Teoria de Ramsey estrutural e a propriedade de ponto fixo dos grupos de automorfismos

Dana Bartošová

Universidade de São Paulo

Colóquio
UFSC
27 de outubro de 2016

A palestrante está suportada pelo FAPESP 2013/14458-9.

Teoria de Ramsey

Baby Ramsey

Na festa de 6 pessoas, 3 pessoas vão ou conhecer um outro ou 3 pessoas não vão se conhecer.

Baby Ramsey

Na festa de 6 pessoas, 3 pessoas vão ou conhecer um outro ou 3 pessoas não vão se conhecer.

O mesmo não vale na festa de 5 pessoas.

Baby Ramsey

Na festa de 6 pessoas, 3 pessoas vão ou conhecer um outro ou 3 pessoas não vão se conhecer.

O mesmo não vale na festa de 5 pessoas.

O número de Ramsey por $k = 2$, $m = 3$ e $r = 2$ é 6:

$$R_2(2; 3) = 6.$$

Teorema de Ramsey

Dados números naturais k, $m \geq k$ e o número r de cores, existe $n = R_r(k;m)$ tal que por cada coloração c de subconjuntos de um conjunto X, $|X| = n$, com k elementos em r cores, existe um subconjunto $Y \subset X$, $|Y| = m$, tal que todos os subconjuntos de Y com k elementos tem a mesma cor.

Teorema de Ramsey

Dados números naturais k, $m \geq k$ e o número r de cores, existe $n = R_r(k; m)$ tal que por cada coloração c de subconjuntos de um conjunto X, $|X| = n$, com k elementos em r cores, existe um subconjunto $Y \subset X$, $|Y| = m$, tal que todos os subconjuntos de Y com k elementos tem a mesma cor.

Notação:

$$n \to (m)^k_r.$$

Teorema de Ramsey

Dados números naturais k, $m \geq k$ e o número r de cores, existe $n = R_r(k;m)$ tal que por cada coloração c de subconjuntos de um conjunto X, $|X| = n$, com k elementos em r cores, existe um subconjunto $Y \subset X$, $|Y| = m$, tal que todos os subconjuntos de Y com k elementos tem a mesma cor.

Notação:

$$n \to (m)^k_r.$$

NÚMEROS DE RAMSEY

$R_2(2;2) = 2$

$R_2(2;3) = 6$

Teorema de Ramsey

Dados números naturais k, $m \geq k$ *e o número* r *de cores, existe* $n = R_r(k;m)$ *tal que por cada coloração* c *de subconjuntos de um conjunto* X, $|X| = n$, *com* k *elementos em* r *cores, existe um subconjunto* $Y \subset X$, $|Y| = m$, *tal que todos os subconjuntos de* Y *com* k *elementos tem a mesma cor.*

Notação:

$$n \to (m)^k_r.$$

NÚMEROS DE RAMSEY

$R_2(2;2) = 2$

$R_2(2;3) = 6$

$R_2(2;4) = 18$

$R_2(2;5) \in [43, 49]$

Teorema de Ramsey

Dados números naturais k, $m \geq k$ e o número r de cores, existe $n = R_r(k; m)$ tal que por cada coloração c de subconjuntos de um conjunto X, $|X| = n$, com k elementos em r cores, existe um subconjunto $Y \subset X$, $|Y| = m$, tal que todos os subconjuntos de Y com k elementos tem a mesma cor.

Notação:

$$n \to (m)^k_r.$$

NÚMEROS DE RAMSEY

$R_2(2; 2) = 2$

$R_2(2; 3) = 6$

$R_2(2; 4) = 18$

$R_2(2; 5) \in [43, 49]$

$R_2(2; 6) \in [102, 165]$

$R_2(2; 10) \in [798, 23556]$

Teorema de Ramsey

Dados números naturais k, $m \geq k$ e o número r de cores, existe $n = R_r(k;m)$ tal que por cada coloração c de subconjuntos de um conjunto X, $|X| = n$, com k elementos em r cores, existe um subconjunto $Y \subset X$, $|Y| = m$, tal que todos os subconjuntos de Y com k elementos tem a mesma cor.

Notação:

$$n \to (m)^k_r.$$

NÚMEROS DE RAMSEY

$$R_2(2;2) = 2 \qquad R_2(2;3) = 6$$

$$R_2(2;4) = 18 \qquad R_2(2;5) \in [43, 49]$$

$$R_2(2;6) \in [102, 165] \qquad R_2(2;10) \in [798, 23556]$$

$$R_2(2;k) \geq \frac{k2^{k/2}}{e\sqrt{2}}$$

Ordens lineares

$(L, <)$ – ordem linear:

Ordens lineares

$(L, <)$ – ordem linear:

1. irreflexivo: $a \not< a$,
2. antisimétrico: $a < b \to b \not< a$,
3. transitivo: $a < b \;\&\; b < c \to a < c$,
4. total: $\forall a, b \in L \; a < b$ ou $b < a$.

Ordens lineares

$(L, <)$ – ordem linear:

1. irreflexivo: $a \not< a$,
2. antisimétrico: $a < b \to b \not< a$,
3. transitivo: $a < b \;\&\; b < c \to a < c$,
4. total: $\forall a, b \in L\ a < b$ ou $b < a$.

EXEMPLOS

$(\mathbb{Z}, <)$

$(\mathbb{Q}, <)$

Ordens lineares

$(L, <)$ – ordem linear:

1. irreflexivo: $a \not< a$,
2. antisimétrico: $a < b \to b \not< a$,
3. transitivo: $a < b \;\&\; b < c \to a < c$,
4. total: $\forall a, b \in L \; a < b$ ou $b < a$.

EXEMPLOS

$(\mathbb{Z}, <)$

$(\mathbb{Q}, <)$

Ordens lineares finitos são rigidos.

$(L, <)$ – ordem linear:

1. irreflexivo: $a \not< a$,
2. antisimétrico: $a < b \to b \not< a$,
3. transitivo: $a < b$ & $b < c \to a < c$,
4. total: $\forall a, b \in L$ $a < b$ ou $b < a$.

EXEMPLOS

$(\mathbb{Z}, <)$

$(\mathbb{Q}, <)$

Ordens lineares finitos são rigidos.

Teorema de Ramsey

Por todos $(L, <_L)$ e $(K, <_K)$ ordens lineares finitos e um número de cores r existe um ordem linear finito $(M, <_M)$ tal que

Ordens lineares

$(L, <)$ – ordem linear:

1. irreflexivo: $a \not< a$,
2. antisimétrico: $a < b \to b \not< a$,
3. transitivo: $a < b \;\&\; b < c \to a < c$,
4. total: $\forall a, b \in L$ $a < b$ ou $b < a$.

EXEMPLOS

$(\mathbb{Z}, <)$

$(\mathbb{Q}, <)$

Ordens lineares finitos são rigidos.

Teorema de Ramsey

Por todos $(L, <_L)$ e $(K, <_K)$ ordens lineares finitos e um número de cores r existe um ordem linear finito $(M, <_M)$ tal que por cada coloração das cópias de $(L, <_L)$ em $(M, <_M)$ com r cores existe uma cópia $(K', <_{K'})$ de $(K, <_K)$ in $(M, <_M)$ tal que todas as cópias de $(L, <_L)$ em $(K', <_{K'})$ tem a mesma cor.

(V, E) – V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas

(V, E) – V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas

A classe de grafos finitos não tem a propriedade de Ramsey, mas

(V, E) – V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas

A classe de grafos finitos não tem a propriedade de Ramsey, mas

Teorema (Nešetril e Rödl; Abramson e Harrington)

A classe de grafos finitos com ordens lineares tem a propriedade de Ramsey.

Grafos

(V, E) – V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas

A classe de grafos finitos não tem a propriedade de Ramsey, mas

Teorema (Nešetril e Rödl; Abramson e Harrington)

A classe de grafos finitos com ordens lineares tem a propriedade de Ramsey.

Por todos $\mathbf{G} = (V, E, <)$ e $\mathbf{H} = (W, F, \prec)$ grafos finitos com ordens lineares e um número de cores r existe um grafo finito $\mathbf{X} = (X, R, \lhd)$ com um ordem linear tal que

(V, E) – V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas

A classe de grafos finitos não tem a propriedade de Ramsey, mas

Teorema (Nešetril e Rödl; Abramson e Harrington)

A classe de grafos finitos com ordens lineares tem a propriedade de Ramsey.

Por todos $\mathbf{G} = (V, E, <)$ e $\mathbf{H} = (W, F, \prec)$ grafos finitos com ordens lineares e um número de cores r existe um grafo finito $\mathbf{X} = (X, R, \triangleleft)$ com um ordem linear tal que por cada coloração das cópias de $\mathbf{G}$ em $\mathbf{X}$ com r cores existe uma cópia $\mathbf{H}'$ de $\mathbf{H}$ in $\mathbf{X}$ tal que todas as cópias de $\mathbf{G}$ em $\mathbf{H}'$ tem a mesma cor.

Teorema

A classe de espaços finitos metrizáveis com ordens lineares tem a propriedade de Ramsey.

Teorema

A classe de espaços finitos metrizáveis com ordens lineares tem a propriedade de Ramsey.

Por todos $\mathbf{M} = (M, d, <)$ e $\mathbf{N} = (N, \delta, \prec)$ espaços finitos metrizáveis com ordens lineares e um número de cores r existe um espaço $\mathbf{Z} = (Z, m, \triangleleft)$ finito metrizável com um ordem linear tal que

Teorema

A classe de espaços finitos metrizáveis com ordens lineares tem a propriedade de Ramsey.

Por todos $\mathbf{M} = (M, d, <)$ e $\mathbf{N} = (N, \delta, \prec)$ espaços finitos metrizáveis com ordens lineares e um número de cores r existe um espaço $\mathbf{Z} = (Z, m, \lhd)$ finito metrizável com um ordem linear tal que por cada coloração das cópias de $\mathbf{M}$ em $\mathbf{Z}$ com r cores existe uma cópia $\mathbf{N}'$ de $\mathbf{N}$ in $\mathbf{Z}$ tal que todas as cópias de $\mathbf{M}$ em $\mathbf{N}'$ tem a mesma cor.

Propriedade de Ramsey estrutural

$\mathcal{A} = (A, R_i^A, f_i^A, c_i^A)$ é uma estrutura de primeira ordem se

Propriedade de Ramsey estrutural

$\mathcal{A} = (A, R_i^A, f_i^A, c_i^A)$ é uma estrutura de primeira ordem se

(1) A é um conjunto,

(2) $R_i^A \subset A^{n_i}$ é uma relação de dada aridade n_i,

(3) $f_i^A : A^{m_i} \to A$ é uma função de dada aridade m_i,

(4) $c_i^A \in A$.

Propriedade de Ramsey estrutural

$\mathcal{A} = (A, R_i^A, f_i^A, c_i^A)$ é uma estrutura de primeira ordem se

(1) A é um conjunto,

(2) $R_i^A \subset A^{n_i}$ é uma relação de dada aridade n_i,

(3) $f_i^A : A^{m_i} \to A$ é uma função de dada aridade m_i,

(4) $c_i^A \in A$.

Definição

A classe $\mathcal{K}$ de estruturas finitas em uma linguagem fixa satisfaz a propriedade de Ramsey se por cada $A \in \mathcal{K}$ e $B \in \mathcal{K}$ e um número de cores r existe $C \in \mathcal{K}$ tal que por cada coloração de cópias de A em C com r cores existe uma cópia B' de B em C tal que todas as copias de A em B' tem a mesma cor.

Groupos de automorfismos

$\mathcal{A} = (A, R_i^A, f_i^A, c_i^A)$ – estrutura

Estruturas e automorfismos

$\mathcal{A} = (A, R_i^A, f_i^A, c_i^A)$ – estrutura
$F : A \to A$ é um automorfismo de $\mathcal{A}$ se

Estruturas e automorfismos

$\mathcal{A} = (A, R_i^A, f_i^A, c_i^A)$ – estrutura
$F : A \to A$ é um automorfismo de $\mathcal{A}$ se

(1) $(a_1, \ldots, a_{n_i}) \in R_i^A$ sse $(F(a_1), \ldots, F(a_{n_i})) \in R_i^A$,

(2) $F(f_i^A(b_1, \ldots, b_{m_i})) = f_i^A(F(b_1), \ldots, F(b_{m_i}))$,

(3) $F(c_i^A) = c_i^A$.

$\mathcal{A} = (A, R_i^A, f_i^A, c_i^A)$ – estrutura
$F : A \to A$ é um automorfismo de $\mathcal{A}$ se

(1) $(a_1, \ldots, a_{n_i}) \in R_i^A$ sse $(F(a_1), \ldots, F(a_{n_i})) \in R_i^A$,
(2) $F(f_i^A(b_1, \ldots, b_{m_i})) = f_i^A(F(b_1), \ldots, F(b_{m_i}))$,
(3) $F(c_i^A) = c_i^A$.

$G = \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ grupo de automorfismos de $\mathcal{A}$ é o conjunto de todos os automorfismos de $\mathcal{A}$ com a multiplicação definida como a composição:

$$\forall g, h \in G : \quad g \cdot h = g \circ h.$$

Grupos de automorfismos

$\mathcal{A}$ – estrutura
$G = \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ – grupo de automorfismos de $\mathcal{A}$

Grupos de automorfismos

$\mathcal{A}$ – estrutura
$G = \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ – grupo de automorfismos de $\mathcal{A}$

G com a topologia pontual fica um grupo topológico.

$\mathcal{A}$ – estrutura
$G = \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ – grupo de automorfismos de $\mathcal{A}$

G com a topologia pontual fica um grupo topológico.
Por A subestrutura de $\mathcal{A}$ finita

$$G_A = \{g \in G : ga = a \ \forall \ a \in A\}$$

é um subgrupo aberto e fechado de G.

Grupos de automorfismos

$\mathcal{A}$ – estrutura
$G = \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ – grupo de automorfismos de $\mathcal{A}$

G com a topologia pontual fica um grupo topológico.
Por A subestrutura de $\mathcal{A}$ finita

$$G_A = \{g \in G : ga = a \ \forall \ a \in A\}$$

é um subgrupo aberto e fechado de G.

Os G_A por A subestrutura finita de $\mathcal{A}$ constroem uma base de vizinhanças do elemento neutral em G.

Grupos de automorfismos

$\mathcal{A}$ – estrutura
$G = \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ – grupo de automorfismos de $\mathcal{A}$

G com a topologia pontual fica um grupo topológico.
Por A subestrutura de $\mathcal{A}$ finita

$$G_A = \{g \in G : ga = a \;\forall\; a \in A\}$$

é um subgrupo aberto e fechado de G.

Os G_A por A subestrutura finita de $\mathcal{A}$ constroem uma base de vizinhanças do elemento neutral em G.

EXEMPLO
$S_\infty(\mathbb{Z})$ é o grupo de todas as permutações de $\mathbb{Z}$ = grupo de todos os automorfismos de uma estrutura vazia no conjunto $\mathbb{Z}$.

Ultrahomogeneidade

Estrutura $\mathcal{A}$ se chama ultrahomogénea se cada isomorfismo finito entre subestruturas de $\mathcal{A}$ se extende para um automorfismo de A.

Ultrahomogeneidade

Estrutura $\mathcal{A}$ se chama ultrahomogénea se cada isomorfismo finito entre subestruturas de $\mathcal{A}$ se extende para um automorfismo de A.

EXEMPLOS

1. $\mathbb{Z}$,
2. $(\mathbb{Q}, <)$,
3. grafo de Rado $=$ grafo contável aleatório,
4. espaço de Urysohn.

Ultrahomonegeneidade e subestruturas

$G = \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$, $A \leq \mathbb{Q}$ finito, $\binom{\mathbb{Q}}{A}$ – cópias de A em $\mathbb{Q}$

Ultrahomonegeneidade e subestruturas

$G = \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$, $A \leq \mathbb{Q}$ finito, $\binom{\mathbb{Q}}{A}$ – cópias de A em $\mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} G/G_A \quad &\longleftrightarrow \quad \binom{\mathbb{Q}}{A} \\ G_A g \quad &\longleftrightarrow \quad g^{-1}A \end{aligned}$$

Ultrahomonegeneidade e subestruturas

$G = \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$, $A \leq \mathbb{Q}$ finito, $\binom{\mathbb{Q}}{A}$ – cópias de A em $\mathbb{Q}$

$$\begin{array}{rcl} G/G_A & \longleftrightarrow & \binom{\mathbb{Q}}{A} \\ G_A g & \longleftrightarrow & g^{-1}A \end{array}$$

$\mathcal{A}$ – estrutura ultrahomogénea, $G = \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$, $A \leq \mathcal{A}$ finita,
$\mathrm{Ime}(\mathrm{A}, \mathcal{A})$ – imerções de A em $\mathcal{A}$

Ultrahomonegeneidade e subestruturas

$G = \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$, $A \leq \mathbb{Q}$ finito, $\binom{\mathbb{Q}}{A}$ – cópias de A em $\mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} G/G_A &\longleftrightarrow \binom{\mathbb{Q}}{A} \\ G_A g &\longleftrightarrow g^{-1}A \end{aligned}$$

$\mathcal{A}$ – estrutura ultrahomogénea, $G = \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$, $A \leq \mathcal{A}$ finita, $\mathrm{Ime}(\mathrm{A}, \mathcal{A})$ – imerções de A em $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} G/G_A &\longleftrightarrow \mathrm{Ime}(\mathrm{A}, \mathcal{A}) \\ G_A g &\longleftrightarrow g^{-1} \restriction A \end{aligned}$$

Conjuntos bastos

$T \subset G$ é um conjunto basto se por cada finito $F \subset G$ existe x tal que $Fx \subset T$.

Conjuntos bastos

$T \subset G$ é um conjunto basto se por cada finito $F \subset G$ existe x tal que $Fx \subset T$.

$\mathcal{A}$ – ultrahomogénea, $G = \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$, $A \leq \mathcal{A}$ finita

Conjuntos bastos

$T \subset G$ é um conjunto basto se por cada finito $F \subset G$ existe x tal que $Fx \subset T$.

$\mathcal{A}$ – ultrahomogénea, $G = \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$, $A \leq \mathcal{A}$ finita

Nós interessam conjuntos bastos de forma $G_A K$ por $K \subset G$ (ou, equivalente, subconjuntos de $G/G_A \cong \mathrm{Ime}(\mathrm{A}, \mathcal{A})$).

$T \subset G$ é um conjunto basto se por cada finito $F \subset G$ existe x tal que $Fx \subset T$.

$\mathcal{A}$ – ultrahomogénea, $G = \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$, $A \leq \mathcal{A}$ finita

Nós interessam conjuntos bastos de forma $G_A K$ por $K \subset G$ (ou, equivalente, subconjuntos de $G/G_A \cong \mathrm{Ime(A, \mathcal{A})}$).

Lemma

$T = G_A K \subset G$ é basto sse por cada $A \leq B \leq \mathcal{A}$ existe $B' \in \binom{\mathcal{A}}{B}$ tal que $\mathrm{Ime(A, B') \subset T}$.

$\mathcal{A}$ – ultrahomogénea
$G = \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$

$\mathcal{A}$ – ultrahomogénea
$G = \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$

$\mathrm{Age}(\mathcal{A})$ = subestruturas finitas de $\mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ – ultrahomogénea
$G = \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$

$\mathrm{Age}(\mathcal{A})$ = subestruturas finitas de $\mathcal{A}$

Teorema

Os seguintes são equivalentes.

(1) $\mathrm{Age}(\mathcal{A})$ *tem a propriedade de Ramsey e consiste de estruturas rigidas.*

(2) *Por cada* $A \in \mathrm{Age}(\mathcal{A})$ *e cada partição finita* $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_A K_i$ *existe* i *tal que* $G_A K_i$ *é basto.*

Grupos extremamente mediáveis

= grupos que tem um ponto fixo em cada ação contínua no espaço Haussdorfo compacto.

Grupos extremamente mediáveis

= grupos que tem um ponto fixo em cada ação contínua no espaço Haussdorfo compacto.

Teorema (Kechris, Pestov, and Todocevic)

$\mathcal{A}$ – ultrahomogénea, $G = \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$, $\mathrm{Age}(\mathcal{A})$ = subestruturas finitas de $\mathcal{A}$
Os seguintes são equivalentes.

(1) *G é extremamente mediável.*
(2) *$\mathrm{Age}(\mathcal{A})$ tem a propriedade de Ramsey e consiste de estruturas rigidas.*

Grupos extremamente mediáveis

= grupos que tem um ponto fixo em cada ação contínua no espaço Haussdorfo compacto.

Teorema (Kechris, Pestov, and Todocevic)

$\mathcal{A}$ – ultrahomogénea, $G = \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$, $\mathrm{Age}(\mathcal{A})$ = subestruturas finitas de $\mathcal{A}$
Os seguintes são equivalentes.

(1) *G é extremamente mediável.*
(2) *$\mathrm{Age}(\mathcal{A})$ tem a propriedade de Ramsey e consiste de estruturas rigidas.*

EXEMPLOS

(1) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ (Pestov)
(2) Aut(grafo de Rado com ordem linear) (KPT)
(3) $\mathrm{Iso}(\mathrm{U}, \mathrm{d})$ (Pestov)

Teorema (B., Lopez-Abad, Mbombo)

(1) *A classe de espacos de Banach* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *com imerções isométricas lineares tem a propriedade de Ramsey contínua.*

Teorema (B., Lopez-Abad, Mbombo)

(1) *A classe de espacos de Banach* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *com imerções isométricas lineares tem a propriedade de Ramsey contínua.*

(2) *A classes de todos os espaços de Banach de dimensão finita tem a propriedade de Ramsey contínua.*

Aplicações

Teorema (B., Lopez-Abad, Mbombo)

(1) *A classe de espacos de Banach* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *com imerções isométricas lineares tem a propriedade de Ramsey contínua.*

(2) *A classes de todos os espaços de Banach de dimensão finita tem a propriedade de Ramsey contínua.*

Gurarij space $\mathbb{G}$ é um espço de Banach separável que contém cada espaço de Banach de dimensão finita como um subespaço e que é aproximadamente homogéneo por isometrias lineares finitas.

Aplicações

Teorema (B., Lopez-Abad, Mbombo)

(1) *A classe de espacos de Banach* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *com imerções isométricas lineares tem a propriedade de Ramsey contínua.*

(2) *A classes de todos os espaços de Banach de dimensão finita tem a propriedade de Ramsey contínua.*

Gurarij space $\mathbb{G}$ é um espço de Banach separável que contém cada espaço de Banach de dimensão finita como um subespaço e que é aproximadamente homogéneo por isometrias lineares finitas.

Teorema (BLAM)

$\mathrm{Iso}_1(\mathbb{G})$ *é extremamente mediável.*

1. Dinâmica topológica.

Demais aplicações

1. Dinâmica topológica.
2. Ciência da Computação.

Demais aplicações

1. Dinâmica topológica.
2. Ciência da Computação.
3. Teoria de modelos.

OBRIGADA