Geometria quase habitual no Plano Hiperbólico*

Celso M. Doria
UFSC - Depto. de Matemática
cmdoria@mtm.ufsc.br

21 de setembro de 2002

---

1 Introdução

Na Geometria Euclidena, *ponto, reta e plano* são os elementos primitivos (não são definidos). Um dos axiomas de Euclides afirma que uma reta é determinada por 2 pontos. No ponto de vista mais moderno de geometria, uma reta é uma curva que realiza a menor distância entre dois pontos. Desta forma, a distância tornou-se um elemento primitivo da teoria.

Com o emprego de um modelo para a Geometria Hiperbólica, munido com o conceito de distância, é possível descrever as curvas que correspondem as retas no caso euclideano, denominadas de geodésicas hiperbólicas.

Alguns aspectos que diferenciam a Geometria Hiperbólica da Geometria Euclideana são discutidos e visualizados no modelo apresentado.

Considere $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ o semi-plano superior e $< .,. >$ o produto interno euclideano. O modelo hiperbólico que utilizamos é o do semi-plano superior

$$\mathbb{H}^2 = (\mathbb{R}^2_+, g),$$

onde $g_{(x,y)}(u,v) = \frac{1}{y^2} < u, v >$.

2 Métrica Hiperbólica

Seja $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^@ \mid y > 0\}$, o semi-plano superior de $\mathbb{R}^2$, e considere a métrica riemanniana assim definida: sejam $v = (v_1, v_2)$, $w = (w_1, w_2)$ pertencentes à $T_{(x,y)}\mathbb{R}^2_+$, então

$$g_{(x,y)}(v,w) = \frac{1}{y^2}(v_1 w_1 + v_2 w_2).$$

Em termos da métrica euclideana, temos que

$$g_{(x,y)}(v,w) = \frac{1}{y^2} < v, w > .$$

Associada a métrica g temos a conexão de Levi-Civita sobre $\mathbb{R}^2_+$ cuja curvatura é $K = -1$. O valor da curvatura é apenas uma das consequências importantes da métrica.

Definição 2.0.1. *O Espaço Hiperbólico é a superfície riemanniana*

$$\mathbb{H}^2 = (\mathbb{R}^2_+, g)$$

*palestra ministrada na I Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, UFMG, 17/10/2002.

O comprimento de uma curva $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{H}^2$, onde $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ é dado por

$$L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{(y(t))^2} dt.$$

Exemplos: Em cada um dos itens abaixo, considere $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{H}^2$ uma curva definida pela expressão dada, vamos determinar o comprimento $L(\gamma)$.

1. $\gamma(t) = (a, t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ (semi-reta vertical).

$$\gamma'(t) = (0, 1) \quad \Rightarrow \quad L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{t} = ln(\frac{t_1}{t_0}).$$

2. $\gamma(t) = (t, at + b)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ (semi-reta).
   Sejam $y_0 = \gamma(t_0)$ e $y_1 = \gamma(t_1)$.

$$\gamma'(t) = (1, a) \quad \Rightarrow \quad L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\frac{1 + a^2}{(at + b)^2}} dt =$$

$$= \sqrt{1 + a^2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{at + b} = \sqrt{1 + a^2}.ln\left(\frac{y_1}{y_0}\right).$$

3. $\gamma(\theta) = (Rcos(\theta) + a, Rsen(\theta) + b)$, onde $R < b$, $t_0 = 0$ e $t_1 = 2\pi$ (círculo de raio R e centro em (a, b)).

$$\gamma'(t) = R(-sen(\theta), cos(\theta)) \quad \Rightarrow \quad L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{b + Rsen(\theta)}$$

   Substituindo $t = tg(\theta/2)$, temos que $d\theta = \frac{2.dt}{1+t^2}$ e

$$L(\gamma) = \frac{2R}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t + \frac{R}{b})^2 + \frac{b^2 - R^2}{b^2}}$$

   Substituindo novamente por $u = t + \frac{R}{b}$, temos $du = dt$ e

$$L(\gamma) = \frac{2R}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^2 + \frac{b^2 - R^2}{b^2}} =$$

$$= 2R\frac{b}{b^2 - R^2}.arctg\left(\frac{b}{b^2 - R^2}(bt + R)\right) |_{-\infty}^{\infty} = 2\pi R\frac{b}{b^2 - R^2}.$$

   No caso limite, $\lim_{b \to R} L(\gamma) = \infty$, uma vez que o círculo aproxima-se do eixo-x. Os cálculos efetuados neste exemplo não extendem-se ao caso quando $b = 0$.

   A distância entre dois pontos p e q em $\mathbb{H}^2$é definida por

$$d(p, q) = \inf_{\gamma \in \Omega(p,q)} L(\gamma).$$

   Para determinar $d(p, q)$, explicitamente, em função de p e q, precisamos descrever as geodésicas em $\mathbb{H}^2$. Antes disto, vamos estudar a geometria das transformações de inversão sobre círculos.

2.1 Reflexões em $\mathbb{H}^2$

Dentre as isometria de $\mathbb{E}^2$, as únicas que são isometrias de $\mathbb{H}^2$são as reflexões sobre retas verticais e as suas composições. Vejamos o seguinte;

Proposição 2.1.1. *Seja l uma reta vertical em $\mathbb{R}^2_+$, então a transformação $r_l : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+$, induzida pela reflexão euclideana sobre l, é uma isometria de $\mathbb{H}^2$.*

Demonstração. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ um ponto fixo e suponha que $l = \{(\alpha, y) \mid y > 0\}$. Assim, temos que

$$r_l(x,y) = (-x + 2\alpha, y) \quad dr_l = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$g_{(x,y)}(dr_l.v, dr_l.w) = \frac{1}{y^2} < dr_l.v, dr_l.w >= \frac{1}{y^2} < v, w >= g_{(x,y)}(v,w).$$

□

Para descrever as outras geodésicas de $\mathbb{H}^2$, estudaremos um tipo especial de transformação no plano. Para isto, consideraremos o círculo de raio R e centro em $P = (a, b)$ como o conjunto

$$S_R(P) = \{(x,y) \mid \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2\}, \quad S_R = S_R(O).$$

Definição 2.1.2. *Uma transformação $r_{S_R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma inversão sobre S_R se*

$$\mid r_{S_R}(v) \mid . \mid v \mid = R^2, \quad onde \quad \mid v \mid = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Em coordenadas, temos que

$$r_{S_R}(x,y) = R^2 (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$$

Observação 2.1.3. Se considerarmos $\mathbb{R}^2$ como o espaço complexo $\mathbb{C}$, isto é, identificarmos $(x, y) \rightsquigarrow z = x + iy$, segue que a transformação r_{S_R} é dada por

$$r_{S_R}(z) = R^2 . \frac{z}{\mid z \mid^2} = \frac{R^2}{\bar{z}}.$$

Assim, $r_{S_R} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é anti-holomorfa, ou seja, preserva ângulo e inverte a orientação.

Proposição 2.1.4. *A transformação de inversão $r_{S_R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tem as seguintes propriedades:*

1. *Se $l \subset \mathbb{R}^2$ é uma reta, então $r_{S_R}(l)$ é ou uma reta ou um círculo.*
2. *Se $C \subset \mathbb{R}^2$ é um círculo, então $r_{S_R}(C)$ é ou uma reta ou um círculo.*

Demonstração. Observamos que

$$\begin{cases} u = R^2 \frac{x}{x^2+y^2} \\ v = R^2 \frac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{u}{v} = \frac{x}{y} \\ u^2 + v^2 = \frac{R^4}{x^2+v^2} \end{cases},$$

da onde

$$x = R^2 \frac{u}{u^2+v^2}, \quad y = R^2 \frac{v}{u^2+v^2}$$

1. Suponha que $l = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$. Se substituirmos as expressões acima, obtemos

$$R^2 . \frac{au + bv}{u^2+v^2} + c = 0$$

Portanto, há duas possibilidades a serem consideradas;

(a) $c = 0$.
Segue que

$$au + bv = 0.$$

(b) $c \neq 0$.
Neste caso, temos que

$$R^2au + R^2bv + c(u^2 + v^2) = 0,$$

o que implica em que

$$\left(u + \frac{aR^2}{2c}\right)^2 + \left(v + \frac{bR^2}{2c}\right)^2 = R^4.\frac{a^2 + b^2}{4c^2}.$$

2. Suponha que $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$. Ao substituirmos x e y em função de u e v na relação que define o círculo, obtemos a relação

$$\left(R^2u - a(u^2 + v^2)\right)^2 + \left(R^2v - b(u^2 + v^2)\right)^2 = r^2(u^2 + v^2)^2$$

Na expressão acima, se a expandirmos mantendo os termos de $(u^2 + v^2)$, chegamos aos seguintes casos;

(a) $a^2 + b^2 - r^2 = 0$.
Neste caso, temos que

$$au + bv = \frac{R^2}{2}.$$

(b) $a^2 + b^2 - r^2 \neq 0$.
Após completarmos os quadrados, obtemos a relação

$$\left(u - \frac{aR^2}{a^2 + b^2 - r^2}\right)^2 + \left(v - \frac{bR^2}{a^2 + b^2 - r^2}\right)^2 = \frac{r^2R^4}{(a^2 + b^2 - r^2)^2}.$$

□

Proposição 2.1.5. *Seja $S_R(P) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + y^2 = R^2\}$ um círculo cujo centro encontra-se em $P = (a, 0)$ sobre o eixo-x. Então, a inversão $r_{S_R(P)}$ é uma isometria de $\mathbb{H}^2$.*

Demonstração. Consideremos o caso geral $(b \neq 0)$

$$r_{S_R(P)}(x, y) = \frac{R^2}{(x - a)^2 + (y - b)^2}(x - a, y - b) + (a, b) = (u, v).$$

Segue que $dr_{S_R(P)} : T_{(x,y)}\mathbb{R}^2 \to T_{(u,v)}\mathbb{R}^2$ aplicada ao vetor $w = (w_1, w_2) \in T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$ é dado por

$$dr_{S_R(P)}.w = \frac{R^2}{[(x - a)^2 + (y - b)^2]^2}\begin{pmatrix} (y - b)^2 - (x - a)^2 & -2(x - a)(y - b) \\ -2(x - a)(y - b) & (x - a)^2 - (y - b)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Assim,

$$g_{(u,v)}(dr_{S_R(P)}.w, dr_{S_R(P)}.w) = R^4.\frac{w_1^2 + w_2^2}{\left(R^2(y - b) + b[(x - a)^2 + (y - b)^2]\right)^2}.$$

Se $b = 0$, a expressão acima torna-se

$$g_{(u,v)}(dr_{S_R(P)}.w, dr_{S_R(P)}.w) = \frac{w_1^2 + w_2^2}{y^2} = g_{(x,y)}(w, w).$$

Isto implica em que a transformação

$$r_{S_R(P)}(x,y) = \frac{R^2}{(x-a)^2+y^2}(x-a,y)+(a,0)$$

induz um difeomorfismo $r_{S_R(P)} : \mathbb{R}^{@}_{+} \to \mathbb{R}^2_+$ que preserva a métrica hiperbólica. Consequentemente, $r_{S_R(P)}$ definida pela expressão acima é uma isometria. □

Para fins de simplicidade, daqui para a frente nos referiremos a inverŝao sobre um círculo como sendo uma reflexão sobre o círculo.

Observação 2.1.6. Interpretadas como funcções de uma váriavel complexa, temos que as reflexões correspondem as funções anti-holomorfas

$$r_l(z) = -\bar{z}+2\alpha, \quad r_{S_R(P)} = \frac{R^2}{\bar{z}-\bar{z}_0}+z_0.$$

2.2 Geodésicas de $\mathbb{H}^2$

Proposição 2.2.1. *A semi-reta $l = \{(a,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ é uma geodésica de $\mathbb{H}^2$qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $\gamma : [t_0,t_1] \to \mathbb{H}^2$ uma parametrização, dada $\gamma(t) = (a,t)$, de l reta e sejam $P_0 = (a,t_0)$ e $P_1 = (a,t_1)$. O comprimento de γ em $\mathbb{H}^2$é

$$L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g(\gamma`(t),\gamma`(t))}dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{t} = ln(\frac{t_1}{t_0}).$$

Seja $\beta : [t_0,t_1] \to \mathbb{H}^2$, dada por $\beta(t) = (x(t),y(t))$, uma outra curva ligando os pontos P_0 e P_1; assuma (sem perda de generalidade) que $\beta(t_0) = (a,t_0)$ e $\beta(t_1) = (a,t_1)$. Assim,

$$L(\beta) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{y(t)}\sqrt{((x`)^2+(y`)^2)}dt \geq \int_{t_0}^{t_1} \frac{y`(t)}{y(t)}dt = ln(\frac{t_0}{t_1}).$$

Portanto, $L(\beta) \geq L(\gamma)$, o que implica que γ minimiza a distância e por isto é uma geodésica de $\mathbb{H}^2$. □

Corolário 2.2.2. *Os círculos com centro sobre o eixo-x são geodésicas de $\mathbb{H}^2$.*

Demonstração. Consideremos o semi-círculo $C = \{(x,y) \mid (x-\alpha)^2+y^2 = r^2\} \cap \mathbb{H}^2$, vamos mostrar que em $\mathbb{H}^2$existe uma isometria levando C sobre uma semi-reta vertical. Para isto, vamos considerar a isometria obtida pela reflexão sobre o círculo

$$S_R(P) = \{(x,y) \in \mathbb{H}^2 \mid (x-a)^2+y^2 = R^2\}.$$

A imagem de C é conjunto dos pontos $(u,v) \in \mathbb{H}^2$ satisfazendo a relação

$$R^4 + 2R^2(a-\alpha)(u-a) = [r^2-(a-\alpha)^2][(u-a)^2+v^2].$$

Portanto, se $a = \alpha + r$ ou $a = \alpha - r$, então a imagem de C é a semi-reta

$$l = \{(a - \frac{R^2}{2(a-\alpha)}, y) \mid y > 0\}.$$

Concluímos que a reflexão sobre qualquer círculo com centro em $(a,0)$, onde $a = \alpha + r$, ou $a = \alpha - r$ leva C sobre l. A conclusão segue do teorema anterior. □

Theorem 2.2.3. *Se $\gamma : [0,1] \to \mathbb{H}^2$ é uma geodésica em $\mathbb{H}^2$, então são as seguintes as possibilidades;*

1. *γ descreve um segmento sobre a reta vertical.*
2. *γ descreve uma curva sobre um semi-círculo centrado no eixo-x.*

Demonstração. Sejam p e q dois pontos quaisquer em $\mathbb{H}^2$e $\beta : [0,1] \to \mathbb{H}^2$ uma geodésica minimizando a distância entre eles. Há dois casos a serem considerados;

1. p e q encontram-se sobre uma reta vertical l.
   Segue que β deve ser o segmento vertical sobre l que os ligando.

2. p e q não encontram-se sobre uma mesma reta vertical.
   Neste caso, consideremos o círculo C centrado no eixo-x e passando por p e q. Vimos que existe uma isometria $r : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ tal que a imagem $r(C)$ é uma reta vertical. De acordo com o item anterior, a única possibilidade é que a imagem $r(\beta)$ esteja sobre a reta vertical $r(C)$, que por sua vez, é a imagem do arco contido em C que liga p à q.

□

Corolário 2.2.4. *Dados 2 pontos p e q em $\mathbb{H}^2$, existe uma única geodésica minimizante ligando p à q.*

2.3 Isometrias de $\mathbb{H}^2$

Definição 2.3.1. *As matrizes reais 2×2 com determinante igual a 1 formam o Grupo Linear Especial*

$$SL_2(\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1\}.$$

Theorem 2.3.2. *O grupo das isometrias de $\mathbb{H}^2$é isomorfo ao grupo*

$$PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$$

Se identificarmos o plano $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{C}$, então uma isometria $f\mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ age assim;

$$f(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

2.4 Distância Hiperbólica

Tendo em vista que com a métrica riemanniana hiperbólica $g_{(x,y)}(u,v) = \frac{1}{y^2} < u, v >$ podemos calcular o comprimento de uma curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{H}^2$, podemos definir a métrica hiperbólica $d_{\mathbb{H}^2} : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$d_{\mathbb{H}^2}(p,q) = \inf_{\eta \in \Omega(p,q)} L(\eta).$$

Considerando que existe uma geodésica $\gamma_{p,q} \in \Omega(p,q)$ minimizando a distância entre os pontos $p, q \in \mathbb{H}^2$, segue que $d(p,q) = L(\gamma_{p,q})$.

Lembramos que para $d_{\mathbb{H}^2} : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$ definir uma distância é preciso que satisfaça as seguintes condições:

1. $d_{\mathbb{H}^2}(p,q) \geq 0$, sendo que a igualdade ocorre $\Leftrightarrow p = q$.

2. $d_{\mathbb{H}^2}(p,q) \leq d_{\mathbb{H}^2}(p,r) + d_{\mathbb{H}^2}(r,q)$ (desigualdade triangular).

A primeira condição é trivial. Para verificar a segunda, sejam $\gamma_{p,q}$, $\gamma_{p,r}$ e $\gamma_{r,q}$ as respectivas geodésicas minimizantes. Observamos que a curva $\gamma_{r,q} * \gamma_{p,r} : [0,1] \to \mathbb{H}^2$ definida por

$$\gamma_{r,q} * \gamma_{p,r}(t) = \begin{cases} \gamma_{p,r}(\frac{t}{2}), & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 1/2, \\ \gamma_{r,q}(2t-1), & \text{se} \quad 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

pertence a $\Omega(p,q)$. Portanto,

$$L(\gamma_{p,q}) = \inf_{\alpha \in \Omega(p,q)} \leq L(\gamma_{r,q} * \gamma_{p,r}) = L(\gamma_{p,r}) + L(\gamma_{r,q}).$$

Lema 2.4.1. *Sejam $p, q \in \mathbb{H}^2$ dois pontos cujas representações como números complexos sejam z e w, respectivamente. Conisderando que $g : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ é uma isometria e $I(z)$ é a parte imaginária de z, então,*

$$\frac{\mid g(z) - g(w) \mid}{[I(g(z)).I(g(w))]^{1/2}} = \frac{\mid z - w \mid}{(I(z).I(w))^{1/2}}$$

Demonstração. Podemos verificar diretamente que,

$$g(z) - g(w) = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{aw+b}{cw+d} = \frac{z-w}{(cz+d)(cw+d)}$$

Também temos que,

$$I(g(z)) = \frac{I(z)}{\mid cz+d \mid^2},$$

da onde observamos que

$$\frac{\mid g(z) - g(w) \mid}{[I(g(z)).I(g(w))]^{1/2}} = \frac{\mid z-w \mid}{(I(z).I(w))^{1/2}}$$

□

Proposição 2.4.2. *Sejam $p, q \in \mathbb{H}^2$ dois pontos cujas representações como números complexos sejam z e w, respectivamente. A distância entre dois pontos p e q em $\mathbb{H}^2$ é*

$$d_{\mathbb{H}^2}(p,q) = ln\left(\frac{\mid z-\bar{w} \mid + \mid z-w \mid}{\mid z-\bar{w} \mid - \mid z-w \mid}\right).$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $p = (0,a) = ia$ e $q = (0,b) = ib$ e $a < b$. Vimos que $d_{\mathbb{H}^2}(p,q) = ln(b/a)$, ao denotarmos $d = d(p,q)$ obtemos $e^d = b/a$ e $e^{-d} = a/b$. Consequentemente,

$$cosh(d) = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) = 1 + \frac{1}{2}\frac{\mid z-w \mid^2}{I(z).I(w)}.$$

Se aplicarmos o lema anterior temos que a fórmula acima pode ser aplicada para qualquer posição relativa entre p e q, pois,

$$cosh(d(g(z),g(w))) = 1 + \frac{\mid g(z)-g(w) \mid^2}{I(g(z)).I(g(w))} = cosh(d(z,w))$$

Segue da identidade $cosh(d) = 1 + 2senh^2(d/2)$ que

$$senh(\frac{d}{2}) = \frac{\mid z-w \mid}{(I(z).I(w))^{1/2}}$$

e de $cosh(d) = 2cosh^2(d/2) - 1$ que

$$cosh^2(\frac{d}{2}) = \frac{\mid z-\bar{w} \mid}{2(I(z).I(w))^{1/2}}, \qquad \mid z-\bar{w} \mid = \mid \bar{z}-w \mid.$$

Portanto,

$$tanh(\frac{d}{2}) = \frac{\mid z-w \mid}{\mid z-\bar{w} \mid}.$$

Desta forma, uma vez que $tanh(d/2) = \frac{e^d-1}{e^d+1}$, segue que

$$e^d = \frac{\mid z-\bar{w} \mid + \mid z-w \mid}{\mid z-\bar{w} \mid - \mid z-w \mid},$$

ou seja,

$$d = ln\left(\frac{\mid z-\bar{w} \mid + \mid z-w \mid}{\mid z-\bar{w} \mid - \mid z-w \mid}\right).$$

□

Definição 2.4.3. *O círculo hiperbólico de centro em p e raio R é o conjunto*

$$S_R(p) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d_{\mathbb{H}^2}(p, z) = R\}.$$

Decorre dos detalhes da demonstração anterior que

$$tanh(d(z, w)/2) = \frac{\mid z - w \mid}{\mid z - \bar{w} \mid}.$$

Desta maneira, se $d(z, w) = R$ temos que

$$\mid z - w \mid = tanh(R/2). \mid z - \bar{w} \mid$$

Fazendo $c = tanh(R/2)$ $(0 \leq c < 1)$, $p = a + ib$ e $w = x + iy$ temos que a equação acima implica que

$$(1 - c^2)(x - a)^2 + (y - b)^2 - c^2(y + b)^2 = 0.$$

Após expandir e completar os quadrados, obtemos

$$(x - a)^2 + \left(y - b\frac{1 + c^2}{1 - c^2}\right)^2 = \left(\frac{2bc}{1 - c^2}\right)^2.$$

A conclusão da discussão acima é que o círculo hiperbólico com centro em $p = (a, b)$ e raio R é um círculo euclideano com centro em $\tilde{p} = (a, b')$, onde $b' = b\frac{1+c^2}{1-c^2})$, e raio $\rho = \frac{2bc}{1-c^2}$. Este fato é não trivial! Notamos que, $\tilde{p} \in \mathbb{H}^2$ e $\rho < b\frac{1+c^2}{1-c^2})$.
Em função de R,

$$\tilde{p} = (a, b.cosh(R)), \quad \Rightarrow \quad b.cosh(R) \geq b,$$

$$\rho(R) = b.senh(R) \quad \Rightarrow \quad \lim_{R \to 0} \rho(R) = 0, \quad \lim_{R \to \infty} \rho(R) = \infty.$$

Desta forma, podemos determinar o comprimento do círculo hiperbólico $S_R(p)$. Considere a parametrização

$$\gamma(\theta) = (\rho cos(\theta) + a, \rho sen(\theta) + b') \Rightarrow \mid \gamma'(\theta) \mid_{\mathbb{H}^2} = \frac{\rho}{b' + \rho sen(\theta)}$$

Assim,

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\theta}{b' + \rho sen(\theta)} = 2\pi bcosh(R).senh^2(R).$$

2.5 Área de uma região em $\mathbb{H}^2$

Pelo que foi visto na seção, o elemento de área em $\mathbb{H}^2$ é $dA = \sqrt{det(g)}dxdy$ e, por isto, a área de uma região $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ é dada por

$$A(\Omega) = \int\int_{\Omega} \frac{1}{y^2} dxdy$$

Definição 2.5.1. *Um gomo hiperbólico em $\mathbb{H}^2$ é uma região limitada lateralmente por duas retas verticais (lados) e inferiormente por um arco de um círculo com centro sobre o eixo-x (base).*

Proposição 2.5.2. *Seja C a base de um gomo hiperbólico Ω e l_1 e l_2 os lados. Se o ângulo formado na interseção de l_1 com C é α o ângulo formado na interseção de l_2 com C é β, então a área de Ω é*

$$A(\Omega) = \pi - (\alpha + \beta).$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que l_1 encontra-se a esquerda da origem enquanto l_2 esta ́ direita. Sejam $p_1 = l_1 \cap C$ e $p_2 = l_2 \cap C$ os pontos de interseção. Seja $C = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \mid (x-a)^2 + y^2 = R^2\}$. Desta forma, a ordenada de p_1 é $Rcos(\pi - \alpha)$ e a de p_2 é $Rcos(\beta)$. Consequentemente, temos que

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \mid Rcos(\pi - \alpha) \leq x \leq Rcos(\beta), \frac{1}{\sqrt{R^2 - (x-a)^2}} \leq y \leq \infty\},$$

cuja área é dada por

$$A(\Omega) = \int_{Rcos(\pi-\alpha)}^{Rcos(\beta)} \int_{\sqrt{R^2-(x-a)^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dydx =$$

$$\int_{Rcos(\pi-\alpha)}^{Rcos(\beta)} \frac{1}{\sqrt{R^2 - (x-a)^2}} dx = \pi - (\alpha + \beta)$$

□

Corolário 2.5.3. *A área de um triângulo hiperbólico $\triangle$, cujos ângulos internos são α, β e γ , é dada por*

$$A(\triangle) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Demonstração. Sejam A, B e C os vértices de $\triangle$ e C_{AB}, C_{BC} e C_{CA} os círculos definidos pelas geodésicas que formam $\triangle$. Agora, seja $f : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ uma isometria tal que $f(C_{BC}) = l_1$, onde l_1 é uma reta vertical. Seja l_2 a reta vertical passando por $f(A)$. Portanto, surgem dois gomos hiperbólicos:

1. Ω_1 limitado por l_1, l_2 e C_{AB}. Os ângulos internos de Ω_1 são α_1 e $\pi - \beta$.
2. Ω_2 limitado por l_1, l_2 e C_{AC}. Os ângulos internos de Ω_2 são α_2 e γ.

$$A(\triangle) = A_2 - A_1 = [\pi - (\alpha_1 + \pi - \beta)] - [\pi - (\alpha_2 + \gamma)] =$$

$$= \pi - [(\alpha_2 - \alpha_1) + \beta + \gamma] = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

□

Referências

[1] BEARDON, A.: *The Geometry of Discrete Groups*, Springer-Verlag, GTM 91, 1982.

[2] DORIA, C.M: *Notas sobre Geometria Euclidena, Esférica e Hiperbólica.*

[3] SCOTT, PETER: *The Geometries of 3-Manifolds*, Bull. London Math. Soc., 15 (1983), 401-487.

***** FIM *****