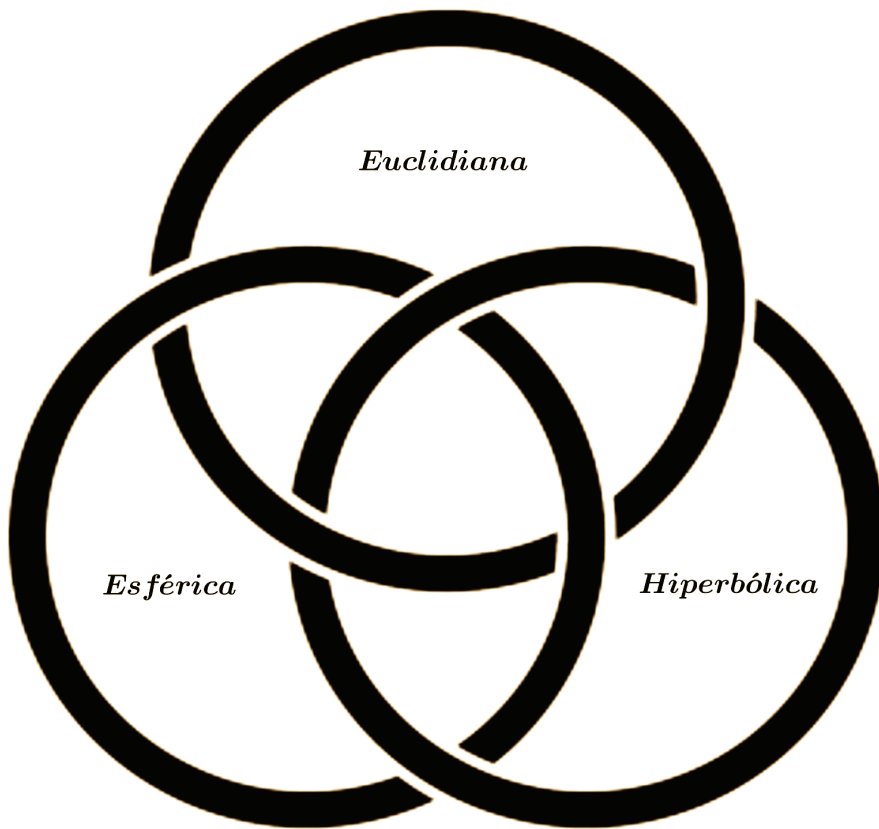


Celso Melchiades Doria

Geometrias



Celso Melchiades Doria

Introdução

1 - História

Geometria é uma das principais áreas da Matemática desde a antiguidade. A importância decorre dos problemas resolvidos, da aplicabilidade dos resultados e da evolução do pensamento humano consequente da evolução da teoria. O objetivo deste texto é introduzir Geometria através de modelos concretos, tangíveis e visuais.

Conforme discutiremos a seguir, o conceito de Geometria levou séculos para ser desvendado e compreendido. A descoberta das Geometrias Não-Euclidianas representou um enorme corte epistemológico no conhecimento baseado num sistema lógico-dedutivo. Euclides de Alexandria (300 BC) escreveu o livro *Elementos* que era um compêndio sobre Geometria, de fato o livro descrevia o estado da arte na sua época. Foi o primeiro texto matemático escrito com o rigor lógico-dedutivo, o que nos permite atribuir a Euclides o pioneirismo no emprego do método científico na Matemática. Euclides foi um gigante ao criar um sistema de cinco axiomas e extrair como consequência deles todos os resultados conhecidos naquele período. Para uma discussão detalhada dos axiomas de Euclides recomendamos o livro Wolf [30], o qual juntamente com Heilbronn [17] são as nossas principais fontes para os fatos históricos que citaremos a seguir. A fonte original para muitos autores é o livro [8].

Um dos capítulos mais profícuos da história da Matemática é o que trata do 5º-Axioma de Euclides. O próprio Euclides desconfiou do seu 5º-axioma achando que ele deveria decorrer dos outros axiomas, mas por motivos distantes daquilo que seria revelado 20 séculos mais tarde. A formulação moderna do axioma diz o seguinte;

5º-Axioma - *Por um ponto P não pertencente a uma reta r passa uma única reta paralela à r .*

Se por acaso este axioma fosse consequência dos axiomas anteriores não haveriam outras Geometrias, estaríamos confinados a Geometria Euclidiana. Estaríamos confinados a um universo plano, linear e chato. O universo físico seria diferente. O motivo pelo qual levou tanto tempo para ser compreendido

reside numa série de aspectos do conhecimento humano que abrangem a evolução da Matemática do ponto de vista técnico e do conhecimento do ponto de vista filosófico. Epicurus (341-270 BC), filósofo grego, relevava o conhecimento empírico a dedução lógica. De acordo com Heilbron [17], os seguidores de Epicurus ridicularizavam a ciência de Euclides citando a tediosa demonstração dada por Euclides da desigualdade triangular, eles afirmavam que o resultado "era evidente para um burro". Já Proclus (412-485 AD), também um filósofo grego, dizia que uma proposição evidente para os sentidos não seria necessariamente evidente para o pensamento científico, o que para ele significava o sistema lógico-dedutivo. Na antiguidade, a Astronomia era a ciência dos objetos no céu e a Física dos objetos na Terra e, sendo assim, a Geometria de que objetos trataria ?

Foi graças aos árabes que as obras de Proclus sobreviveram e o conteúdo do livro Elementos chegou até o mundo moderno. Com o surgimento das universidades européias, a Geometria Euclidiana ganhou reconhecimento pela sua importância na construção civil e como uma forma de treinar a mente. De acordo com a citação em [17], John Dee, mágico, matemático e conselheiro da Rainha Elizabeth I, a Geometria poderia ser um meio de salvação "para abandonarmos o lado rude e corruptível de nossos sentidos exteriores e, conseqüentemente, concebermos, discursarmos e concluirmos coisas intelectuais, espirituais e eternas tal como interessa ao nosso contentamento duradouro". Assim, o interesse sobre o 5º-axioma cresceu juntamente com o conhecimento do seu significado.

De acordo com Wolf [30], foi Gerlamo Saccheri (1667-1733) quem primeiro chegou mais próximo da descoberta de uma Geometria Não-Euclideana. Infelizmente, Saccheri não suspeitou de que não havia contradição no seu argumento publicado no livro¹ *Euclides ab omni nave vindocatus*, Milão 1733. O seguinte candidato a quase descobridor da Geometria Não-Euclideana foi o alemão Johann Heinrich Lambert (1728-1777), cujos argumentos no livro *Theorie der Parallelism*, escrito em 1776, assemelhavam-se aos de Saccheri. No entanto, Lambert também incorreu no mesmo erro assumindo hipóteses que o levaram desnecessariamente a uma contradição. Por último, dentre os quase-descobridores, Wolf incluiu Adrien Marie Legendre (1752-1833) cujos métodos trouxeram mais luz na busca da compreensão do 5º-axioma. D'Alembert deu ênfase sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo e propôs três hipóteses nas quais a soma dos ângulos seriam (i) equal a π , (ii) $> \pi$ e (iii) $< \pi$. De acordo com Wolf, assumindo que as linha retas que realizam a distância entre dois pontos são ilimitadas, D'Alembert provou que a soma dos ângulos internos de um triângulo não podem ser maior do que π , portanto, descartando a Geometria Esférica.

Passados 2000 anos após Euclides, nos séculos XVII e XVIII vários matemáticos brilhantes tentaram demonstrar sem sucesso o 5º-axioma, sendo que alguns anunciaram demonstrações incorretas. Segundo D'Alembert, a polêmica

¹Euclides Livre de Todos os Erros Fundamentais

sobre o axioma das paralelas e a incapacidade de chegarem a um entendimento matemático para uma situação tão simples era um escândalo.

Conforme esta muito bem enfatizado por Wolf, quando chegou o tempo de colher a descoberta das Geometrias Não-Euclidianas a colheita foi realizada por diferentes pessoas em diferentes lugares. Os responsáveis por este sucesso foram Carl Friedrich Gauss (1777-1855) na Alemanha, Janos Bolyai (1802-1860) na Hungria e Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856) na Rússia. Essencialmente, os três matemáticos observaram que ao alterar o enunciado do 5º-axioma o novo sistema de axiomas não era logicamente inconsistente. A seguir seguem algumas passagens que são documentos históricos valiosos [30].

Gauss

Na carta endereçada a Frans Adolph Taurinus (1794-1874) Gauss escreveu o seguinte:

Em consideração a sua tentativa (por redução ao absurdo), eu não tenho muito o que dizer exceto que encontra-se incompleta. A sua demonstração de que a soma dos três ângulos de um triângulo plano não pode exceder π carece de rigor geométrico. Mas isto pode ser facilmente concertado, e não há dúvidas de que pode ser rigorosamente demonstrado. A situação é totalmente diferente na segunda parte, na qual a soma dos ângulos não pode ser inferior a π ; este é o ponto crítico, o obstáculo que criam danos. Eu creio que voce não se deteve por muito tempo sobre este problema. Eu tenho pensado sobre ele por 30 anos, e eu não acredito que ninguém possa ter tido mais pensamentos sobre esta segunda parte do que eu, embora eu não tenha publicado nada sobre o tema. A hipótese de que a soma dos ângulos é inferior a π leva-nos a uma curiosidade geométrica, totalmente diferente da nossa (Euclidiana), mas completamente consistente. Isto me dá muita satisfação, uma vez que sou capaz de resolver todo problema nela com a exceção da determinação de uma constante, a qual não pode ser atribuída a priori. Quanto maior for esta constante mais esta curiosidade geométrica se aproxima da Geometria Euclidiana, e quando ela é tomada infinita ambas coincidem. Os teoremas desta geometria parecem ser paradoxais e, para os iniciantes, absurdas.

Gauss atribuiu o nome Não-Euclidiana a esta curiosidade geométrica. De acordo com os historiadores, Gauss titubeou em não publicar com receio dos conflitos com os seguidores do filósofo Emanuel Kant (1724-1804), o qual afirmava que a Geometria decorre do conhecimento intuitivo, como algo que já

existe na mente, e não como conhecimento empírico, resultante da experiência externa. Kant era uma sumidade na época, a descoberta da Geometria Não-Euclidiana destruiu o conceito kantiano de espaço.

Janos Bolyai

Quando era estudante em Göttingen, Gauss foi colega de Farkas Bolyai (1775-1856), pai de Janós Bolyai. Uma carta escrita por Gauss para Farkas Bolyai em 1799 mostra que ambos estavam tentando provar o 5º-axioma. Janos Bolyai nasceu em 1802, mais tarde ele aprendeu com seu pai Farkas sobre a teoria das paralelas e, contrariando a recomendação do pai de que antigos enigmas deveriam ser deixados de lado, ele investigou sobre o 5º-axioma. Por volta de 1820 os seus esforços começaram a dar resultados. Numa carta escrita em 03 de novembro de 1823 para o seu pai, Janos mencionou os seus avanços;

Quando voce, meu querido pai, ver voce irá entender, no momento nada posso dizer exceto que "do nada eu criei um universo novo e estranho". Estou convencido de que estas descobertas quando completas atrairão-me respeito e admiração.

O pai Farkas respondeu sugerindo que o filho Janos publica-se o quanto antes, porém a formulação e a expansão das idéias foram lentas. Somente em 1829, Janos submeteu seu manuscrito que foram publicados em 1832 com o título *Appendix*. Gauss recebeu uma cópia do livro e respondeu numa carta datada de 06 de março de 1832 afirmando que os resultados obtidos por Janos coincidem com os obtidos por ele ao longo de 30 a 35 anos de investigação. Gauss demonstrou surpresa e reconhecimento pelo trabalho de Janos, mas não concedeu-lhe o título de originalidade.

Nikolai Ivanovich Lobachewsky

Em 1829, Lobachevsky's publicou seu trabalho sobre a descoberta da geometria não-euclideana, trabalho este desenvolvido na Rússia de forma completamente independente. Segundo historiadores, Gauss não estava ciente do trabalho de Lobachevsky. Bolyai tomou conhecimento do trabalho de Lobachewsky por volta de 1848. Conforme Wolf [30], em 1826 Lobachewsky apresentou perante a comissão de Física e Matemática da Universidade de Kasan uma palestra na qual ele sugeriu uma nova Geometria, na qual assumia que por um ponto fora de uma linha reta r poderia passar mais do que uma linha reta paralela a r e concluiu que a soma dos ângulos de um triângulo seria inferior a π . Em 1829-1830 ele publicou um artigo no Kasan Bulletin referindo-se ao conteúdo da palestra dada e explicando a sua teoria sobre as paralelas. Mais tarde ele publicou o livro *Geometrische Untersuchungen zur Theorin der Parallelinien* redigido em alemão. Sugerem os documentos que Gauss tomou conhecimento do livro de Lobachevsky por volta de 1841, em 1846 ele escreveu para Schumacher o que segue;

É do teu conhecimento que por 44 anos (desde 1792) eu tenho as mesmas convicções. Não encontrei no trabalho de Lobachevsky nada de novo para mim, exceto o desenvolvimento habilidoso e geométrico feito numa maneira distinta do meu.

Assim, por volta de 1830 a Geometria Não-Euclidiana estava descoberta sob o ponto de vista lógico, o que significava que ao alterar o 5º-axioma o conjunto de axiomas de Euclides parecia permanecer consistente, embora a consistência não tenha sido provada. Levaram-se anos para a construção de um modelo concreto para estas novas Geometria, o que foi realizado por Eugenio Beltrami (1835-1899) usando superfícies de curvatura constante. Beltrami conclui que as Geometrias Não-Euclidianas são consistentes quanto a Euclidiana. Sendo K a constante de curvatura, ele obteve modelos para os seguintes casos:

- (i) se $K = 0$, a Geometria Euclidiana,
- (ii) se $K > 0$, a Geometria Esférica
- (iii) se $K < 0$, a Geometria Hiperbólica.

No presente texto exploraremos as propriedades geométricas de cada uma destas geometrias usando modelos concretos.

2 - Métrica Riemanniana

Por volta de 1820 o Cálculo já estava maduro, salvo as questões fundamentais envolvendo os números reais e questões de convergência e limites. O conceito de superfícies já era corriqueiro. Em 1828, Gauss publicou o livro *General Investigations of Curved Surfaces* [11] no qual empregou as ferramentas de cálculo integral e diferencial para descrever objetos geométricos *intrínsecos* das superfícies, com isto ele definiu a curvatura de uma superfície que vem a ser uma função $K : M \rightarrow \mathbb{R}$. Estaremos particularmente interessados nos casos de curvatura K constante. O inverso da curvatura $R = \frac{1}{K}$, chamado raio de curvatura, era exatamente a constante mencionada por Gauss na carta a Taurinus. A originalidade deste trabalho foi definir e estudar quantidades intrínsecas de uma Geometria sobre uma superfície M , quantidades estas construídas a partir do que hoje em dia chamamos de métrica riemanniana. Uma métrica Riemanniana é uma aplicação que a cada ponto $p \in M$ associa um produto interno

$$g(p) : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R},$$

onde T_pM é o plano tangente à M no ponto p . Assim, denominamos de superfície riemanniana, ou simplesmente de uma geometria, ao par (M, g) .

Gauss contribuiu de maneira fundamental para que compreendêssemos o que é uma Geometria. Anteriormente, o conceito de Geometria era meramente o axiomático. As técnicas desenvolvidas por Gauss consistiam aplicar as ferramentas do Cálculo para estudar as propriedades geométricas de uma superfície $M \subset \mathbb{R}^3$. Ele observou que o comprimento de uma curva, a área e a curvatura eram objetos geométricos intrínsecos, o que significa que dependiam

apenas da métrica riemanniana. Além disto, estes são objetos invariantes por transformações que preservam a métrica riemanniana, denominadas Isometrias. Em suma, a métrica riemanniana possibilita definirmos o comprimento de uma curva e a área de uma região contidas numa superfície e a curvatura. Existem especulações de que a motivação de Gauss para estudar superfícies e chegar ao conceito de curvatura tiveram origem durante um trabalho de agrimensura. No início de 1818 [15], Gauss dirigiu um projeto de inspeção geodésica do Reino Germânico de Hannover. A execução do projeto levou Gauss a questionar-se sobre a possibilidade de determinar a forma da Terra a partir das medidas realizadas.

O termo métrica riemanniana homenageia o alemão Bernhard Riemann (1826-1866), ele foi estudante de Gauss e tornou-se um dos maiores matemáticos do século XIX. Uma grande contribuição de Riemann para a Geometria foi mostrar que a a partir do conceito de métrica era possível construirmos novas Geometrias. A partir da métrica ele definiu o tensor de curvatura riemanniano, o qual generaliza a curvatura, que é fundamental na Teoria da Relatividade Geral. Riemann foi o pioneiro nas idéias e nos métodos que originariam o Teorema da Uniformização, estudado na introdução a Teoria das Superfícies de Riemann, do qual decorre a classificação das geometrias de curvatura constante em dimensão 2.

3 - Geometria e Ornamentos

No presente texto, uma geometria significará sempre um par (M, g) . O fundamental será que a partir da métrica g definiremos uma curva geodésica como sendo a curva que minimiza a distância entre dois pontos. Assim, o conceito euclidiano de linha reta é substituído pelo de geodésica. Por exemplo, sobre a superfície da esfera não existem retas, mas dados dois pontos existe uma única geodésica ligando-os. Um triângulo geodésico é formado pelas geodésicas que ligam 3 pontos que não encontram-se sobre uma mesma geodésica.

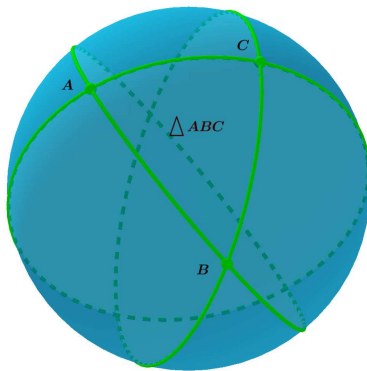


FIGURA 1. triângulo geodésico

Será de suma importância o conceito de isometria. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é uma isometria de (M, g) se para todo $p \in M$, $u, v \in T_p M$ temos que

$$g_{f(p)}(df_p \cdot u, df_p \cdot v) = g_p(u, v).$$

De fato, uma isometria é uma transformação do espaço M que preserva a métrica g . As isometrias preservam todas as propriedades métricas de (M, g) , por exemplo preservam a distância entre pontos, a área de regiões de M e a curvatura ². O conjunto das isometrias de (M, g) munidos com a operação de composição formam o grupo de isometria denotado por $Isom(M, g)$. As propriedades intrínsecas de uma geometria (M, g) são aquelas preservadas por isometrias. As isometria de uma geometria (M, g) também são tratadas como simetrias da geometria.

Retornando aos fatos históricos, a estratégia de Legendre estava correta como mostra o seguinte resultado posterior conhecido como forma local do Teorema de Gauss-Bonnet (ver [4]).

Teorema 0.1. Sejam M uma superfície e $K : M \rightarrow \mathbb{R}$ a curvatura de M . A soma dos ângulos internos α, β, γ de um triângulo geodésico $\Delta \subset M$ é dado por

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \int_{\Delta} K. \quad (0.1)$$

Desta forma, quanto menor for o triângulo mais próximo de π estará a soma dos ângulos internos do triângulo. O interessante é que se considerarmos a curvatura K uma função constante, e sendo $A(\Delta)$ a área do triangulo geodésico, então obtemos a expressão

$$K \cdot A(\Delta) = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi. \quad (0.2)$$

Uma vez que $A(\Delta) > 0$, concluímos que:

(i) $K = 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi$.

(ii) $K > 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma > \pi$.

(iii) $K < 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma < \pi$.

Este resultado motiva o estudo de modelos geométricos para cada uma das situações com curvatura constante e as suas propriedades geométricas. Os espaços

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2, \mathbb{S}_{1/K}^2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = (\frac{1}{K})^2\}, \\ \mathbb{H}^2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}. \end{aligned} \quad (0.3)$$

serão os espaços onde definiremos as geometrias de curvatura constante. Para cada $K \in \mathbb{R}$ fixo, as seguintes geometrias constituem os modelos básicos;

²Teorema Egregium de Gauss

$$\begin{aligned}
 \text{Euclideana: } \mathbb{E}^2 &= (\mathbb{R}^2, g_e), \quad K = 0, \\
 \text{Esférica: } \mathbb{S}_{1/K}^2 &= (\mathbb{S}_{1/K}^2, g_s), \quad K > 0, \\
 \text{Hiperbólica: } \mathbb{H}_K^2 &= (\mathbb{R}_+^2, g_h) \quad K < 0;
 \end{aligned}
 \tag{0.4}$$

onde g_e é a métrica euclidiana, g_s é a métrica esférica e g_h é a métrica hiperbólica, todas definidas no texto. Para cada um dos modelos seguiremos o seguinte roteiro;

Roteiro:

- (1) Fixamos uma geometria (M, g) dentre as geometrias em 0.4.
- (2) Determinamos todas as geodésicas da geometria (M, g) .
- (3) Determinamos o grupo $Isom(M, g)$, a sua estrutura algébrica e um conjunto de geradores.
- (4) Determinamos os subgrupos discretos de $Isom(M, g)$ e as respectivas regiões fundamentais,
- (5) Definiremos os espaços quocientes M/G , onde G é um subgrupo discreto de $Isom(M, g)$.

De acordo com o teorema 0.2 na próxima seção, todas as geometrias de dimensão 2 com curvatura constante são obtidas a partir dos modelos \mathbb{E}^2 , $\mathbb{S}_{1/K}^2$ e \mathbb{H}_K^2 .

Ao estudarmos as propriedades geométricas dos espaços \mathbb{R}^2 , $\mathbb{S}_{1/K}^2$ e \mathbb{H}_K^2 obteremos alguns tipos especiais de simetrias associadas a um subgrupo discreto do grupo $Isom(M, g)$. Estas simetrias geram ornamentações que são configurações geométricas que se repetem sobre a superfície, como mostram as figuras 2, 3, 4 e 5.

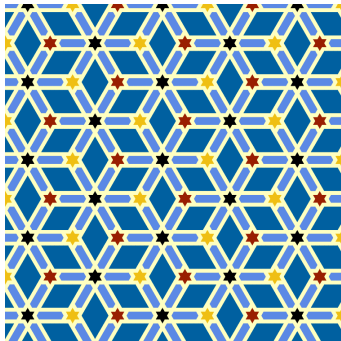


FIGURA 2. euclidiano

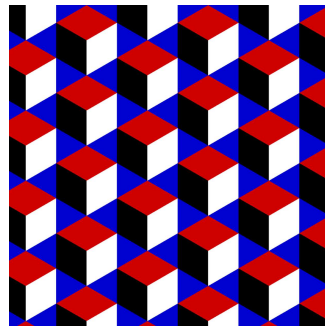


FIGURA 3. euclidiano

Estes tipos de simetrias são encontradas com abundância na natureza, por exemplo na estrutura atômica dos cristais. Assim, a cada cristal corresponde um subgrupo discreto de $Isom(\mathbb{E}^2)$. O estudo cristalográfico levou a classificação destes grupos, por isto conhecidos como grupos cristalográficos planares (no



FIGURA 4. esférico



FIGURA 5. hiperbólico

\mathbb{R}^2). No Capítulo 2 a classificação implica que existem apenas 17 tipos distintos. Os grupos cristalográficos com simetrias espacial no \mathbb{R}^3 foram classificados por Schönflies que demonstrou existirem 219 grupos distintos.

As ornamentações preenchem os respectivos espaços de forma análoga como os azulejos preenchem um assoalho ou os motivos de um papel de parede adornam uma parede. Uma ornamentação é uma forma de simetria, e simetria é um conceito presente em diversas manifestações do conhecimento humano refletindo o mundo físico em que vivemos e as nossas estruturas cerebrais de pensamento. Seria o conceito de simetria algo empírico ou intuitivo? Kantiano ou Euclidiano? Nas artes, a simetria contribui para a estética enquanto no mundo físico ela simplifica a natureza. Para darmos uma definição precisa de simetria faremos uso do conceito de grupo, cuja definição daremos no Capítulo 1. Intuitivamente, o conceito de simetria tem a ver com padrões que se repetem. Embora simples e corriqueiros, os exemplo dos azulejos que preenchem um assoalho, ou de papéis de parede que cobrem uma parede servem como motivação para a teoria que desenvolveremos ao longo do texto. Abordaremos com detalhes as simetrias das Geometrias Euclidiana, Esférica e Hiperbólica.

As diferentes formas de ornamentação que encontraremos serão associadas a subgrupos discretos do Grupo de Isometria de cada uma das três Geometrias. Com isto, construiremos superfícies cuja Geometria também tem curvatura constante e gozam das propriedades geométricas análogas as do espaço geométrico que as originou.

5 - Superfícies de Curvatura Constante

Uma consequência do estudo dos subgrupos discretos do grupo de isometria é a obtenção de novas geometrias com curvatura constante. Associado a um subgrupo discreto G de $Isom(M, g)$ definiremos a superfície quociente M/G , a qual é topologicamente distinta de M e também admite uma métrica de curvatura constante. Assim que a teoria das superfícies surge naturalmente no contexto. O seguinte teorema classifica as geometrias de dimensão 2 com curvatura constante;

Teorema 0.2. Seja \tilde{M} uma superfície simplesmente conexa munida de uma métrica riemanniana g com curvatura constante. Então, (\tilde{M}, g) é isométrico a um dos seguintes espaços;

- (1) Se $K = 0$, então $\tilde{M} = \mathbb{E}^2$;
- (2) Se $K > 0$, então $\tilde{M} = \mathbb{S}_K^2 = (\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{K}}), g_s)$;
- (3) Se $K < 0$, então $\tilde{M} = \mathbb{H}_K^2 = (\mathbb{R}_+^2, g_h)$.

Devido ao resultado acima, consideraremos apenas os casos $\mathbb{E}^2, \mathbb{S}^2 = \mathbb{S}_1^2$ e $\mathbb{H}^2 = \mathbb{H}_{-1}^2$. Em [5] há uma demonstração no contexto de Geometria Riemanniana, enquanto em [9] a demonstração utiliza a Teoria Analítica das Funções, mais precisamente a Teoria das Superfícies de Riemann.

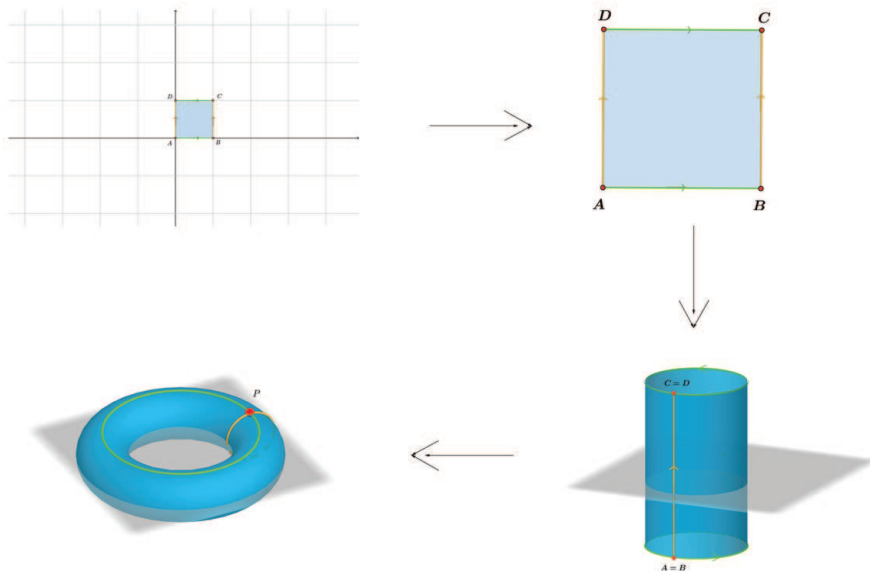


FIGURA 6. Toro $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$

Fixada uma superfície M , segue da teoria de Espaços de Recobrimento (ver [20]) a existência de um recobrimento universal $p : \tilde{M} \rightarrow M$ de M e de um grupo G agindo livremente sobre \tilde{M} e tal que $M = \tilde{M}/G$. A eventual presença de pontos fixo da ação de G sobre \tilde{M} faz com que o espaço $M = \tilde{M}/G$ seja singular, neste caso o denominamos de espaço ou superfície orbital. As superfícies orbitais são espaços singulares, cujas conjunto singular é um conjunto finito de pontos ou uma curva. Sendo assim, considerando o teorema de classificação 0.2, fixado o par (M, g) , o desafio é mostrarmos que o grupo G é isomorfo a um subgrupo discreto de um dos grupos de isometria $Isom(\mathbb{E}^2), Isom(\mathbb{S}^2)$ ou $Isom(\mathbb{H}^2)$. A figura 6 mostra como obter o toro a partir do subgrupo $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} < Isom(\mathbb{E}^2)$. As figuras 7 e 8 mostram casos em que o espaço quociente $M = \tilde{M}/G$ é um orbital.

De maneira análoga, temos para uma superfície (M, g) o seguinte roteiro;

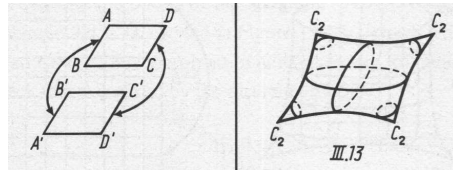


FIGURA 7. orbital

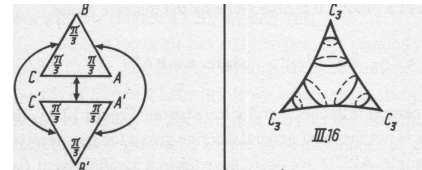


FIGURA 8. orbital

Roteiro: Fixado (M, g) ;

- (1) Fixamos o recobrimento universal (\tilde{M}, g) . Segue do Teorema de classificação 0.2 que só existem três possibilidades.
- (2) Determinamos as geodésicas da geometria (\tilde{M}, g) ,
- (3) Determinamos o grupo $Isom(\tilde{M}, g)$, a sua estrutura algébrica e um conjunto de geradores.
- (4) Determinamos os subgrupos discretos de $Isom(\tilde{M}, g)$ e as respectivas regiões fundamentais.
- (5) Definimos os espaços quocientes \tilde{M}/G , onde $G < Isom(\tilde{M})$ é um subgrupo discreto.

Seguindo o roteiro acima para cada uma das geometrias \mathbb{E}^2 , \mathbb{S}^2 e \mathbb{H}^2 e aplicando o Teorema de Classificação das Superfícies ??, obtemos os seguintes resultados: Seja M uma superfície compacta e sem bordo de genus g ;

- (1) Se M é orientável e;
 - (a) $g = 1$, então $M = T^2$ e existe um subgrupo $G < Isom(\mathbb{E}^2)$ tal que $G \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e T^2 é difeomorfo a $\mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2$.
 - (b) Se $g \geq 2$, então $M = T^2 \# \dots \# T^2$ e existe um subgrupo $G < Isom(\mathbb{H}^2)$ tal que M é difeomorfo a \mathbb{H}^2/G .
- (2) Se M é não orientável e;
 - (a) $g = 1$, então $M = \mathbb{R}P^2$ e existe um subgrupo $G < Isom(\mathbb{S}^2)$ tal que $G \simeq \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{R}P^2$ é difeomorfo a $\mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2$.
 - (b) Se $g = 2$, então $M = \mathbb{K}^2$ e existe um grupo $G < Isom_g(\mathbb{E}^2)$ tal que $G \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ e \mathbb{K}^2 é difeomorfo a $\mathbb{E}^2/(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2)$.

No Capítulo 9 mostraremos como a métrica riemanniana sobre $M = \tilde{M}/G$ induz sobre \tilde{M} uma métrica riemanniana e vice-versa.

6 - Comentários sobre os Capítulos

A proposta é estudarmos as geometrias euclídeana e não euclídeanas. A principal motivação para escrever o texto foi expôr ao leitor as Geometrias Euclídiana e Não-Euclidianas através de modelos concretos em dimensão 2, visando assim facilitar a difusão deste conhecimento tornando-o tão geométrico, visual e tangível quanto a Geometria Euclídiana. Há vários textos que abordam o mesmo conteúdo, porém o fazem dentro do contexto menos elementar de Superfícies de Riemann ou no contexto de Grupos Kleinianos.

O texto possui três partes:

- 1ª Os Capítulos 1-4 introduzem cada uma das Geometrias através de modelos, estuda as suas propriedades geométricas e as relações métricas, por exemplo o equivalente ao Teorema de Pitágoras em cada geometria. Os pré-requisitos são Álgebra Linear, Cálculo de funções de várias variáveis e aspectos básicos de Teoria de Grupo. No Capítulo 1 são introduzidos todos os conceitos básicos da Teoria de Grupo e sobre Métricas Riemannianas necessários ao longo do texto. O Capítulo 4 requer familiaridade com o corpo dos números complexos \mathbb{C} e noções elementares de funções de uma variável complexa.
- 2ª Os Capítulos 5-8 tratam dos Subgrupos Discretos dos Grupos de isometria e as suas respectivas ações. O conteúdo destes Capítulos requerem conhecidos prévios de Teoria de Grupo, Topologia do \mathbb{R}^n e um conhecimento elementar sobre a Topologia das Superfícies. No Capítulo 5 encontram-se os conceitos sobre Ações de Grupo e sobre Espaços Quocientes necessários para a leitura dos Capítulos subsequentes.
- 3ª No Capítulo 9 encontram-se uma introdução a classificação topológica das superfícies fechadas, aspectos mais abstratos da teoria e a definição de curvatura.

Nas figuras abaixo temos os fluxogramas abaixo indicando a inter-dependência entre os capítulos. A figura 9 contém o fluxograma para a 1ª parte do texto. A figura 10 tem o fluxograma para a 2ª parte.

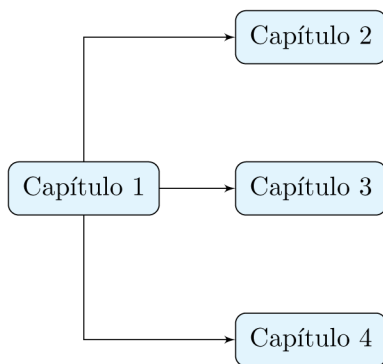


FIGURA 9. Parte I

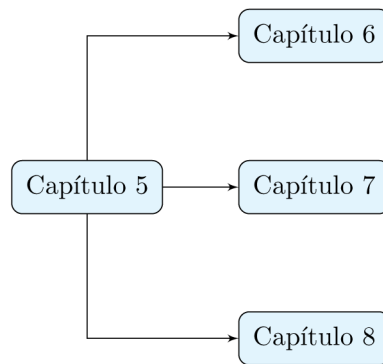


FIGURA 10. Parte II

No caso em que o leitor prefira estudar apenas uma das Geometrias e as suas respectivas Simetrias, os fluxogramas a seguir indicam o caminho que deverá ser percorrido dentro de cada uma das opções;

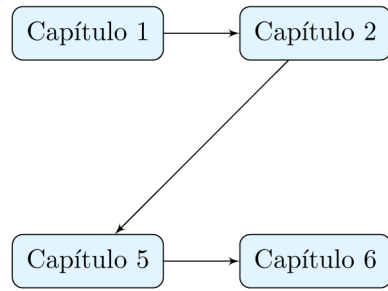


FIGURA 11. Geometria Euclidiana

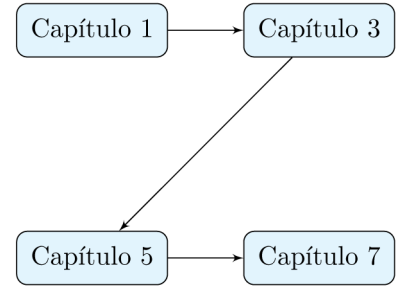


FIGURA 12. Geometria Esférica

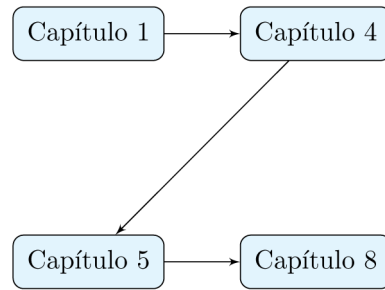


FIGURA 13. Geometria Hiperbólica

Sumário

Lista de Figuras	xix
Capítulo 1. Conceitos Básicos I	1
1. Grupos, Subgrupos e Homomorfismos	1
2. Métricas Riemannianas	11
Capítulo 2. Geometria Euclidiana	21
1. Geodésicas em \mathbb{E}^2	21
2. Isometrias de \mathbb{E}^2	23
Capítulo 3. Geometria Esférica	39
1. A Esfera \mathbb{S}^2 . Coordenadas	39
2. Métrica Esférica	44
3. Transformações Ortogonais em \mathbb{E}^3	46
4. Geodésicas de \mathbb{S}^2	50
5. Isometrias de \mathbb{S}^2	52
6. Relações Métricas em \mathbb{S}^2	54
Capítulo 4. Geometria Hiperbólica	65
1. Espaço Hiperbólico	65
2. Geodésicas de \mathbb{H}^2	72
3. Isometrias de \mathbb{H}^2	78
4. Modelos para o Espaço Hiperbólico	85
5. Relações Métricas Hiperbólicas	91
6. Identidades Métricas	105
7. Geometria das Isometrias de \mathbb{H}^2	117
Capítulo 5. Conceitos Básicos II: Ação de Grupo, Espaço Orbitail	137
1. Ações de Grupos	137
2. Característica de Euler de uma Ação	145
Capítulo 6. Subgrupos Discreto de $\text{Isom}(\mathbb{E}^2)$	149
1. Subgrupos Discretos de \mathbf{O}_2	149
2. Subgrupos Discretos do Grupo de Translações \mathcal{T}	153
3. Classificação I: Subgrupos Discretos de $\text{Isom}(\mathbb{E}^2)$	155

4. Grupos Triangulares	159
5. Classificação II: Subgrupos Discretos de $\mathbf{Isom}(\mathbb{E}^2)$	167
Capítulo 7. Subgrupos Discreto de $\mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2)$	187
1. Subgrupos Discretos de $\mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2)$	187
2. Grupos Triangulares	190
Capítulo 8. Subgrupos Discreto de $\mathbf{Isom}(\mathbb{H}^2)$	199
1. Grupos Fuchsianos	199
2. Grupos Puramente Hiperbólicos	201
3. Conjuntos Limites. Classificação por Espécie	207
4. Polígonos Fundamentais	210
5. Polígonos de Dirichlet. Teorema de Poincaré	218
6. Superfícies de genus $g \geq 2$	223
7. Grupos Triangulares	231
Capítulo 9. Superfícies	241
1. Superfícies	241
2. Espaço Orbital Ω/G	248
3. Característica de Euler de um Espaço Orbital	251
4. Espaços Homogêneos	262
5. Fibrados Tangente e Cotangente de uma Superfície	266
6. Derivada Covariante	272
7. Conexão de Levi-Civita	276
8. Curvatura	278
9. Geodésicas	286

Lista de Figuras

1	triângulo geodésico	viii
2	euclideo	x
3	euclideo	x
4	esférico	xi
5	hiperbólico	xi
6	Toro $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$	xii
7	orbital	xiii
8	orbital	xiii
9	Parte I	xiv
10	Parte II	xiv
11	Geometria Euclidiana	xv
12	Geometria Esférica	xv
13	Geometria Hiperbólica	xv
1	polígono regular \mathcal{P}_n	4
2	simetrias do triângulo	5
3	simetrias do quadrado	6
4	$n = l.m \Rightarrow D_l < D_n$ e $D_m < D_n$	8
5	γ	16
6	$S_R(p)$	16
7	gomo hiperbólico	17
8	projeção estereográfica	20
1	rotação R_θ	24
2	reflexão r_x	24
3	reflexão r_l	25
4	$r_s \circ r_l = R_{2(\beta-\alpha)}$	26
5	$r_l = T_b \circ r_{T_b(l)} \circ T_{-b}$	30

6	$R_\theta^{P_0} = T_b \circ R_\theta \circ T_{-b}$	30
7	$l // s$	32
8	$l \cap s = P$	32
9	triângulo euclidiano	35
1	coordenadas esféricas	40
2	$F : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{S}_{R_0}^2 - L_1$	41
3	$\mathbb{S}_{R_0}^2 - L_1$	42
4	$\mathbb{S}_{R_0}^2 = (\mathbb{S}_{R_0}^2 - L_1) \cup (\mathbb{S}_{R_0}^2 - L_2)$	42
5	paralelo P_{ψ_0}	44
6	meridiano M_{ϕ_0}	44
7	$\theta = \angle(\pi_1, \pi_2)$	49
8	geodésica esférica	51
9	$c_{pq} = c_{pq}^1 \cup c_{pq}^2$	51
10	distância $d_{\mathbb{S}^2}(p, q)$	54
11	triângulo retângulo	55
12	triângulo esférico	56
13	gomo esférico	62
14	área $\triangle ABC$	62
1		66
2		66
3		67
4	inversão r_{S_R}	68
5		69
6		69
7		70
8		70
9	geodésicas de \mathbb{H}^2	74
10		77
11		77
12		78
13		78
14		83
15		84
16		85
17		87
18	\mathbb{M}_+^2	88

19 \mathbb{M}_+^2	94
20	95
21 $\triangle ABC \subset \mathbb{H}_p^2$	96
22 $\triangle 1 \subset \mathbb{H}_p^2$	97
23 $\triangle 1 \subset \mathbb{H}^2$	97
24 $\triangle 2(a) \subset \mathbb{H}_p^2$	97
25 $\triangle 2(a) \subset \mathbb{H}^2$	97
26 $\triangle 2(b) \subset \mathbb{H}_p^2$	97
27 $\triangle 2(b) \subset \mathbb{H}^2$	97
28 $\triangle 3(a) \subset \mathbb{H}_p^2$	98
29 $\triangle 3(a) \subset \mathbb{H}^2$	98
30 $\triangle 3(b) \subset \mathbb{H}_p^2$	98
31 $\triangle 3(b) \subset \mathbb{H}^2$	98
32 $\triangle 4(a) \subset \mathbb{H}_p^2$	99
33 $\triangle 4(a) \subset \mathbb{H}^2$	99
34 $\triangle 4(a) \subset \mathbb{H}_p^2$	99
35 $\triangle 4(b) \subset \mathbb{H}^2$	99
36 $\triangle ABC$ retângulo	99
37	102
38 $\Omega_{\alpha\beta} \subset \mathbb{H}^2$	104
39 $\Omega_{\alpha\beta} \subset \mathbb{H}_p^2$	104
40	105
41	105
42	108
43	109
44 Q_j	110
45 Lambert	111
46 Saccheri	113
47	113
48 pentágono	114
49 hexágono	115
50 elíptica	118
51 parabólica	118
52 hiperbólica	118
53 $z_1 \neq z_2$	129
54 $z_1 = z_2$	129
55	134

56	134
1 ação de \mathbb{Z}_6 em \mathbb{R}^2	142
2 ação de SO_3 em S^2	142
3 ação de D_3 em Δ	143
1 \mathcal{O}_{x_0} é denso	151
2 $12 = 3.4$	152
3 $T_\omega = [r_l, T_v]$	157
4 $T_\omega = [T_v, R_\theta^p]$	157
5 $G(2, 4, 4)$	161
6 $G(2, 3, 6)$	161
7 $G(3, 3, 3)$	162
8 $\Delta(2, 4, 4)$	164
9 $\Delta(2, 3, 6)$	165
10 $\Delta(3, 3, 3)$	166
11	168
12 G'_1	168
13 \mathcal{P}'_2	169
14 \mathcal{O}'_2	169
15 \mathcal{O}'_3	169
16 \mathcal{P}'_4	170
17 \mathcal{O}'_4	170
18 \mathcal{P}'_5	170
19 \mathcal{O}'_5	170
20 \mathcal{P}'_6	171
21 \mathcal{O}'_6	171
22 $\mathcal{P}_{G'_7}$	171
23 \mathcal{O}'_7	171
24 G_1	173
25 G''_2	173
26 G_3	174
27 G''_4	175
28 G''_5	176
29 G''_6	176
30 G''_7	177
31 G''_8	178
32 G''_9	179

33	G''_{10}	179
34	G''_{11}	180
35	G''_{12}	181
36	G''_{13}	181
37	G''_{14}	182
38	G''_{15}	183
39	G''_{16}	184
40	G''_{17}	184
1	aplicação antípoda	188
2	ação de \mathbb{Z}_6	189
3	ação de D_6	189
4	tetraedro	191
5	\mathbb{Z}_3	192
6	\mathbb{Z}_2	192
7	tetraedro	193
8	\mathbb{S}^2	193
9	cubo	194
10	\mathbb{S}^2	194
11	dodecaedro	195
1		207
2		209
3		212
4		212
5		213
6		215
7		216
8		217
9		217
10		218
11		218
12		218
13	Região de Nielsen	222
14	$g = 2, r = s = t = 2, (2 : m_1, m_2, 2, 2)$	225
15	$\Delta, \square_e, \square_p, \square_h$	227
16	$\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$	231
17	$\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$	232

18	236
19	236
20 $\mathcal{R}(3, 7)$ e $\mathcal{R}(3, \infty)$	237
21 $\mathcal{R}(4, 5)$ e $\mathcal{R}(4, 6)$	237
22 $\mathcal{R}(4, 7)$ e $\mathcal{R}(4, \infty)$	237
23 $\mathcal{R}(5, 4)$ e $\mathcal{R}(5, 5)$	238
24 $\mathcal{R}(5, 6)$ e $\mathcal{R}(5, 7)$	238
25 $\mathcal{R}(5, \infty)$	238
26 $\mathcal{R}(6, 4)$ e $\mathcal{R}(6, 5)$	239
27 $\mathcal{R}(6, 6)$ e $\mathcal{R}(6, 7)$	239
28 $\mathcal{R}(6, \infty)$	239
29 $\mathcal{R}(7, 3)$ e $\mathcal{R}(7, 4)$	240
30 $\mathcal{R}(7, 5)$ e $\mathcal{R}(7, 6)$	240
31 $\mathcal{R}(7, 7)$ e $\mathcal{R}(7, \infty)$	240
1 Superfície	241
2	242
3 Toro	243
4	244
5	244
6 Espaços Orbitais Ω/G	250
7 $p : D^2 \rightarrow D^2/\mathbb{Z}_8$	255
8 D^2/\mathbb{Z}_8	255
9 $p : D^2 \rightarrow D^2/\mathbb{Z}_2$	257
10 $p : D^2 \rightarrow D^2/D_4$	257
11	284

Referências Bibliográficas

- [1] BARBOSA, J.L.M. - *Geometria Euclideana*, Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 1995.
- [2] BEARDON, A. - *The Geometry of Discrete Groups*, Springer-Verlag, GTM 91, 1982.
- [3] BENNETT CHOW & DAN KNOPF - *The Ricci Flow: An Introduction* - Mathematical Surveys and Monographs, **110**, AMS.
- [4] CARMO, MANFREDO P. - *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, New Jersey, 1976.
- [5] CARMO, MANFREDO P. - *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, SBM, Rio de Janeiro, 1988.
- [6] CONWAY, JOHN H. E HUSON, DANIEL H. - *The Orbifold Notation for Two-Dimensional Groups*, Structural Chemistry (2002), vol 13, Nos 3/4, pg 247-257.
- [7] EUCLIDES - *Elementos*.
- [8] ENGELS, FRIEDERICH and STÄCKEL, PAUL G. - *Die Theorie der Parallelnen von Euklid bis auf Gauss*, acesso disponível pelo URL: <http://gdz.sub.uni-goettingen.de/en/dms/loader/toc/?PPN=PPN578628864&DMDID=DMDLOG000>, Biblioteca da Universidade de Göttingen,, Alemanha.
- [9] FARKAS, H. and KRA, I. - *Riemann Surfaces* - 2^a edição, Springer, New York and Berlin, 1992.
- [10] FEEMAN, TIMOTHY G. - *Portraits of the Earth - A Mathematician Looks at Maps*, Mathematical World, vol 18, AMS.
- [11] GAUSS, Karl F. - *General Investigations of Curved Surfaces*, Raven Press, New York, 1965.
- [12] GREENBERG, MARVIN JAY - *Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Development and History*, W.H Freeman and Company, 2nd-edition, New York, 1979.
- [13] GREENBERG,M. and HARPER,J.R. - *Algebraic Topology - A First Course*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Advance Book Program, London, 1981.
- [14] GUILLEMIN,V and POLLACK, A - *Differential Topology*, Prentice Hall , Inc, Englewood Cliffs, New jersey, 1974.
- [15] Hall, T. - *Carl Friedrich Gauss: A Biography*, Cambridge, MA: MIT Press, 1970.
- [16] HAMILTON, R - *Three Manifolds with positive Ricci curvature* - J. Diff. Geometry, **17**, 1982, no. 2 , 255-306.
- [17] HEILBRON, J.L. - *Geometry Civilized - History, Culture and Technique*, Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [18] HIRSCH, M.W. and SAMALE,S. - *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Series of Monog. and Texts in Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York, 1970.
- [19] MASKIT, BERNARD - *Kleinian Groups*, Springer-Verlag, erlin, 1980.

- [20] MASSEY, W. - *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer-Verlag, GTM 56, New York, 1977.
- [21] MILNOR, J. and STASHEFF, J. - *Characteristic Classes*, Annals of Mathematics Studies, Study 76, Princeton University Press, 1974.
- [22] MOISE, EDWIN. - *Geometric Topology in Dimension 2 and 3*, Springer-Verlag, GTM 47, New York 1977.
- [23] MONTESINOS, JOSÉ M. - *Classical Tesselations and Three-Manifolds*, Springer-Verlag, Universitext, Heidelberg, 1985.
- [24] NIKULIN, V.V. and SHAFAREVICH, I.R. - *Geometries and Groups*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [25] MISNER, C.W., THORNE, K.S. and WHEELER, J.A.: *Gravitation*, Freeman, San Francisco-CA, 1973.
- [26] SAUNDERS MacLANE and GARRET BIRKHOFF: *Algebra*, The MacMillan Company, New York, 1967.
- [27] SCOTT, PETER - *The Geometries of 3-Manifolds*, Bull. London Math. Soc., 15 (1983), 401-487.
- [28] STILLWELL, J. - *Geometry of Surfaces*, Springer-Verlag, Universitext, New York 1992.
- [29] WARNER, F. - *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman and Company, London, 1971.
- [30] WOLF, Harold E. - *Non-Euclidean Geometries*, Holt, Rinehart and Winston INC., 1945, New York.
- [31] WOLL, J.W., Jr. - *Functions of Several Variables*, New York, Hartcourt, Brace & World, Inc, 1966.
- [32] YVES, L. and ARNALDO, G. - *Álgebra: Uma Introdução*, Monografias de Matemática nº 39, IMPA, Rio de Janeiro, 1983.
- [33] <http://www.malinc.se> - Malin Christersson

Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Universitario , Trindade
Florianopolis - SC , Brasil
CEP: 88.040-900

Índice Remissivo

grupo
 Tipo I, 7
 Tipo II, 7
 triangular
 euclídeano, 12

reflexão
 deslizamento, 18
 reticulado, 6

símbolos
 O_G , 1
 \mathcal{T}_G , 1