EDITORA CIÊNCIA MODERNA

Rua Alice Figueiredo, 46 – Riachuelo
CEP: 20950-150 – Rio de Janeiro – RJ
Tel: (21) 2201-6662 – Fax: (21) 2201-6896
www.lcm.com.br - lcm@lcm.com.br

Rio de Janeiro, 19 de abril de 2016.

DECLARAÇÃO

Declaramos a quem interessar possa que o Sr. **CELSO MELCHIADES DORIA,** brasileiro, portador da Carteira de Identidade No. 4816990-0, emitida pela SSP/SC, registrado no CPF-MF sob No. 596271747-34 possui o livro intitulado ***Cálculo Avançado*** em processo de publicação junto a nossa comissão editorial (prelo), cuja data de lançamento estimamos ser no semestre 2016.1.

Editora Ciência Moderna Ltda.
Departamento Editorial
traducao@lcm.com.br

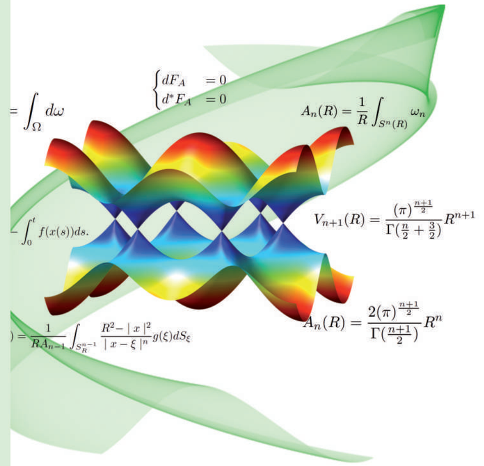
CNPJ 32.221.186/0001-03

INSC. ESTADUAL 83.671.602

Celso Melchiades é PhD em Matemática pela University of Warwick, Inglaterra.
Sua área de trabalho é Análise Global, com concentração na Geometria dos Campos de Gauge e aplicações à Topologia e à Geometria das Variedades Diferenciáveis.
Possui pós-doutorado: Mathematical Institute, Oxford University, Inglaterra e Michigan State University, USA.
É professor de Matemática da UFSC, Florianópolis-SC, desde 1993.

"Cálculo Avançado" desenvolve as técnicas necessárias para o estudo da Teoria de Diferenciação em Espaços de Banach e também para a demonstração do Teorema de Stokes. Na primeira parte, há uma introdução ao conteúdo de operadores lineares em espaços de Banach com exemplos clássicos de operadores compactos e de Fredholm, para definir a derivada de Fréchet e para construir exemplos de aplicações diferenciáveis entre espaços de Banach. O Teorema da Função Inversa compõe esta primeira parte.

Este livro apresenta os Campos Vetoriais e Fluxos, incluindo o Teorema de Frobenius. As Formas Diferenciais são introduzidas e aplicadas para provar o Teorema de Stokes e definir os grupos de Cohomologia de De Rham. No Capítulo 8, são feitas as aplicações do Teorema de Stokes à teoria das Funções Harmônicas e também uma abordagem geométrica das equações de Maxwell do Eletromagnetismo.



CÁLCULO AVANÇADO

EDITORA CIÊNCIA MODERNA
WWW.LCM.COM.BR

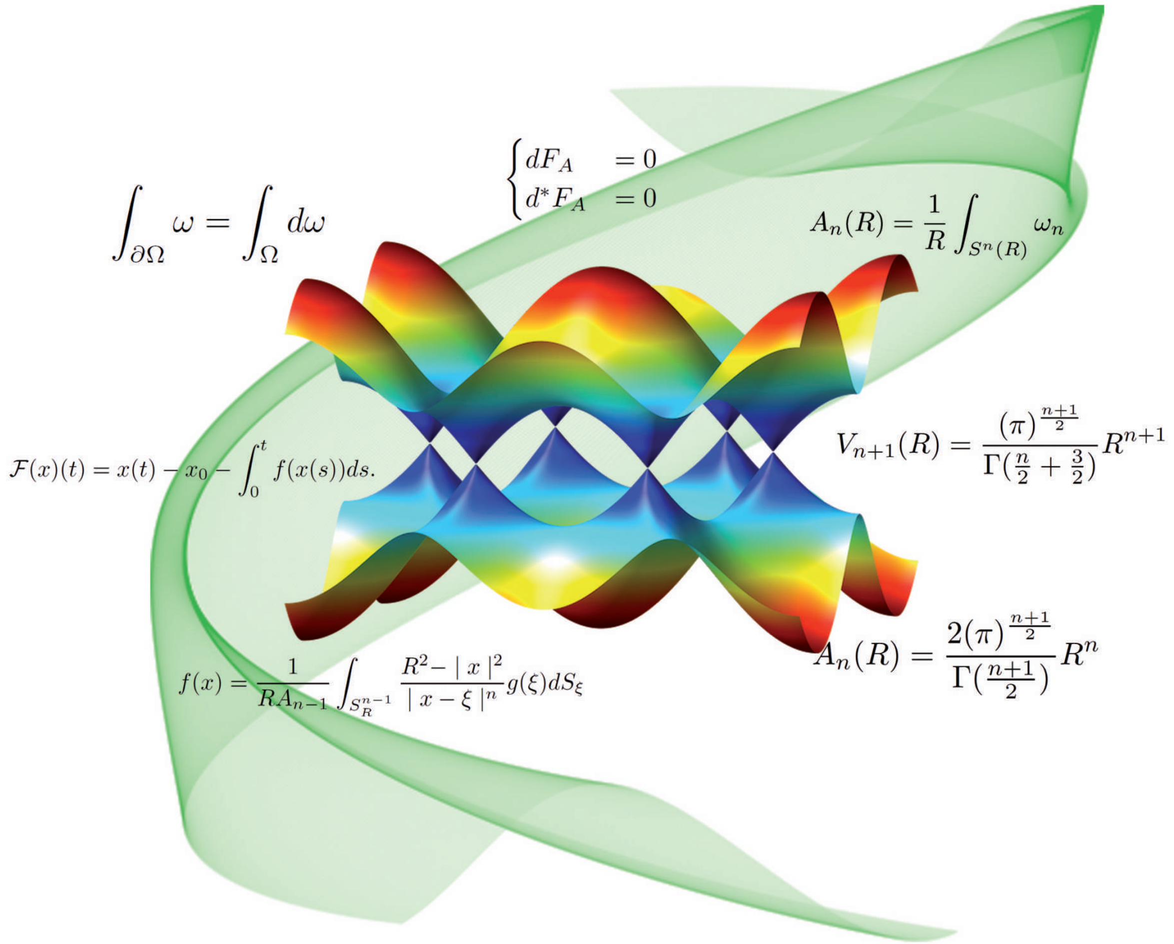
DISPONÍVEL TAMBÉM EM VERSÃO DIGITAL
CM ebooks

CELSO MELCHIADES DORIA

CÁLCULO AVANÇADO

CM

CELSO MELCHIADES DORIA



CÁLCULO AVANÇADO

EDITORA CIÊNCIA MODERNA

Este material destina-se ao estudo das técnicas de diferenciação mais abstratas aplicadas para resolver problemas em espaços funcionais. Há um capítulo sobre diferenciação em espaços euclidianos. O texto também interessa aos que visam aprender integração via formas diferenciais e provar o Teorema de Stokes na sua total generalidade, além das propriedades topológicas codificadas nas formas através dos grupos de Cohomologia.

Celso Melchiades Doria

Cálculo Avançado

Introdução

O objetivo do texto é introduzir as técnicas de Diferenciação e de Integração de aplicações diferenciáveis e mostrar algumas aplicações.

As primeiras disciplinas de Cálculo (I e II) introduzem as técnicas de Derivação e de Integração de funções de uma variável real, em seguida Cálculo III estende as técnicas para funções de várias variáveis reais. Para funções de uma variável real, os principais resultados da teoria são (a) a existência de máximos e mínimos para uma função diferenciável definida num conjunto compacto e (b) o Teorema Fundamental do Cálculo. Ao tratarmos o caso de várias variáveis, os principais resultados são generalizações dos casos (a) e (b), sendo que o caso (b) é conhecido como Teorema de Stokes.

Na época da passagem do milênio, no final de 1999 do calendário Gregoriano, haviam muitas especulações sobre os resultados de maior importância alcançados no 1º milênio. Um certo dia, na sala de espera de um consultório médico, havia uma revista listando alguns resultados que consideravam de grande destaque entre os obtidos para o desenvolvimento do conhecimento humano. Para a minha grata surpresa, um dos resultados citados era o Teorema Fundamental do Cálculo. Não havia pensado nesta possibilidade, de pronto concordei com a aludida inclusão, não somente por ser um matemático mas também porque é um fato que toda a Mecância Clássica, a Termodinâmica e o Eletromagnetismo foram desenvolvidos com o uso das técnicas do Cálculo. Por conseguinte, os avanços tecnológicos alcançados pelas ciências exatas e sociais dependeram em larga escala do desenvolvimento do Cálculo.

De forma geral, quando nos referimos ao Cálculo estamos nos referindo as técnicas de diferenciação e de integração. Na maioria dos livros didáticos, o estudo da derivada precede o da Integral, mas historicamente não. O método da exaustão desenvolvido por Arquimedes era um processo de soma infinita análogo ao usado para definirmos a integral de uma função. O conceito de derivada foi desenvolvido posteriormente ao desenvolvimento da Geometria Analítica, por volta do século XVI, para efetuarmos o cálculo da taxa de variação relativa de uma quantidade. No período citado, muitas ideias na Física estavam evoluindo rapidamente devido ao emprego do método científico. Neste período, o desenvolvimento da Mecânica era latente. Os pioneiros do Cálculo como conhecemos hoje foram Sir Isaac Newton (1642-1727), que desenvolveu o método dos Fluxos, e Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) que desenvolveu o Cálculo, como era por ele chamado, e também boa parte da notação empregada até os dias de hoje. Newton descobriu as Leis básicas da Mecânica Clássica, então aplicou-as juntamente com o método dos Fluxos para demonstrar as Leis de Kepler. A 2^a Lei de Newton afirma que uma força ao agir sobre um corpo de massa m gera uma taxa relativa de variação da velocidade em relação ao tempo. Mais precisamente, na linguagem matemática atual, a 2^a Lei afirma que a força $\vec{F}$ agindo sobre um corpo de massa m é dada por $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$, sendo $\vec{v}$ o vetor velocidade do corpo. Assim, o conceito de derivada é essencial para a formulação da Lei. O método para entendermos o comportamento dinâmico de uma variável a partir da sua taxa relativa de variação mostrou-se muito eficiente, nele as informações mais importantes seguem de dados *locais* da variável estudada. Isto requer responder a seguinte questão: suponhamos que a taxa relativa da variação de uma grandeza estudada seja conhecida, como podemos determinar a grandeza? Esta pergunta é parcialmente respondida pelo Teorema Fundamental do Cálculo ao revelarmos a conexão entre os conceitos de derivada e de integral. Enquanto a integral dá informações globais, a derivada dá informações *locais*. A natureza *local* da diferenciação e *global* da integração são comportamentos complementares que se unem nas diversas aplicações existentes.

No século XIX, a Mecância Clássica e o Cálculo estavam maduros, exceto pelas questões dos fundamentos do Cálculo como a compreensão dos números reais, convergência de números e limites de funções, todas elas tratadas posteriormente pela Análise Matemática. O Eletromagnetismo começou a ser formulado em termos de leis expressas matematicamente no início do século XIX e culminou com as Equações de Maxwell publicadas em 1861. O Eletromagnetismo foi uma das principais fontes de motivação para o desenvolvimento do Cálculo Vetorial, assim como também contribuíram o desenvolvimento da Mecânica dos Fluídos, o formalismo Lagrangeano para a Mecânica Lagrangeana e os Quatérnions descobertos por Sir William Rowan Hamilton. Cronologicamente, as equações do Eletromagnetismo eram escritas em termos das coordenadas, a seguir evoluiu para notação vetorial e finalmente para a formulação usando as formas diferenciais. O Eletromagnetismo foi importante devido a sua aplicabilidade, isto impulsionou o conhecimento experimental e teórico da teoria. Em decorrência da teoria Eletromagnética a revolução industrial passou de motores a vapor para motores elétricos implicando num desenvolvimento sem precedentes, além do telégrafo que tornou-se essencial para a comunicação. Foi devido as Equações de Maxwell que os comportamentos ondulatórios dos campos elétricos e magnéticos foram descobertos assim como o fato de que ambos viajam a velocidade da luz. A riqueza matemática do Eletromagnetismo revelou diversas estruturas que contribuíram para o desenvolvimento de idéias e métodos, por exemplo para o formato atual dos teoremas de integração que encontramos nos livros de Cálculo. As formas diferenciais surgiram posteriormente e revelaram uma linguagem mais precisa e sucinta. A formulação original das Equações de Maxwell, conforme publicada por James Clerk Maxwell (1831-1879) em 1861, consistiam de 20 equações, anos mais tarde Olivier Heaviside (1850-1925) introduziu os operadores vetoriais $\nabla\times$ (rotacional) e $\nabla.$ (divergente) e reduziu as equações para 4 equações. Mais tarde, com o uso de formas diferenciais, as equações reduziram-se para apenas 2 equações.

O Cálculo tem limitações e estas formam o escopo das questões abordadas no campo da Análise Matemática. Estas limitações tornam-se relevantes ao generalizarmos o Cálculo empregado para estudarmos funções para, por exemplo, o Cálculo das Variações. O desenvolvimento do Cálculo motivou o desenvolvimento de diversos outras áreas da Matemática. Hoje em dia, podemos afirmar que a Matemática dispõe de um aparato de técnicas e ferramentas suficientes para resolvermos teoricamente diversos problemas da Álgebra Linear, o que não é verdade quando o problema pertence ao mundo não linear. As questões não lineares podem ser estratificadas dentre aquelas onde as técnicas e ferramentas lineares são eficientes, por exemplo nos fenômenos não lineares cuja aproximação linear é útil no estudo e nos fenômenos cuja aproximação linear é inútil. Neste último caso, os problemas não lineares são muito mais difíceis e raramente inserem-se numa teoria global, ou seja, cada questão é um problema *per si*.

Com o desenvolvimento da Mecânica Quântica e a evolução dos problemas de Otimização advindos de diversas áreas tornou-se imprescindível o desenvolvimento das técnicas de Cálculo para espaços de funções, os quais neste texto serão os Espaços de Banach, muito mais gerais e mais abstratos do que o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Em muitos casos, estes são os espaços de Hilbert, casos particulares de espaços de Banach.

Com o desenvolvimento do conhecimento surgiram questões que induziram novas áreas, por exemplo a Topologia Algébrica, a Topologia Diferencial e a Topologia Geométrica. Tornou-se evidente, em vários modelos e teorias, que as propriedades topológicas e geométricas dos espaços seriam fundamentais para compreender o modelo. Na Matemática, a 1^a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra dada por Gauss usou o índice de uma curva evidenciando o fato que a topologia desempenha papel importante, o mesmo ocorrendo mais tarde com o desenvolvimento do Cálculo de funções de uma Variável Complexa. Os conceitos e as técnicas evoluíram de maneira muito eficiente. No texto introduzimos os Grupos de Cohomologia de De Rham, os quais contêm informações globais da topologia de um espaço e fazem amplo uso da natureza local e global dos operadores, derivada e integral, respectivamente.

Matemática é uma linguagem para quantificarmos, como tal o seu domínio tem a função de melhorar a compreensão e a eficiência para resolvermos um problema de natureza quantificadora. No entanto, somente o domínio da linguagem não revela os caminhos para a compreendermos os fenônemos inerentes de um modelo e as suas aplicações. Algo semelhante ocorre em outras teorias e áreas do conhecimento humano onde a Matemática se faz presente. Claro, a Matemática beneficia-se desta interação; como diz o ditado "uma mão lava a outra que lava a uma".

O texto está dividido em 8 Capítulos. O conteúdo do Capítulo 1 é para fixarmos algumas notações, enunciarmos alguns teoremas usados ao longo dos outros Capítulos e para desenvolvermos alguns conteúdos elementares conforme as necessidades posteriores. Desta forma, não recomendamos a leitura do Capítulo 1 e sugerimos que ele seja usado apenas como fonte de referência para resultados básicos. O Capítulo 2 é sobre Diferenciação no $\mathbb{R}^n$, com uma rápida introdução às variedades viferenciáveis e aos grupos de Lie. O Capítulo 3 introduz os operadores lineares em Espaços de Banach e alguns resultados clássicos que são úteis para os propósitos do texto. O Capítulo 4 é sobre Diferenciação em Espaços de Banach e algumas aplicações. Existem diversas aplicações da teoria do Capítulo 4 em diversas áreas, apresentamos poucas porque, em geral, são muito extensas e requerem conhecimento específico dos conteúdos. O Capítulo 5 é uma introdução aos Campos Vetoriais, as operações básicas, a estrutura de álgebra de Lie e a interpretação em termos de operadores diferenciais lineares. No Capítulo 6 revemos o formalismo no qual os teoremas clássicos de integração estão escritos e mostramos a passagem deste formalismo para o formalismo das formas diferenciais. No Capítulo 7 introduzimos a álgebra exterior das formas diferenciais para provarmos o teorema de Stokes e, como exemplo de aplicação, definimos os grupos de Cohomologia de De Rham e calculamos os grupos da esfera S^n. No Capítulo 8 mostramos aplicações do Teorema de Stokes e de formas diferenciais introduzindo as Funções Harmônicas, as Equações de Maxwell e o Teorema de Helmhotz.

Ao dividirmos o conteúdo em dois temas centrais (1) Diferenciação e (2) Integração, temos que a interdependência entre os Capítulos é a mostrada no fluxograma contido na figura 1.

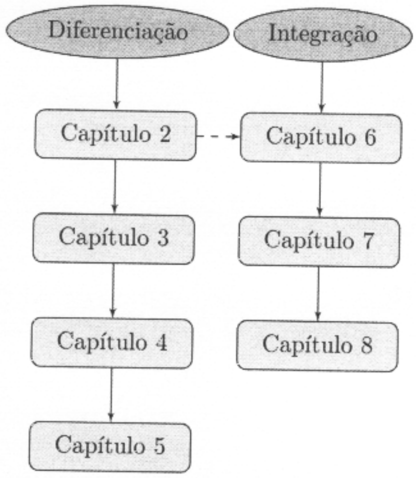


FIGURA 1. interdependência entre os Capítulos

Sumário