} + \frac{\cancel{\nu\lambda_1}}{2}\cdot C_4 \cdot \frac{(1-e^{-\lambda_1 \nu T})}{\cancel{\lambda_1 \nu}}$$
$$+ \frac{FT}{2\lambda_1 \nu} + \frac{FT}{2}$$

i.e.,
$$\boxed{\int_0^T \|\nabla u(t)\|^2\,dt \leq \frac{C_4}{\nu} + \frac{FT}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1 \nu} + 1\right) =: C_5}$$

Então, existe $t_0 \in (0,T)$ tal que

$$\boxed{\|\nabla u(t_0)\|^2 \leq \frac{C_5}{T}} \qquad (4,3)$$

A desigualdade (2.16)

$$(2.16) \qquad \sup_{T' \le t \le T} \|\nabla u(t)\|^2 \le C(T) \cdot \left(1 + \|\nabla u_0\|^{4q(q-1)} + \int_0^T \|f(t)\|^2 dt + \int_0^T \|f_t(t)\|^2 dt \right)$$

com $t = 0$ substituído por $t = t_0$ implica em

$$\|\nabla u(T)\|^2 \le C(T) \cdot \left(1 + \|\nabla u(t_0)\|^{4q(q-1)} + F \right)$$

$$\underset{(4.3)}{\le} C(T) \left(1 + \left(\frac{C_5}{T} \right)^{2q(q-1)} + F \right).$$

Logo, SX é pré-compacto em H.

A continuidade de $S : X \to X$ segue do $\boxed{\text{Teorema 2}}$ (ver (1.3) no paper). Claro que X é fechado, limitado e convexo em H. Como $S : X \to X$ é uma aplicação compacta e contínua, pelo <u>TEOREMA DO PONTO FIXO DE SCHAUDER</u>, inferimos que S tem um ponto fixo no espaço X. Logo, existe $u_0 \in X$ tal que $u(T; u_0) = u_0$.

Além disso, pelo $\boxed{\text{Teor. 1}}$ e $u_0 = u(T; u_0) \in V$ temos que as soluções periódicas G-fracas são também soluções periódicas <u>fortes</u>.

Finalmente, supondo que

$$(1.4) \qquad \lambda_1^{\beta-3} \cdot \alpha^2 \cdot (2\nu)^{2\beta-4} > \frac{(2\beta-4)^{2\beta-4}}{(\beta-1)^{2\beta-2}}$$

é satisfeita e como $u \in C([0,T]; H)$, $\forall\, T > 0$, segue que $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$\|u(t)-v(t)\|^2 \leq \|u(s)-v(s)\|^2 \cdot \exp(-\delta(t-s)),$$

$\forall t,s$ com $t>s>0$, e soluções fracas u e v (ver (3.9) no paper).

OU O ENUNCIADO DO TEOREMA 2

Isso conclui a demonstração da última parte do Teor. 4

$\square$

Apêndice

Demonstração do Teorema 2

Supomos que $\boxed{\beta>3,\ \alpha>0 \text{ ou } \beta=3 \text{ e } \alpha\nu \geq \frac{1}{4}.}$ (PIH)

Sejam u, v soluções G-fracas com dados iniciais $u_0, v_0 \in H$, respectivamente.

Fixemos $T>0$.

Sejam $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ subsequências de aproximações de Galerkin de u e v respectivamente (de (1)), que satisfazem as seguintes condições.

$$u_m \to u \text{ fraco em } L^2(0,T;V)$$

$$u_m \to u \text{ forte em } L^2(0,T;H)$$

$$v_n \to v \text{ fraco em } L^2(0,T;V)$$

$$v_n \to v \text{ forte em } L^2(0,T;H)$$

(X. Cai, Q. Jiu (2008); X. Song, Y. Hou (2012))

Seja $w_{m,n} := u_m - v_n$.

$\boxed{\text{LEMA}}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$ e $\beta \geq 1$,

$$(|x|^{\beta-1}x - |y|^{\beta-1}y)\cdot(x-y) \geq \frac{1}{2}\left(|x|^{\beta-1} + |y|^{\beta-1}\right)|x-y|^2 \qquad (*)$$

e o coeficiente $\frac{1}{2}$ é "ótimo".

Usando $(*)$ e $\left((u_m\cdot\nabla)u_m, w_{m,n}\right) - \left((v_n\cdot\nabla)v_n, w_{m,n}\right)$

$$= -\left((w_{m,n}\cdot\nabla)w_{m,n}, u_m\right)$$

obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_{m,n}\|^2 + \nu\|\nabla w_{m,n}\|^2 = -\alpha\left(|u_m|^{\beta-1}u_m - |v_n|^{\beta-1}v_n, u_m - v_n\right)$$

$$-\left((u_m\cdot\nabla)u_m, w_{m,n}\right) + \left((v_n\cdot\nabla)v_n, w_{m,n}\right)$$

$$\leq -\frac{\alpha}{2}\int_\Omega \left(|u_m|^{\beta-1} + |v_n|^{\beta-1}\right)|w_{m,n}|^2\,dx + \int_\Omega |u_m|\,|w_{m,n}|\,|\nabla w_{m,n}|\,dx$$

$$\leq -\frac{\alpha}{2}\int_\Omega \left(|u_m|^{\beta-1}+|v_m|^{\beta-1}\right).\,|w_{m,n}|^2\,dx + \nu\varepsilon\,\|\nabla w_{m,n}\|^2$$

(3.4) $$+\frac{1}{4\nu\varepsilon}\int_\Omega |u_m|^2.\,|w_{m,n}|^2\,dx, \qquad t>0, \text{ onde } 0<\varepsilon\leq 1.$$

Trocando a ordem de u_m e v_m:

(3.5) $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_{m,n}\|^2+\nu\|\nabla w_{m,n}\|^2 \leq -\frac{\alpha}{2}\int_\Omega \left(|u_m|^{\beta-1}+|v_m|^{\beta-1}\right)|w_{m,n}|^2\,dx + \nu\varepsilon\|\nabla w_{m,n}\|^2+\frac{1}{4\nu\varepsilon}\int_\Omega |v_m|^2|w_{m,n}|^2\,dx$$

"Adicionando" (3.4) e (3.5) e usando que

$$\lambda_1\|w_{m,n}\|^2 \leq \|\nabla w_{m,n}\|^2$$

(λ_1 é o 1º autovalor do operador de Stokes A),

obtemos

(3.6) $$\frac{d}{dt}\|w_{m,n}\|^2+2\lambda_1\nu(1-\varepsilon)\|w_{m,n}\|^2 \leq \int_\Omega \left\{-\alpha\left(|u_m|^{\beta-1}+|v_m|^{\beta-1}\right)+\frac{1}{4\nu\varepsilon}\left(|u_m|^2+|v_m|^2\right)\right\}.\,|w_{m,n}|^2\,dx$$

Lembrando de (PiH), existem constantes δ (não necessariamente positiva) e $\varepsilon\in(0,1]$ tais que

(3.7) $$2\lambda_1\nu(1-\varepsilon)+\alpha\left(|u_m|^{\beta-1}+|v_m|^{\beta-1}\right)-\frac{1}{4\nu\varepsilon}\left(|u_m|^2+|v_m|^2\right)\geq\delta.$$

Então, segue de (3.6), (3.7) e o Lema de Gronwall que

(3.8) $$\|w_{m,n}(t)\|^2 \leq \|w_{m,n}(0)\|^2 e^{-\delta t}, \quad \forall t \in [0,T]$$

Passando ao limite $m,n \to \infty$, obtemos que

(3.9) $$\|u(t) - v(t)\|^2 \leq \|u_0 - v_0\|^2 e^{-\delta t}, \quad \text{q.s. } t \in [0,T]$$

Se re-definimos $v(t)$ e $u(t)$ sobre um conjunto de medida zero de modo a torná-los contínuos em $[0,T]$, então (3.9) vale $\forall t \in [0,T]$, e logo vale $\forall t \geq 0$ visto que $T > 0$ foi fixado arbitrariamente.

$\square$