Topologia
X encontro Brasileiro

Operadores de Dirac em Variedades II

X Encontro Brasileiro de Topologia 1996

Operadores de Dirac
em
Variedades

ICMSC

PREFACIO

Estas notas foram escritas para o mini-curso "OPERADORES DE DIRAC" oferecido na X Escola Brasileira de Topologia , realizada no ICMSC-USP em Julho/1996. São Carlos. Elas são complementares as notas escritas pelo Professor Antonio Conde.

Nosso objetivo é construir Operadores de Dirac através da motivação de exemplos em R^n . Ao generalizar para Variedades Diferenciaveis procuramos discutir a existência de Estruturas Spin sobre um Fibrado Vetorial e a construção de uma Conexão Spinorial sobre o mesmo.

Quanto ao estado bruto em que se encontram, em decorrência do curto tempo para escrevê las, gostaria de mencionar que elas foram escritas baseadas no livro "SPIN GEOMETRY" , escrito por LAWSON-MICHELSON , PRINCETON PRESS. Devido a excelência da referência, os interessados em aprofundar-se na formalizacão e aplicacões deverão recorrer a ela.

Foram incluídos alguns exemplos de COMPLEXOS ELIPTICOS, discutidos sem a análise necessária, visando mostrar que a aplicação mais profunda ocorre através do estudo do INDICE do OPERADOR . De fato, este é um dos capítulos mais profundos da Geometria-Topologia que culminou no famoso TEOREMA DE ATIYAH-SINGER. Este Teorema , por ser uma mistura de técnicas analíticas e topológicas, tem consequências na Física Teórica, onde a intuicão física tem oferecidos diferentes idéias de demonstracão e profundas aplicações como no estudo das Variedades Diferenciáveis de dimensão 4 através da recente descoberta da Teoria de SEIBERG-WITTEN.

Deixamos aqui nossos agradecimentos a comissão organizadora da X EBT.

Celso M. Doria

II - Geometria SPIN

1 - Estrutura SPIN sobre Fibrados

Na Teoria de Variedades Diferenciáveis os conceitos de estrutura vetorial e estrutura de Grupo surgem ao considerarmos fibrados Vetoriais e fibrados Principais. De fato, isto significa estudar famílias de espaços vetoriais (grupos) parametrizados por uma variedade Diferenciável. O mesmo pode ser feito ao considerar espaços fibrados cujas fibras são Álgebras de Clifford.

Em particular, suponha que $\pi: E \to X$ é um fibrado vetorial Riemanniano. Então em cada fibra $E_x = \pi^{-1}(x)$, a forma quadrática $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle$ pode ser usada para construir a Álgebra de Clifford $Cl(E_x)$. O resultado é que o espaço $Cl(E) = \bigcup_{x \in X} Cl(E_x)$ é um fibrado de Álgebras sobre X denominado Fibrado de Clifford de E. Todas as propriedades naturais de $Cl(E_x)$ são herdadas por $Cl(E)$.

Ao estudar fibrados vetoriais sobre uma variedade Diferenciável X obtem-se relações com a topologia de X. O mesmo ocorre ao considerarmos Fibrados de Clifford sobre X.

Para descrever a dependência do Fibrado $Cl(E)$ sobre o fibrado E devemos entender o conceito de Fibrado Associado.

Definição: Seja $\pi: P \to X$ um Fibrado Principal com grupo G, e seja $GL(V)$ o grupo de automorfismos de um espaço vetorial V. Para cada representação $\rho: G \to GL(V)$ constrói-se o Fibrado Associado