Sistemas Dinâmicos Impulsivos.

- π um semigrupo num espaço métrico X.
- $D \subset X$, $J \subset \mathbb{R}^+$

$$F(D,J) = \bigcup_{t \in J} \underbrace{\pi^{-1}(t)}_{\text{imagem inversa}}(D)$$

$$= \{x \in X : \pi(t)x \in D \text{ para algum } t \in J\}.$$

- $x \in X$ é dito um <u>evento inicial</u> se $F(x,t) = \emptyset$, $\forall t > 0$.

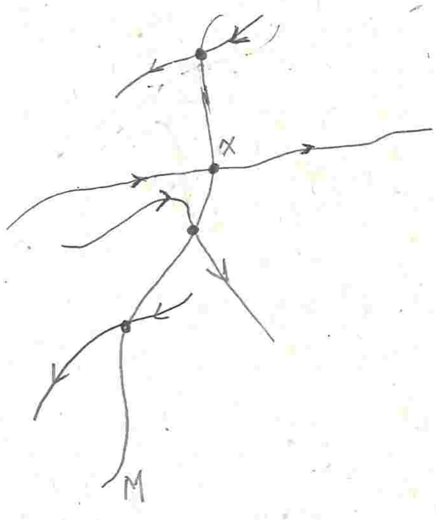
Definição: Um <u>sistema dinâmico impulsivo</u> (X, π, M, I) consiste de um semigrupo π em X e um conjunto M fechado e não-vazio satisfazendo:

para cada $x \in X$ existe $\varepsilon_x > 0$ tal que

$$(*) \qquad F(x, (0,\varepsilon_x)) \cap M = \emptyset \quad \text{e} \quad \left(\bigcup_{t \in (0,\varepsilon_x)} \pi(t)x \right) \cap M = \emptyset,$$

e uma função contínua $I : M \to X$.

(*)



M: conjunto impulsivo.

I: função impulsiva.

Para $x \in X$, definimos $M^+(x) = \left(\bigcup_{t>0} \pi(t)x \right) \cap M$.

Proposição 1: Se $M^+(x) \neq \emptyset$ então existe $s_x > 0$ tal que

$\pi(s_x)x \in M$ e $\pi(t)x \notin M$, para cada $0 < t < s_x$.

Demonstração: Se $M^+(x) \neq \emptyset$ então existe $s > 0$ tal que $\pi(s)x \in M$.

Defina $s_x = \inf\{s > 0 : \pi(s)x \in M\}$.

- $s_x > 0$.

  De fato, se $s_x = 0$ então existe sequência $s_n \to 0^+$ com $\pi(s_n)x \in M$, o que contraria $(*)$.

- $\pi(t)x \notin M$, $0 < t < s_x$, por definição de s_x. $\square$

- Tempo de impacto: $\phi : X \to (0, \infty]$

$$\phi(x) = \begin{cases} s, & \text{se } \pi(s)x \in M \text{ e } \pi(t)x \notin M,\ 0 < t < s. \\ \infty, & \text{se } M^+(x) = \emptyset. \end{cases}$$

- $\pi(\phi(x))x$ é o ponto impulsivo de x.

Trajetória impulsiva. Fixe $x \in X$.

- se $M^+(x) = \emptyset$ defina $\tilde{\pi}(t)x = \pi(t)x$, $t \geq 0$.

- se $M^+(x) \neq \emptyset$ sejam $x_0^+ = x$ e $s_0 = \phi(x_0^+)$. Defina $x_1 = \pi(\underbrace{\phi(x_0^+)}_{s_0})x_0^+$,

$x_1^+ = I(x_1)$ e

$$\tilde{\pi}(t)\cancel{x} = \begin{cases} \tilde{\pi}(t)x_0^+, & 0 \leq t < s_0. \\ x_1^+, & t = s_0. \end{cases}$$

  - se $M^+(x_1^+) = \emptyset$, defina $\tilde{\pi}(t)x = \pi(t - s_0)x_1^+$, $t \geq s_0$.

  - se $M^+(x_1^+) \neq \emptyset$. sejam $s_1 = \phi(x_1^+)$, $x_2 = \pi(\underbrace{\phi(x_1^+)}_{s_1})x_1^+$, $x_2^+ = I(x_2)$

  e

$$\tilde{\pi}(t)x = \begin{cases} \tilde{\pi}(t - s_0)x_1^+, & s_0 \leq t < s_0 + s_1 \\ x_2^+, & t = s_0 + s_1 \end{cases}$$

Assuma $M^+(x_n^+) \neq \emptyset$, $s_n = \phi(x_n^+)$, $x_{n+1} = \pi(\phi(s_n)x_n)x_n$, $x_{n+1}^+ = I(x_n)$, $t_n = \sum_{i=0}^{n} s_i$,

e

$$\tilde{\pi}(t)x = \begin{cases} \pi(t - t_{n-1})x_n^+, & t_{n-1} \leq t \leq t_n \\ x_{n+1}^+, & t = t_n \end{cases}$$

Se $M^+(x_{n+1}^+) = \emptyset$, $\tilde{\pi}(t)x = \pi(t - t_n)x_{n+1}^+$, $t \geq t_n$. Caso contrário o processo continua.

* Se $M^+(x_n^+) = \emptyset$ em algum passo, $\tilde{\pi}(\cdot)x$ está definida em $[0,\infty)$
* Caso contrário o processo continua indefinidamente e $\tilde{\pi}(\cdot)x$ está definida num intervalo $[0, T(x))$, onde $T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i$

Proposição 2: Temos

(a) $\tilde{\pi}(0)x = x, \quad \forall x \in X$

(b) $\tilde{\pi}(t)\tilde{\pi}(s)x = \tilde{\pi}(t+s)x, \quad t, s, t+s \in [0, T(x))$. $(T(x) = \infty$ no caso 1$)$

Demonstração: Explicar.

* Pedimos em geral que $T(x) = \infty, \ \forall x \in X$.
  ↳ $\phi(z) \geq \xi > 0, \quad \forall z \in I(M)$
    ↳ $I(M) \cap M = \emptyset$, $I(M)$ compacto.

Atrator $A \subset X$ atrator global para (X, π, M, I) se:

(i) A é precompacto em X e $A = \bar{A} \setminus M$

(ii) A é $\tilde{\pi}$-invariante:

$$\tilde{\pi}(t)A = A, \quad \forall t \geq 0$$

(iii) A $\tilde{\pi}$-atrai todos os subconjuntos ltdos de X; ie, se $B \subset X$ é ltdo então

$$d_H(\tilde{\pi}(t)A, B) \to 0, \quad t \to \infty$$

$d_H(C, D) = \sup_{x \in C} \inf_{y \in D} d(x, y)$

- Estudo de ω-limites.
- Invariância de ω-limites
- continuidade de ϕ fora de M.
- semicontinuidade superior de ϕ em X.

Condições de Tubo.

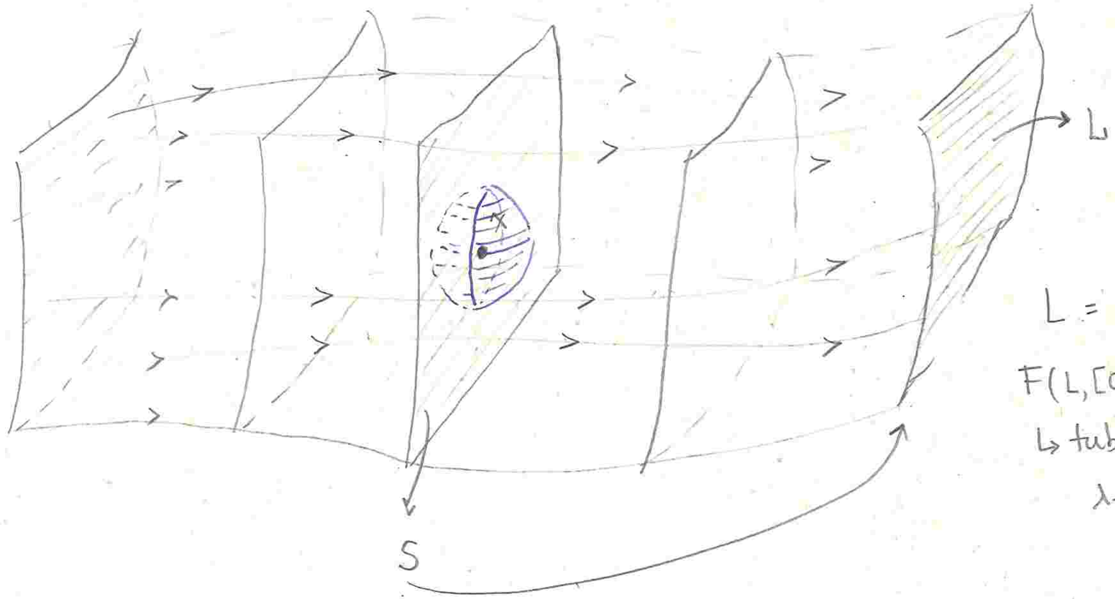
- π semigrupo.
- $x \in S \to$ fechado
  ↳ seção por x.

se existe $\lambda > 0$ e $L \subset X$ fechado com

(a) $F(L, \lambda) = S$

(b) $F(L, [0, 2\lambda])$ contém uma viz. aberta de x.

(c) $F(L, \nu) \cap F(L, \mu) = \emptyset$, se $0 \leq \nu < \mu \leq 2\lambda$.



L = barra

$F(L, [0, 2\lambda])$
↳ tubo ou λ-tubo.

Dizemos que M satisfaz STC se dado $x \in M$, existe seção S por x com

$$S = F(L, [0, 2\lambda]) \cap M.$$

Teorema: M satisfaz STC.

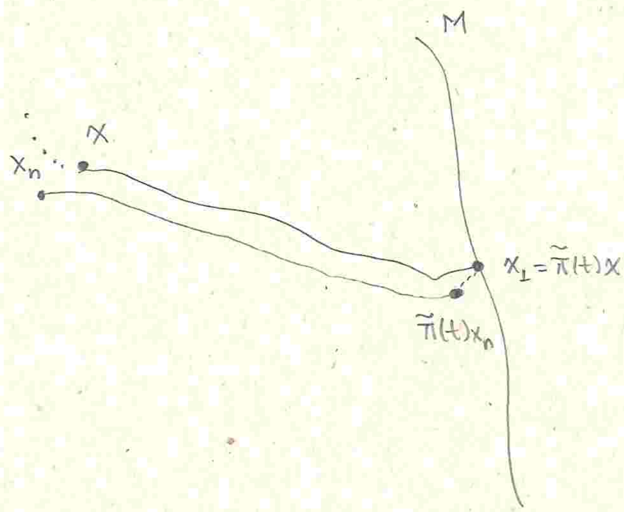
- ϕ é semicont. sup. em X e contínua em $X \setminus M$.
- Se não existem eventos iniciais em M então ϕ é contínua em x se e só se $x \in X \setminus M$.

Lema:
- M satisfaz STC.
- $x \in X \setminus M$ e $x_n \to x$

Dado $t \geq 0$ existe seq. $\varepsilon_n \to 0$ t.q. $t + \varepsilon_n \geq 0$, $\forall n$ e

$$\tilde{\pi}(t+\varepsilon_n)x_n \to \tilde{\pi}(t)x.$$

- Caso $t = \phi(x) < \infty$



$x_1^+ = I(x_1) = \tilde{\pi}(t)x$.

$\tilde{\pi}(t)x_n \to x_1 \neq \tilde{\pi}(t)x$, neste caso.

ε_n = correção para os impulsos.

Exemplos:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) & , t \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad x(t) = \underbrace{x_0 e^{-t}}_{\pi(t)x_0} \quad , t \in \mathbb{R}.$$

- $M = \{1\}$, $I(1) = 2$.

Falar depois:

- $\phi(x_0) = \infty$, para $x_0 \in (-\infty, 1]$
- Se $x_0 > 1$ então $x_0 e^{-t} = 1 \Leftrightarrow t = \ln x_0 > 0$, assim

$$\phi(x_0) = \ln x_0, \quad x_0 > 1.$$

(*)

- $\pi(t)1 \neq 1, \ \forall t > 0$

$F(1,t) = \{x_0 \in \mathbb{R} : \pi(t)x_0 = 1\} = \{x_0 \in \mathbb{R} : x_0 = e^t\}$, logo $F(1,t) \cap M = \emptyset, \forall t \neq 0$.

tubo

$S = \{1\}$, $L = \{1/2\}$, $\lambda = \ln 2$

- $F(L,\lambda) = \{x_0 \in \mathbb{R} : x_0 e^{-\ln 2} = 1/2\} = \{1\} = S$
- $F(L,[0,2\lambda]) = \{x_0 \in \mathbb{R} : x_0 e^{-t} = 1/2$ para algum $t \in [0,2\lambda]\}$

$= \{x_0 \in \mathbb{R} : x_0 = \frac{1}{2} e^{t}$ " " " $\} = [1/2, 2]$

contém vizinhança de $x = 1$.

- $F(L,\nu) = \{x_0 \in \mathbb{R} : x_0 e^{-\nu} = 1/2\} = \{\frac{1}{2} e^{\nu}\}$ logo

$$F(L,\nu) \cap F(L,\mu) = \emptyset \ , \ 0 \leq \nu < \mu \leq 2\lambda$$

- $F(L,[0,2\lambda]) \cap M = S$.

- Atrator $A = \{0\} \cup (1,2]$

- precompacto

- $\bar{A} \setminus M = \{0\} \cup [1,2] \setminus \{1\} = A$. ✓

- A é $\tilde{\pi}$-invariante. ✓

  - $\tilde{\pi}(t) A \subset A$, $\forall t \geq 0$

  - seja $x_0 \in (1,2]$ e $t \geq 0$. Defina $s = \ln(2/x_0) \geq 0$

- se $t \leq s$ então defina

$$1 < y = x_0 e^{t} \leq x_0 e^{s} = 2 \text{, logo } y \in A.$$

e $\tilde{\pi}(t) y = \pi(t) y = x_0$.

- se $t > s$ então seja $n \in \mathbb{N}$ t.q. $(n-1)\ln 2 < t-s \leq n \ln 2$

e $r = t - s - (n-1)\ln 2$, $0 < r \leq \ln 2$.

Defina $y = e^{r} \in (1,2] \in A$ e

$$\tilde{\pi}(t) y = \tilde{\pi}(s + (n-1)\ln 2 + r) y$$

$$= \tilde{\pi}(s)\tilde{\pi}((n-1)\ln 2)\underbrace{\tilde{\pi}(r) y}_{\tilde{\pi}(r)e^{r} = 2}$$

$$= \tilde{\pi}(s) 2 = 2 e^{-\ln(2/x_0)} = x_0.$$

$\therefore A \subset \tilde{\pi}(t) A$

- $\tilde{\pi}(t)$ atrai limitados

— Se $x_0 < 0$ então dado $\varepsilon > 0$, tome $t_0 > 0$ tal que

$$(|x_0| + 1)e^{-t} < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Então $\tilde{\pi}(t)[x_0, 1] \subset (-\varepsilon, \varepsilon), \quad \forall t \geq t_0.$

— Se $x_0 > 2$ tome $t_0 \geq 0$ t.q.

$$|x_0| e^{-t} < 2 + \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0$$

Então $\tilde{\pi}(t)[2, x_0] \subset (1, 2+\varepsilon], \quad \forall t \geq t_0.$

$\square$

- Falar das propriedades de f.