Existência e estabilidade de soluções globais para o sistema Hall-MHD

Maicon J. Benvenutti
(UFSC - Blumenau)

Colóquio do Departamento de Matemática - UFSC

Florianópolis,
09 de setembro de 2016

Introdução

- Magnetoidrodinâmica (MHD) é o estudo da evolução do campo magnético e do movimento em fluidos condutores, tais como os plasmas, metais liquefeitos ou soluções iônicas.

- Esta área tem sido estudada por pelos menos desde os anos 50.

- A teoria MHD une equações da mecânica dos fluidos (equações de Navier-Stokes) com equações do eletromagnetismo (equações de Maxwell).

- Embora alguns modelos já tenham sido bastante estudados, muitas questões básicas relacionadas ao tratamento analítico destas equações permanencem problemas em aberto.

- Por exemplo, a questão da existência e unicidade de soluções globalmente definidas no tempo ainda não está resolvida (questão relacionada com um dos famosos problemas do milênio proposto pelo Clay Mathematics Institute).

- Nesta apresentação, vamos tratar um modelo MHD que leva em consideração um fenômeno físico chamado efeito Hall (físico Edwin Herbert Hall 1855-1938). O modelo foi deduzido em [1]. Grosso modo, foi considerado um termo adicional na Lei de Ohm.

---

[1] Acheritogaray M., Degond P., Frouvelle A. & Liu J-G., *Kinetic formulation and global existence for the Hall-Magneto-hydrodynamics system*, Kinet. Relat. Models 4 (2011), 901-918.

- Magnetoidrodinâmica (MHD) é o estudo da evolução do campo magnético e do movimento em fluidos condutores, tais como os plasmas, metais liquefeitos ou soluções iônicas.

- Esta área tem sido estudada por pelos menos desde os anos 50.

- A teoria MHD une equações da mecânica dos fluidos (equações de Navier-Stokes) com equações do eletromagnetismo (equações de Maxwell). elas devem ser estudadas simultaneamente.

- Embora alguns modelos já tenham sido bastante estudados, muitas questões básicas relacionadas ao tratamento analítico destas equações permanencem problemas em aberto.

- Por exemplo, a questão da existência e unicidade de soluções globalmente definidas no tempo ainda não está resolvida (questão relacionada com um dos famosos problemas do milênio proposto pelo Clay Mathematics Institute).

- Nesta apresentação, vamos tratar um modelo MHD que leva em consideração um fenômeno físico chamado efeito Hall (físico Edwin Herbert Hall 1855-1938). O modelo foi deduzido em [1]. Grosso modo, foi considerado um termo adicional na Lei de Ohm.

[1] Acheritogaray M., Degond P., Frouvelle A. & Liu J-G., *Kinetic formulation and global existence for the Hall-Magneto-hydrodynamics system*, Kinet. Relat. Models 4 (2011), 901-918.

Introdução

- Magnetoidrodinâmica (MHD) é o estudo da evolução do campo magnético e do movimento em fluidos condutores, tais como os plasmas, metais liquefeitos ou soluções iônicas.

- Esta área tem sido estudada por pelos menos desde os anos 50.

- A teoria MHD une equações da mecânica dos fluidos (equações de Navier-Stokes) com equações do eletromagnetismo (equações de Maxwell). Devido aos termos de acoplamento, elas devem ser resolvidas simultaneamente.

- Embora alguns modelos já tenham sido bastante estudados, muitas questões básicas relacionadas ao tratamento analítico destas equações permanencem problemas em aberto.

- Por exemplo, a questão da existência e unicidade de soluções globalmente definidas no tempo ainda não está resolvida (questão relacionada com um dos famosos problemas do milênio proposto pelo Clay Mathematics Institute).

- Nesta apresentação, vamos tratar um modelo MHD que leva em consideração um fenômeno físico chamado efeito Hall (físico Edwin Herbert Hall 1855-1938). O modelo foi deduzido em [1]. Grosso modo, foi considerado um termo adicional na Lei de Ohm.

[1] Acheritogaray M., Degond P., Frouvelle A. & Liu J-G., *Kinetic formulation and global existence for the Hall-Magneto-hydrodynamics system*, Kinet. Relat. Models 4 (2011), 901-918.

Introdução

- Magnetoidrodinâmica (MHD) é o estudo da evolução do campo magnético e do movimento em fluidos condutores, tais como os plasmas, metais liquefeitos ou soluções iônicas.

- Esta área tem sido estudada por pelos menos desde os anos 50.

- A teoria MHD une equações da mecânica dos fluidos (equações de Navier-Stokes) com equações do eletromagnetismo (equações de Maxwell). Devido aos termos de acoplamento, elas devem ser resolvidas simultaneamente.

- Embora alguns modelos já tenham sido bastante estudados, muitas questões básicas relacionadas ao tratamento analítico destas equações permanencem problemas em aberto.

- Por exemplo, a questão da existência e unicidade de soluções globalmente definidas no tempo ainda não está resolvida (questão relacionada com um dos famosos problemas do milênio proposto pelo Clay Mathematics Institute).

- Nesta apresentação, vamos tratar um modelo MHD que leva em consideração um fenômeno físico chamado efeito Hall (físico Edwin Herbert Hall 1855-1938). O modelo foi deduzido em [1]. Grosso modo, foi considerado um termo adicional na Lei de Ohm.

[1] Acheritogaray M., Degond P., Frouvelle A. & Liu J-G., *Kinetic formulation and global existence for the Hall-Magneto-hydrodynamics system*, Kinet. Relat. Models 4 (2011), 901-918.

Introdução

- Magnetoidrodinâmica (MHD) é o estudo da evolução do campo magnético e do movimento em fluidos condutores, tais como os plasmas, metais liquefeitos ou soluções iônicas.
- Esta área tem sido estudada por pelos menos desde os anos 50.
- A teoria MHD une equações da mecânica dos fluidos (equações de Navier-Stokes) com equações do eletromagnetismo (equações de Maxwell). Devido aos termos de acoplamento, elas devem ser resolvidas simultaneamente.
- Embora alguns modelos já tenham sido bastante estudados, muitas questões básicas relacionadas ao tratamento analítico destas equações permanencem problemas em aberto.
- Por exemplo, a questão da existência e unicidade de soluções globalmente definidas no tempo ainda não está resolvida (questão relacionada com um dos famosos problemas do milênio proposto pelo Clay Mathematics Institute).
- Nesta apresentação, vamos tratar um modelo MHD que leva em consideração um fenômeno físico chamado efeito Hall (físico Edwin Herbert Hall 1855-1938). O modelo foi deduzido em [1]. Grosso modo, foi considerado um termo adicional na Lei de Ohm.

[1] Acheritogaray M., Degond P., Frouvelle A. & Liu J-G., *Kinetic formulation and global existence for the Hall-Magneto-hydrodynamics system*, Kinet. Relat. Models 4 (2011), 901-918.

Introdução

- Magnetoidrodinâmica (MHD) é o estudo da evolução do campo magnético e do movimento em fluidos condutores, tais como os plasmas, metais liquefeitos ou soluções iônicas.
- Esta área tem sido estudada por pelos menos desde os anos 50.
- A teoria MHD une equações da mecânica dos fluidos (equações de Navier-Stokes) com equações do eletromagnetismo (equações de Maxwell). Devido aos termos de acoplamento, elas devem ser resolvidas simultaneamente.
- Embora alguns modelos já tenham sido bastante estudados, muitas questões básicas relacionadas ao tratamento analítico destas equações permanencem problemas em aberto.
- Por exemplo, a questão da existência e unicidade de soluções globalmente definidas no tempo ainda não está resolvida (questão relacionada com um dos famosos problemas do milênio proposto pelo Clay Mathematics Institute).
- Nesta apresentação, vamos tratar um modelo MHD que leva em consideração um fenômeno físico chamado efeito Hall (físico Edwin Herbert Hall 1855-1938). O modelo foi deduzido em [1]. Grosso modo, foi considerado um termo adicional na Lei de Ohm.

[1] Acheritogaray M., Degond P., Frouvelle A. & Liu J-G., *Kinetic formulation and global existence for the Hall-Magneto-hydrodynamics system*, Kinet. Relat. Models 4 (2011), 901-918.

Introdução

- Magnetoidrodinâmica (MHD) é o estudo da evolução do campo magnético e do movimento em fluidos condutores, tais como os plasmas, metais liquefeitos ou soluções iônicas.

- Esta área tem sido estudada por pelos menos desde os anos 50.

- A teoria MHD une equações da mecânica dos fluidos (equações de Navier-Stokes) com equações do eletromagnetismo (equações de Maxwell). Devido aos termos de acoplamento, elas devem ser resolvidas simultaneamente.

- Embora alguns modelos já tenham sido bastante estudados, muitas questões básicas relacionadas ao tratamento analítico destas equações permanencem problemas em aberto.

- Por exemplo, a questão da existência e unicidade de soluções globalmente definidas no tempo ainda não está resolvida (questão relacionada com um dos famosos problemas do milênio proposto pelo Clay Mathematics Institute).

- Nesta apresentação, vamos tratar um modelo MHD que leva em consideração um fenômeno físico chamado efeito Hall (físico Edwin Herbert Hall 1855-1938). O modelo foi deduzido em [1]. Grosso modo, foi considerado um termo adicional na Lei de Ohm.

---

[1] Acheritogaray M., Degond P., Frouvelle A. & Liu J-G., *Kinetic formulation and global existence for the Hall-Magneto-hydrodynamics system*, Kinet. Relat. Models 4 (2011), 901-918.

Introdução

- Magnetoidrodinâmica (MHD) é o estudo da evolução do campo magnético e do movimento em fluidos condutores, tais como os plasmas, metais liquefeitos ou soluções iônicas.

- Esta área tem sido estudada por pelos menos desde os anos 50.

- A teoria MHD une equações da mecânica dos fluidos (equações de Navier-Stokes) com equações do eletromagnetismo (equações de Maxwell). Devido aos termos de acoplamento, elas devem ser resolvidas simultaneamente.

- Embora alguns modelos já tenham sido bastante estudados, muitas questões básicas relacionadas ao tratamento analítico destas equações permanencem problemas em aberto.

- Por exemplo, a questão da existência e unicidade de soluções globalmente definidas no tempo ainda não está resolvida (questão relacionada com um dos famosos problemas do milênio proposto pelo Clay Mathematics Institute).

- Nesta apresentação, vamos tratar um modelo MHD que leva em consideração um fenômeno físico chamado efeito Hall (físico Edwin Herbert Hall 1855-1938). O modelo foi deduzido em [1]. Grosso modo, foi considerado um termo adicional na Lei de Ohm.

[1] Acheritogaray M., Degond P., Frouvelle A. & Liu J-G., *Kinetic formulation and global existence for the Hall-Magneto-hydrodynamics system*, Kinet. Relat. Models 4 (2011), 901-918.

Introdução

- Magnetoidrodinâmica (MHD) é o estudo da evolução do campo magnético e do movimento em fluidos condutores, tais como os plasmas, metais liquefeitos ou soluções iônicas.

- Esta área tem sido estudada por pelos menos desde os anos 50.

- A teoria MHD une equações da mecânica dos fluidos (equações de Navier-Stokes) com equações do eletromagnetismo (equações de Maxwell). Devido aos termos de acoplamento, elas devem ser resolvidas simultaneamente.

- Embora alguns modelos já tenham sido bastante estudados, muitas questões básicas relacionadas ao tratamento analítico destas equações permanencem problemas em aberto.

- Por exemplo, a questão da existência e unicidade de soluções globalmente definidas no tempo ainda não está resolvida (questão relacionada com um dos famosos problemas do milênio proposto pelo Clay Mathematics Institute).

- Nesta apresentação, vamos tratar um modelo MHD que leva em consideração um fenômeno físico chamado efeito Hall (físico Edwin Herbert Hall 1855-1938). O modelo foi deduzido em [1]. Grosso modo, foi considerado um termo adicional na Lei de Ohm.

[1] Acheritogaray M., Degond P., Frouvelle A. & Liu J-G., *Kinetic formulation and global existence for the Hall-Magneto-hydrodynamics system*, Kinet. Relat. Models 4 (2011), 901-918.

Introdução

- Magnetoidrodinâmica (MHD) é o estudo da evolução do campo magnético e do movimento em fluidos condutores, tais como os plasmas, metais liquefeitos ou soluções iônicas.

- Esta área tem sido estudada por pelos menos desde os anos 50.

- A teoria MHD une equações da mecânica dos fluidos (equações de Navier-Stokes) com equações do eletromagnetismo (equações de Maxwell). Devido aos termos de acoplamento, elas devem ser resolvidas simultaneamente.

- Embora alguns modelos já tenham sido bastante estudados, muitas questões básicas relacionadas ao tratamento analítico destas equações permanencem problemas em aberto.

- Por exemplo, a questão da existência e unicidade de soluções globalmente definidas no tempo ainda não está resolvida (questão relacionada com um dos famosos problemas do milênio proposto pelo Clay Mathematics Institute).

- Nesta apresentação, vamos tratar um modelo MHD que leva em consideração um fenômeno físico chamado efeito Hall (físico Edwin Herbert Hall 1855-1938). O modelo foi deduzido em [1]. Grosso modo, foi considerado um termo adicional na Lei de Ohm.

[1] Acheritogaray M., Degond P., Frouvelle A. & Liu J-G., *Kinetic formulation and global existence for the Hall-Magneto-hydrodynamics system*, Kinet. Relat. Models 4 (2011), 901-918.

Resumo da apresentação

- "Dedução" do modelo Hall-MHD.
- Alguns resultados encontrados na literatura.
- Estabilidade (trabalho conjunto com prof. Dr. Lucas C. F. Ferreira (UNICAMP)).

Resumo da apresentação

- “Dedução”do modelo Hall-MHD.
- Alguns resultados encontrados na literatura.
- Estabilidade (trabalho conjunto com prof. Dr. Lucas C. F. Ferreira (UNICAMP)).

Resumo da apresentação

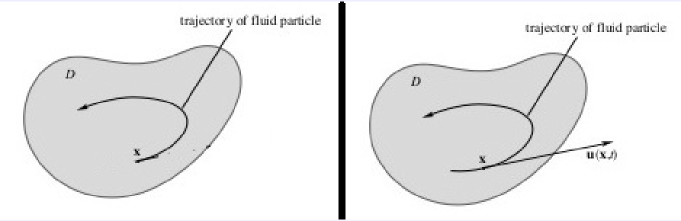
- “Dedução”do modelo Hall-MHD.
- Alguns resultados encontrados na literatura.
- Estabilidade (trabalho conjunto com prof. Dr. Lucas C. F. Ferreira (UNICAMP)).

Resumo da apresentação

- "Dedução"do modelo Hall-MHD.
- Alguns resultados encontrados na literatura.
- Estabilidade (trabalho conjunto com prof. Dr. Lucas C. F. Ferreira (UNICAMP)).

O modelo Hall-MHD

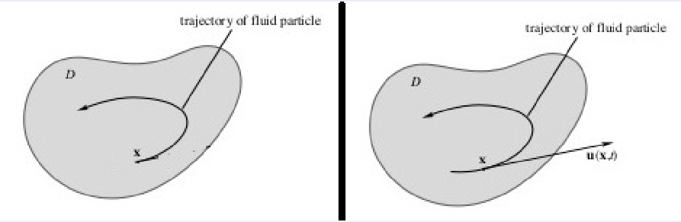
- Considere um escoamento de um meio contínuo em uma região $D \subset \mathbb{R}^3$:



- $u = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ é o campo de velocidades;
- $\rho = \rho(x,t)$ é a densidade;
- σ é o tensor de tensão;
- $G = (G_1(x,t), G_2(x,t), G_3(x,t))$ é um campo de forças que atua sobre o escoamento;
- $\nabla . =$ divergente;

O modelo Hall-MHD

- Considere um escoamento de um meio contínuo em uma região $D \subset \mathbb{R}^3$:

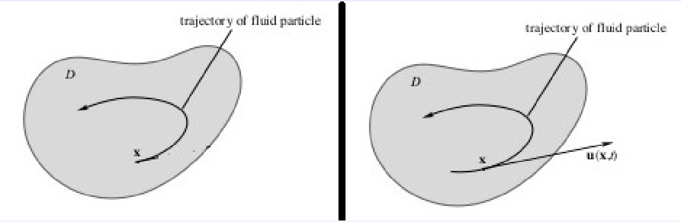


$$\begin{cases} \partial_t(\rho u) + \nabla\,.\,(\rho u \otimes u) & = & \nabla\,.\,\sigma + \rho G; \\ \partial_t \rho + \nabla\,.\,(\rho u) & = & 0. \end{cases} \tag{1}$$

- $u = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ é o campo de velocidades;
- $\rho = \rho(x,t)$ é a densidade;
- σ é o tensor de tensão;
- $G = (G_1(x,t), G_2(x,t), G_3(x,t))$ é um campo de forças que atua sobre o escoamento;
- $\nabla\,. =$ divergente;

O modelo Hall-MHD

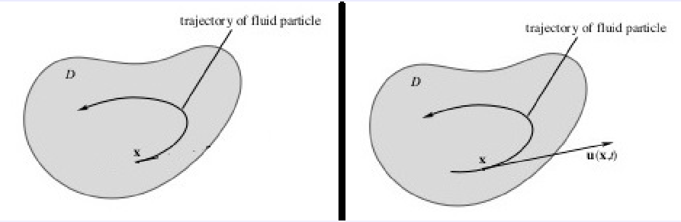
- Considere um escoamento de um meio contínuo em uma região $D \subset \mathbb{R}^3$:



$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t(\rho u) + \nabla \, . \, (\rho u \otimes u) & = & \nabla \, . \, \sigma + \rho G; \\ \partial_t \rho + \nabla \, . \, (\rho u) & = & 0. \end{array} \right. \tag{1}$$

- $u = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ é o campo de velocidades;
- $\rho = \rho(x,t)$ é a densidade;
- σ é o tensor de tensão;
- $G = (G_1(x,t), G_2(x,t), G_3(x,t))$ é um campo de forças que atua sobre o escoamento;
- $\nabla \, . =$ divergente;

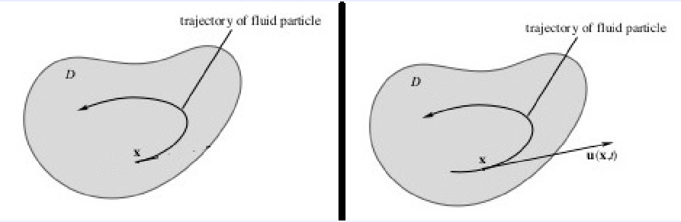
- Considere um escoamento de um meio contínuo em uma região $D \subset \mathbb{R}^3$:



$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t(\rho u) + \nabla . (\rho u \otimes u) & = & \nabla . \sigma + \rho G; \\ \partial_t \rho + \nabla . (\rho u) & = & 0. \end{array} \right. \tag{1}$$

- $u = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ é o campo de velocidades;
- $\rho = \rho(x,t)$ é a densidade;
- σ é o tensor de tensão;
- $G = (G_1(x,t), G_2(x,t), G_3(x,t))$ é um campo de forças que atua sobre o escoamento;
- $\nabla . =$ divergente;

- Considere um escoamento de um meio contínuo em uma região $D \subset \mathbb{R}^3$:

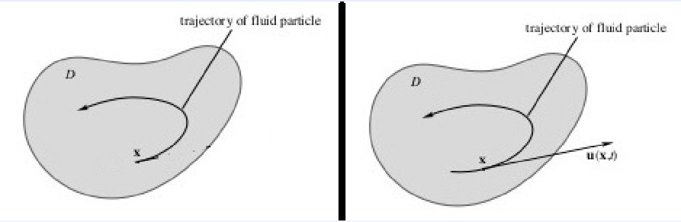


$$\begin{cases} \partial_t(\rho u) + \nabla . (\rho u \otimes u) &= \nabla . \sigma + \rho G; \\ \partial_t \rho + \nabla . (\rho u) &= 0. \end{cases} \tag{1}$$

- $u = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ é o campo de velocidades;
- $\rho = \rho(x,t)$ é a densidade;
- σ é o tensor de tensão;
- $G = (G_1(x,t), G_2(x,t), G_3(x,t))$ é um campo de forças que atua sobre o escoamento;
- $\nabla . =$ divergente;

O modelo Hall-MHD

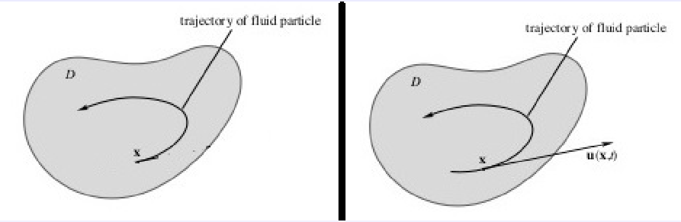
- Considere um escoamento de um meio contínuo em uma região $D \subset \mathbb{R}^3$:



$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t(\rho u) + \nabla \,.\, (\rho u \otimes u) & = & \nabla \,.\, \sigma + \rho G; \\ \partial_t \rho + \nabla \,.\, (\rho u) & = & 0. \end{array} \right. \tag{1}$$

- $u = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ é o campo de velocidades;
- $\rho = \rho(x,t)$ é a densidade;
- σ é o tensor de tensão;
- $G = (G_1(x,t), G_2(x,t), G_3(x,t))$ é um campo de forças que atua sobre o escoamento;
- $\nabla \,. =$ divergente;

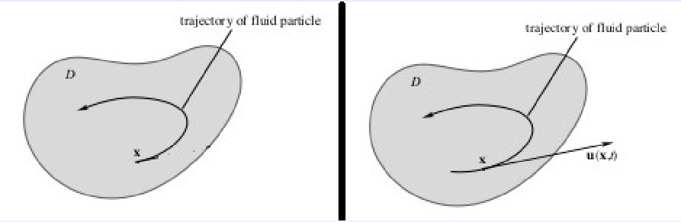
- Considere um escoamento de um meio contínuo em uma região $D \subset \mathbb{R}^3$:



$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t(\rho u) + \nabla . (\rho u \otimes u) & = & \nabla . \sigma + \rho G; \\ \partial_t \rho + \nabla . (\rho u) & = & 0. \end{array} \right. \tag{1}$$

- $u = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ é o campo de velocidades;
- $\rho = \rho(x,t)$ é a densidade;
- σ é o tensor de tensão;
- $G = (G_1(x,t), G_2(x,t), G_3(x,t))$ é um campo de forças que atua sobre o escoamento;
- $\nabla . =$ divergente;

- Considere um escoamento de um meio contínuo em uma região $D \subset \mathbb{R}^3$:



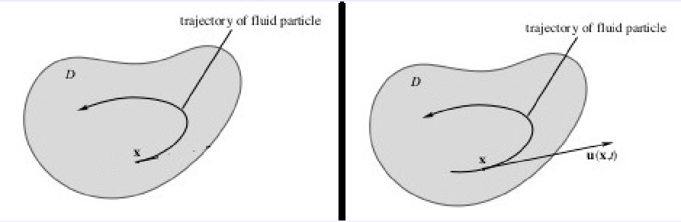
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t(\rho u) + \nabla\,.\,(\rho u \otimes u) & = & \nabla\,.\,\sigma + \rho G; \\ \\ \partial_t \rho + \nabla\,.\,(\rho u) & = & 0. \end{array} \right. \tag{1}$$

- $u = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ é o campo de velocidades;
- $\rho = \rho(x,t)$ é a densidade;
- σ é o tensor de tensão;
- $G = (G_1(x,t), G_2(x,t), G_3(x,t))$ é um campo de forças que atua sobre o escoamento;
- $\nabla\,. =$ divergente;

$$u \otimes u = \begin{bmatrix} u_1 u_1 & u_2 u_1 & u_3 u_1 \\ u_1 u_2 & u_2 u_2 & u_3 u_2 \\ u_1 u_3 & u_2 u_3 & u_3 u_3 \end{bmatrix}$$

O modelo Hall-MHD

- Considere um escoamento de um meio contínuo em uma região $D \subset \mathbb{R}^3$:



$$\begin{cases} \partial_t(\rho u) + \nabla . (\rho u \otimes u) & = & \nabla . \sigma + \rho G; \; \textcolor{red}{\text{3 equações}} \\ \partial_t \rho + \nabla . (\rho u) & = & 0. \; \textcolor{red}{\text{1 equação}} \end{cases} \tag{1}$$

- $u = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ é o campo de velocidades;
- $\rho = \rho(x,t)$ é a densidade;
- σ é o tensor de tensão;
- $G = (G_1(x,t), G_2(x,t), G_3(x,t))$ é um campo de forças que atua sobre o escoamento;
- $\nabla . =$ divergente;

$$u \otimes u = \begin{bmatrix} u_1 u_1 & u_2 u_1 & u_3 u_1 \\ u_1 u_2 & u_2 u_2 & u_3 u_2 \\ u_1 u_3 & u_2 u_3 & u_3 u_3 \end{bmatrix}$$

O modelo Hall-MHD

$$\begin{cases} \overbrace{\partial_t(\rho u) + \nabla\,.\,(\rho u \otimes u)}^{\text{variação momento linear}} = \overbrace{\underbrace{\nabla\,.\,\sigma}_{\text{forças de contato}} + \underbrace{\rho G}_{\text{força à distância}}}^{\text{forças}}; & \text{2ª Lei de Newton} \\ \partial_t \rho + \nabla\,.\,(\rho u) = 0. & \text{conservação da massa} \end{cases}$$

- Escoamento homogêneo, incompressível e Newtoniano:

$$\rho \equiv 1 \quad \text{e} \quad \sigma = -p\mathbb{I} + \mu \nabla u.$$

- $\mu > 0$ é o coeficiente de viscosidade (vamos supor $\mu = 1$) e $p = p(x,t)$ é a pressão.

$$N.S. \begin{cases} \partial_t u + \nabla\,.\,(u \otimes u) = -\nabla p + \Delta u + G; \\ \nabla\,.\,u = 0. \end{cases}$$

O modelo Hall-MHD

$$\begin{cases} \overbrace{\partial_t(\rho u) + \nabla\,.\,(\rho u \otimes u)}^{\text{variação momento linear}} &= \overbrace{\underbrace{\nabla\,.\,\sigma}_{\text{forças de contato}} \quad + \quad \underbrace{\rho G}_{\text{força à distância}}}^{\text{forças}} \; ; \; \text{2ª Lei de Newton} \\ \partial_t \rho + \nabla\,.\,(\rho u) &= 0. \; \text{conservação da massa} \end{cases}$$

- Escoamento homogêneo, incompressível e Newtoniano:

$$\rho \equiv 1 \quad \text{e} \quad \sigma = -p\,\mathbb{I} + \mu \nabla u.$$

- $\mu > 0$ é o coeficiente de viscosidade (vamos supor $\mu = 1$) e $p = p(x,t)$ é a pressão.

$$N.S. \begin{cases} \partial_t u + \nabla\,.\,(u \otimes u) &= -\nabla p + \Delta u + G; \\ \nabla\,.\,u &= 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overbrace{\partial_t(\rho u) + \nabla\,.\,(\rho u \otimes u)}^{\text{variação momento linear}} & = \overbrace{\underbrace{\nabla\,.\,\sigma}_{\text{forças de contato}} + \underbrace{\rho G}_{\text{força à distância}}}^{\text{forças}}; \text{ 2ª Lei de Newton} \\ \partial_t \rho + \nabla\,.\,(\rho u) & = 0. \text{ conservação da massa} \end{cases}$$

- Escoamento homogêneo, incompressível e Newtoniano:

$$\rho \equiv 1 \quad \text{e} \quad \sigma = -p\,\mathbb{I} + \mu \nabla u.$$

- $\mu > 0$ é o coeficiente de viscosidade (vamos supor $\mu = 1$) e $p = p(x,t)$ é a pressão.

$$N.S. \begin{cases} \partial_t u + \nabla\,.\,(u \otimes u) & = -\nabla p + \Delta u + G; \\ \nabla\,.\,u & = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overbrace{\partial_t(\rho u) + \nabla\,.\,(\rho u \otimes u)}^{\text{variação momento linear}} &= \overbrace{\underbrace{\nabla\,.\,\sigma}_{\text{forças de contato}} \quad + \quad \underbrace{\rho G}_{\text{força à distância}}}^{\text{forças}} \text{; } \color{blue}{2^{\text{a}}\text{ Lei de Newton}} \\ \partial_t \rho + \nabla\,.\,(\rho u) &= 0. \text{ } \color{blue}{\text{conservação da massa}} \end{cases}$$

- Escoamento homogêneo, incompressível e Newtoniano:

$$\rho \equiv 1 \quad \text{e} \quad \sigma = -p\,\mathbb{I} + \mu \nabla u.$$

- $\mu > 0$ é o coeficiente de viscosidade (vamos supor $\mu = 1$) e $p = p(x, t)$ é a pressão.

$$\color{red}{N.S.} \begin{cases} \partial_t u + \nabla\,.\,(u \otimes u) &= -\nabla p + \Delta u + G; \\ \nabla\,.\,u &= 0. \end{cases}$$

O modelo Hall-MHD

- Modelo para o escoamento:

$$N.S.\begin{cases} \partial_t u + \nabla \, . \, (u \otimes u) &= -\nabla p + \Delta u + G; \\ \nabla \, . \, u &= 0. \end{cases} \tag{2}$$

- Introduzimos as equações do eletromagnetismo:

$$Maxwell\begin{cases} \partial_t b + \nabla \times e &= 0; \\ \nabla \times b &= j; \\ \nabla \, . \, b &= 0. \end{cases} \tag{3}$$

  - $b = (b_1(x,t), b_2(x,t), b_3(x,t))$ é o campo magnético;
  - $e = (e_1(x,t), e_2(x,t), e_3(x,t))$ é o campo elétrico;
  - $j = (j_1(x,t), j_2(x,t), j_3(x,t))$ é o campo densidade de corrente elétrica;
  - $\times$ = produto vetorial;
  - $\nabla \times$ = rotacional.
- Acoplamentos:
  - Força de Lorentz;
  - Lei de Ohm para fluidos;

O modelo Hall-MHD

- Modelo para o escoamento:

$$N.S. \begin{cases} \partial_t u + \nabla . (u \otimes u) &= -\nabla p + \Delta u + G; \\ \nabla . u &= 0. \end{cases} \tag{2}$$

- Introduzimos as equações do eletromagnetismo:

$$Maxwell \begin{cases} \partial_t b + \nabla \times e &= 0; \\ \nabla \times b &= j; \\ \nabla . b &= 0. \end{cases} \tag{3}$$

  - $b = (b_1(x,t), b_2(x,t), b_3(x,t))$ é o campo magnético;
  - $e = (e_1(x,t), e_2(x,t), e_3(x,t))$ é o campo elétrico;
  - $j = (j_1(x,t), j_2(x,t), j_3(x,t))$ é o campo densidade de corrente elétrica;
  - $\times$ = produto vetorial;
  - $\nabla \times$ = rotacional.
- Acoplamentos:
  - Força de Lorentz:
  - Lei de Ohm para fluidos:

O modelo Hall-MHD

- Modelo para o escoamento:

$$N.S.\begin{cases} \partial_t u + \nabla . (u \otimes u) &= -\nabla p + \Delta u + G; \\ \nabla . u &= 0. \end{cases} \tag{2}$$

- Introduzimos as equações do eletromagnetismo:

$$Maxwell\begin{cases} \partial_t b + \nabla \times e &= 0; \\ \nabla \times b &= j; \\ \nabla . b &= 0. \end{cases} \tag{3}$$

  - $b = (b_1(x,t), b_2(x,t), b_3(x,t))$ é o campo magnético;
  - $e = (e_1(x,t), e_2(x,t), e_3(x,t))$ é o campo elétrico;
  - $j = (j_1(x,t), j_2(x,t), j_3(x,t))$ é o campo densidade de corrente elétrica;
  - $\times$ = produto vetorial;
  - $\nabla\times$ = rotacional.
- Acoplamentos:
  - Força de Lorentz:
  - Lei de Ohm para fluidos:

O modelo Hall-MHD

- Modelo para o escoamento:

$$N.S. \begin{cases} \partial_t u + \nabla \,.\, (u \otimes u) &= -\nabla p + \Delta u + G; \\ \nabla \,.\, u &= 0. \end{cases} \tag{2}$$

- Introduzimos as equações do eletromagnetismo:

$$Maxwell \begin{cases} \partial_t b + \nabla \times e &= 0; \\ \nabla \times b &= j; \\ \nabla \,.\, b &= 0. \end{cases} \tag{3}$$

  - $b = (b_1(x,t), b_2(x,t), b_3(x,t))$ é o campo magnético;
  - $e = (e_1(x,t), e_2(x,t), e_3(x,t))$ é o campo elétrico;
  - $j = (j_1(x,t), j_2(x,t), j_3(x,t))$ é o campo densidade de corrente elétrica;
  - $\times$ = produto vetorial;
  - $\nabla \times$ = rotacional.
- Acoplamentos:
  - Força de Lorentz:
  - Lei de Ohm para fluidos:

- Modelo para o escoamento:

$$\textcolor{red}{N.S.}\begin{cases} \partial_t u + \nabla\,.\,(u \otimes u) &= -\nabla p + \Delta u + G; \\ \nabla\,.\,u &= 0. \end{cases} \tag{2}$$

- Introduzimos as equações do eletromagnetismo:

$$\textcolor{red}{Maxwell}\begin{cases} \partial_t b + \nabla \times e &= 0; \\ \nabla \times b &= j; \\ \nabla\,.\,b &= 0. \end{cases} \tag{3}$$

  - $b = (b_1(x,t), b_2(x,t), b_3(x,t))$ é o campo magnético;
  - $e = (e_1(x,t), e_2(x,t), e_3(x,t))$ é o campo elétrico;
  - $j = (j_1(x,t), j_2(x,t), j_3(x,t))$ é o campo densidade de corrente elétrica;
  - $\times$ = produto vetorial;
  - $\nabla\times$ = rotacional.
- Acoplamentos:
  - Força de Lorentz:
  - Lei de Ohm para fluidos:

- Modelo para o escoamento:

$$N.S.\begin{cases} \partial_t u + \nabla . (u \otimes u) = -\nabla p + \Delta u + G; \\ \nabla . u = 0. \end{cases} \tag{2}$$

- Introduzimos as equações do eletromagnetismo:

$$Maxwell\begin{cases} \partial_t b + \nabla \times e = 0; \\ \nabla \times b = j; \\ \nabla . b = 0. \end{cases} \tag{3}$$

  - $b = (b_1(x,t), b_2(x,t), b_3(x,t))$ é o campo magnético;
  - $e = (e_1(x,t), e_2(x,t), e_3(x,t))$ é o campo elétrico;
  - $j = (j_1(x,t), j_2(x,t), j_3(x,t))$ é o campo densidade de corrente elétrica;
  - $\times$ = produto vetorial;
  - $\nabla \times$ = rotacional.
- Acoplamentos:
  - Força de Lorentz:
  - Lei de Ohm para fluidos:

O modelo Hall-MHD

- Modelo para o escoamento:

$$\textcolor{red}{N.S.}\begin{cases} \partial_t u + \nabla . (u \otimes u) &= -\nabla p + \Delta u + G; \\ \nabla . u &= 0. \end{cases} \tag{2}$$

- Introduzimos as equações do eletromagnetismo:

$$\textcolor{red}{Maxwell}\begin{cases} \partial_t b + \nabla \times e &= 0; \\ \nabla \times b &= j; \\ \nabla . b &= 0. \end{cases} \tag{3}$$

  - $b = (b_1(x,t), b_2(x,t), b_3(x,t))$ é o campo magnético;
  - $e = (e_1(x,t), e_2(x,t), e_3(x,t))$ é o campo elétrico;
  - $j = (j_1(x,t), j_2(x,t), j_3(x,t))$ é o campo densidade de corrente elétrica;
  - $\times$ = produto vetorial;
  - $\nabla\times$ = rotacional.
- Acoplamentos:
  - Força de Lorentz:
  - Lei de Ohm para fluidos:

O modelo Hall-MHD

- Modelo para o escoamento:

$$N.S.\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t u + \nabla\,.\,(u \otimes u) & = & -\nabla p + \Delta u + G; \\ \nabla\,.\,u & = & 0. \end{array}\right. \tag{2}$$

- Introduzimos as equações do eletromagnetismo:

$$Maxwell\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t b + \nabla \times e & = & 0; \\ \nabla \times b & = & j; \\ \nabla\,.\,b & = & 0. \end{array}\right. \tag{3}$$

  - $b = (b_1(x,t), b_2(x,t), b_3(x,t))$ é o campo magnético;
  - $e = (e_1(x,t), e_2(x,t), e_3(x,t))$ é o campo elétrico;
  - $j = (j_1(x,t), j_2(x,t), j_3(x,t))$ é o campo densidade de corrente elétrica;
  - $\times$ = produto vetorial;
  - $\nabla\times$ = rotacional.
- Acoplamentos:
  - Força de Lorentz:
  - Lei de Ohm para fluidos:

- Modelo para o escoamento:

$$N.S. \begin{cases} \partial_t u + \nabla . (u \otimes u) &= -\nabla p + \Delta u + G; \\ \nabla . u &= 0. \end{cases} \tag{2}$$

- Introduzimos as equações do eletromagnetismo:

$$Maxwell \begin{cases} \partial_t b + \nabla \times e &= 0; \\ \nabla \times b &= j; \\ \nabla . b &= 0. \end{cases} \tag{3}$$

  - $b = (b_1(x,t), b_2(x,t), b_3(x,t))$ é o campo magnético;
  - $e = (e_1(x,t), e_2(x,t), e_3(x,t))$ é o campo elétrico;
  - $j = (j_1(x,t), j_2(x,t), j_3(x,t))$ é o campo densidade de corrente elétrica;
  - $\times$ = produto vetorial;
  - $\nabla\times$ = rotacional.
- Acoplamentos:
  - Força de Lorentz:

$$G = j \times b.$$

  - Lei de Ohm para fluidos:

O modelo Hall-MHD

- Modelo para o escoamento:

$$N.S.\begin{cases} \partial_t u + \nabla . (u \otimes u) &= -\nabla p + \Delta u + G; \\ \nabla . u &= 0. \end{cases} \tag{2}$$

- Introduzimos as equações do eletromagnetismo:

$$Maxwell\begin{cases} \partial_t b + \nabla \times e &= 0; \\ \nabla \times b &= j; \\ \nabla . b &= 0. \end{cases} \tag{3}$$

  - $b = (b_1(x,t), b_2(x,t), b_3(x,t))$ é o campo magnético;
  - $e = (e_1(x,t), e_2(x,t), e_3(x,t))$ é o campo elétrico;
  - $j = (j_1(x,t), j_2(x,t), j_3(x,t))$ é o campo densidade de corrente elétrica;
  - $\times$ = produto vetorial;
  - $\nabla\times$ = rotacional.
- Acoplamentos:
  - Força de Lorentz:

$$G = j \times b = (\nabla \times b) \times b. \tag{4}$$

  - Lei de Ohm para fluidos:

O modelo Hall-MHD

- Modelo para o escoamento:

$$N.S. \begin{cases} \partial_t u + \nabla \,.\, (u \otimes u) & = & -\nabla p + \Delta u + G; \\ \nabla \,.\, u & = & 0. \end{cases} \tag{2}$$

- Introduzimos as equações do eletromagnetismo:

$$Maxwell \begin{cases} \partial_t b + \nabla \times e & = & 0; \\ \nabla \times b & = & j; \\ \nabla \,.\, b & = & 0. \end{cases} \tag{3}$$

  - $b = (b_1(x,t), b_2(x,t), b_3(x,t))$ é o campo magnético;
  - $e = (e_1(x,t), e_2(x,t), e_3(x,t))$ é o campo elétrico;
  - $j = (j_1(x,t), j_2(x,t), j_3(x,t))$ é o campo densidade de corrente elétrica;
  - $\times$ = produto vetorial;
  - $\nabla\times$ = rotacional.
- Acoplamentos:
  - Força de Lorentz:

$$G = j \times b = (\nabla \times b) \times b. \tag{4}$$

  - Lei de Ohm para fluidos:

- Modelo para o escoamento:

$$N.S. \begin{cases} \partial_t u + \nabla . (u \otimes u) & = & -\nabla p + \Delta u + G; \\ \nabla . u & = & 0. \end{cases} \tag{2}$$

- Introduzimos as equações do eletromagnetismo:

$$Maxwell \begin{cases} \partial_t b + \nabla \times e & = & 0; \\ \nabla \times b & = & j; \\ \nabla . b & = & 0. \end{cases} \tag{3}$$

  - $b = (b_1(x,t), b_2(x,t), b_3(x,t))$ é o campo magnético;
  - $e = (e_1(x,t), e_2(x,t), e_3(x,t))$ é o campo elétrico;
  - $j = (j_1(x,t), j_2(x,t), j_3(x,t))$ é o campo densidade de corrente elétrica;
  - $\times$ = produto vetorial;
  - $\nabla\times$ = rotacional.
- Acoplamentos:
  - Força de Lorentz:

$$G = j \times b = (\nabla \times b) \times b. \tag{4}$$

  - Lei de Ohm para fluidos:

$$e = -u \times b \quad (\text{ MHD ideal (sem resistividade) }). \tag{5}$$

O modelo Hall-MHD

- Modelo para o escoamento:

$$N.S. \begin{cases} \partial_t u + \nabla . (u \otimes u) & = & -\nabla p + \Delta u + G; \\ \nabla . u & = & 0. \end{cases} \tag{2}$$

- Introduzimos as equações do eletromagnetismo:

$$Maxwell \begin{cases} \partial_t b + \nabla \times e & = & 0; \\ \nabla \times b & = & j; \\ \nabla . b & = & 0. \end{cases} \tag{3}$$

  - $b = (b_1(x,t), b_2(x,t), b_3(x,t))$ é o campo magnético;
  - $e = (e_1(x,t), e_2(x,t), e_3(x,t))$ é o campo elétrico;
  - $j = (j_1(x,t), j_2(x,t), j_3(x,t))$ é o campo densidade de corrente elétrica;
  - $\times$ = produto vetorial;
  - $\nabla\times$ = rotacional.
- Acoplamentos:
  - Força de Lorentz:

$$G = j \times b = (\nabla \times b) \times b. \tag{4}$$

  - Lei de Ohm para fluidos:

$$e = -u \times b + j \quad (\text{ MHD com resistividade }). \tag{5}$$

O modelo Hall-MHD

- Modelo para o escoamento:

$$N.S. \begin{cases} \partial_t u + \nabla . (u \otimes u) &= -\nabla p + \Delta u + G; \\ \nabla . u &= 0. \end{cases} \tag{2}$$

- Introduzimos as equações do eletromagnetismo:

$$Maxwell \begin{cases} \partial_t b + \nabla \times e &= 0; \\ \nabla \times b &= j; \\ \nabla . b &= 0. \end{cases} \tag{3}$$

  - $b = (b_1(x,t), b_2(x,t), b_3(x,t))$ é o campo magnético;
  - $e = (e_1(x,t), e_2(x,t), e_3(x,t))$ é o campo elétrico;
  - $j = (j_1(x,t), j_2(x,t), j_3(x,t))$ é o campo densidade de corrente elétrica;
  - $\times$ = produto vetorial;
  - $\nabla\times$ = rotacional.
- Acoplamentos:
  - Força de Lorentz:

$$G = j \times b = (\nabla \times b) \times b. \tag{4}$$

  - Lei de Ohm para fluidos:

$$e = -u \times b + j + j \times b \quad (\text{ MHD com resistividade e com efeito de Hall }). \tag{5}$$

Sistema Hall - MHD 3D com viscosidade e resistividade

$$\begin{cases} \partial_t u + \nabla \,.\, (u \otimes u) + \nabla p - (\nabla \times b) \times b &= \Delta u \qquad \mathbb{R}^3 \times [0,\infty); \\ \partial_t b - \nabla \times (u \times b) + \nabla \times ((\nabla \times b) \times b) &= \Delta b \qquad \mathbb{R}^3 \times [0,\infty); \\ \nabla \,.\, u &= 0 \qquad \mathbb{R}^3 \times [0,\infty); \\ \nabla \,.\, b &= 0 \qquad \mathbb{R}^3 \times [0,\infty). \end{cases}$$

- $\nabla \times ((\nabla \times b) \times b)$ é o Termo de Hall.

$$\text{Hall-MHD} \quad = \quad \text{MHD “clássica”} \quad + \quad \text{Termo de Hall.}$$

- Novidade: Derivada espacial de segunda-ordem em um termo não-linear.

- Vamos considerar o caso $D = \mathbb{R}^3$.

Sistema Hall - MHD 3D com viscosidade e resistividade

$$\begin{cases} \partial_t u + \nabla . (u \otimes u) + \nabla p - (\nabla \times b) \times b &= \Delta u \qquad \mathbb{R}^3 \times [0, \infty); \\ \partial_t b - \nabla \times (u \times b) + \nabla \times ((\nabla \times b) \times b) &= \Delta b \qquad \mathbb{R}^3 \times [0, \infty); \\ \nabla . u &= 0 \qquad \mathbb{R}^3 \times [0, \infty); \\ \nabla . b &= 0 \qquad \mathbb{R}^3 \times [0, \infty). \end{cases}$$

- $\nabla \times ((\nabla \times b) \times b)$ é o Termo de Hall.

$$\text{Hall-MHD} \quad = \quad \text{MHD “clássica”} \quad + \quad \text{Termo de Hall.}$$

- Novidade: Derivada espacial de segunda-ordem em um termo não-linear.
- Vamos considerar o caso $D = \mathbb{R}^3$.

Sistema Hall - MHD 3D com viscosidade e resistividade

$$
\begin{cases}
\partial_t u + \nabla \,.\, (u \otimes u) + \nabla p - (\nabla \times b) \times b & = & \Delta u & \mathbb{R}^3 \times [0, \infty); \\
\partial_t b - \nabla \times (u \times b) + \nabla \times ((\nabla \times b) \times b) & = & \Delta b & \mathbb{R}^3 \times [0, \infty); \\
\nabla \,.\, u & = & 0 & \mathbb{R}^3 \times [0, \infty); \\
\nabla \,.\, b & = & 0 & \mathbb{R}^3 \times [0, \infty).
\end{cases}
$$

- $\nabla \times ((\nabla \times b) \times b)$ é o Termo de Hall.

Hall-MHD $=$ MHD "clássica" $+$ Termo de Hall.

- Novidade: Derivada espacial de segunda-ordem em um termo não-linear.
- Vamos considerar o caso $D = \mathbb{R}^3$.

Sistema Hall - MHD 3D com viscosidade e resistividade

$$\begin{cases} \partial_t u + \nabla . (u \otimes u) + \nabla p - (\nabla \times b) \times b &= \Delta u \quad \mathbb{R}^3 \times [0, \infty); \\ \partial_t b - \nabla \times (u \times b) + \nabla \times ((\nabla \times b) \times b) &= \Delta b \quad \mathbb{R}^3 \times [0, \infty); \\ \nabla . u &= 0 \quad \mathbb{R}^3 \times [0, \infty); \\ \nabla . b &= 0 \quad \mathbb{R}^3 \times [0, \infty). \end{cases}$$

- $\nabla \times ((\nabla \times b) \times b)$ é o Termo de Hall.

$$\text{Hall-MHD} \quad = \quad \text{MHD “clássica”} \quad + \quad \text{Termo de Hall}.$$

- Novidade: Derivada espacial de segunda-ordem em um termo não-linear.
- Vamos considerar o caso $D = \mathbb{R}^3$.

Sistema Hall - MHD 3D com viscosidade e resistividade

$$\begin{cases} \partial_t u + \nabla . (u \otimes u) + \nabla p - (\nabla \times b) \times b & = & \Delta u & \mathbb{R}^3 \times [0, \infty); \\ \partial_t b - \nabla \times (u \times b) + \nabla \times ((\nabla \times b) \times b) & = & \Delta b & \mathbb{R}^3 \times [0, \infty); \\ \nabla . u & = & 0 & \mathbb{R}^3 \times [0, \infty); \\ \nabla . b & = & 0 & \mathbb{R}^3 \times [0, \infty). \end{cases}$$

- $\nabla \times ((\nabla \times b) \times b)$ é o Termo de Hall.

$$\text{Hall-MHD} \quad = \quad \text{MHD “clássica”} \quad + \quad \text{Termo de Hall}.$$

- Novidade: Derivada espacial de segunda-ordem em um termo não-linear.

- Vamos considerar o caso $D = \mathbb{R}^3$.

Soluções fracas

- Espaços básicos:

$$H^m_\sigma = \{v \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3;\ D^\alpha v \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3, \forall |\alpha| \leq m \ \text{ e } \ \nabla . v = 0\}.$$

- Definição: Dado $u_o, b_o \in L^2_\sigma$. Dizemos que

$$\left\{ \ u, b \quad \in \quad L^2((0,T); H^1_\sigma(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty((0,T); L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)), \right. \tag{6}$$

é uma solução fraca em $(0, T)$ se, $\forall \vartheta \in C_0^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^3) \cap H^m_\sigma$:

$$\int_0^T -(u, \partial_t \vartheta)_{L^2} + (\nabla . u \otimes u - (\nabla \times b) \times b, \vartheta)_{L^2} + (\nabla u, \nabla \vartheta)_{L^2} ds = (u_o, \vartheta(0))_{L^2};$$

$$\int_0^T -(b, \partial_t \vartheta)_{L^2} - (\nabla \times (u \times b), \vartheta)_{L^2} + (\nabla b, \nabla \vartheta)_{L^2} + ((\nabla \times b) \times b, \nabla \times \vartheta)_{L^2} ds = (b_o, \vartheta(0))_{L^2};$$

- Teorema:[2] Existem soluções fracas globalmente definidas no tempo. Unicidade de soluções fracas é um problema em aberto.
- *Ponto principal:* Indentidade de Energia para soluções suaves.

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\|b(T)\|^2_{L^2} + \int_0^T \|\nabla u\|^2_{L^2} + \|\nabla b\|^2_{L^2} ds = \frac{1}{2}\|u_o\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\|b_o\|^2_{L^2};$$

[2] Chae D., Degond P. & Liu J., *Well-posedness for Hall-magnetohydrodynamics*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 31 (2014), 555-565.

Soluções fracas

- Espaços básicos:

$$H^m_\sigma = \{v \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3;\ D^\alpha v \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3, \forall |\alpha| \leq m \ \text{ e } \ \nabla . v = 0\}.$$

- Definição: Dado $u_o, b_o \in L^2_\sigma$. Dizemos que

$$\{\ u, b \quad \in \quad L^2((0,T); H^1_\sigma(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty((0,T); L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)), \tag{6}$$

é uma <u>solução fraca</u> em $(0, T)$ se, $\forall \vartheta \in C^\infty_0([0,T) \times \mathbb{R}^3) \cap H^m_\sigma$:

$$\int_0^T -(u, \partial_t \vartheta)_{L^2} + (\nabla . u \otimes u - (\nabla \times b) \times b, \vartheta)_{L^2} + (\nabla u, \nabla \vartheta)_{L^2} ds = (u_o, \vartheta(0))_{L^2};$$

$$\int_0^T -(b, \partial_t \vartheta)_{L^2} - (\nabla \times (u \times b), \vartheta)_{L^2} + (\nabla b, \nabla \vartheta)_{L^2} + ((\nabla \times b) \times b, \nabla \times \vartheta)_{L^2} ds = (b_o, \vartheta(0))_{L^2};$$

- Teorema:[2] Existem soluções fracas globalmente definidas no tempo. Unicidade de soluções fracas é um problema em aberto.
- *Ponto principal:* <u>Indentidade de Energia para soluções suaves</u>.

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\|b(T)\|^2_{L^2} + \int_0^T \|\nabla u\|^2_{L^2} + \|\nabla b\|^2_{L^2} ds = \frac{1}{2}\|u_o\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\|b_o\|^2_{L^2};$$

---

[2] Chae D., Degond P. & Liu J., *Well-posedness for Hall-magnetohydrodynamics*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 31 (2014), 555-565.

- Espaços básicos:

$$H^m_\sigma = \{v \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3;\ D^\alpha v \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3, \forall\, |\alpha| \le m \ \text{ e } \ \nabla . v = 0\}.$$

- Definição: Dado $u_o, b_o \in L^2_\sigma$. Dizemos que

$$\left\{ \ u,\ b \quad \in \quad L^2((0,T); H^1_\sigma(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty((0,T); L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)), \right. \tag{6}$$

é uma solução fraca em $(0, T)$ se, $\forall\, \vartheta \in C_0^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^3) \cap H^m_\sigma$:

$$\int_0^T -(u, \partial_t \vartheta)_{L^2} + (\nabla . u \otimes u - (\nabla \times b) \times b, \vartheta)_{L^2} + (\nabla u, \nabla \vartheta)_{L^2}\, ds = (u_o, \vartheta(0))_{L^2};$$

$$\int_0^T -(b, \partial_t \vartheta)_{L^2} - (\nabla \times (u \times b), \vartheta)_{L^2} + (\nabla b, \nabla \vartheta)_{L^2} + ((\nabla \times b) \times b, \nabla \times \vartheta)_{L^2}\, ds = (b_o, \vartheta(0))_{L^2};$$

- Teorema:[2] Existem soluções fracas globalmente definidas no tempo. Unicidade de soluções fracas é um problema em aberto.
- *Ponto principal:* Indentidade de Energia para soluções suaves.

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\|b(T)\|^2_{L^2} + \int_0^T \|\nabla u\|^2_{L^2} + \|\nabla b\|^2_{L^2}\, ds = \frac{1}{2}\|u_o\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\|b_o\|^2_{L^2};$$

[2] Chae D., Degond P. & Liu J., *Well-posedness for Hall-magnetohydrodynamics*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 31 (2014), 555-565.

Soluções fracas

- Espaços básicos:

$$H^m_\sigma = \{v \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3;\ D^\alpha v \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3, \forall\, |\alpha| \leq m \ \text{ e } \ \nabla \,.\, v = 0\}.$$

- Definição: Dado $u_o, b_o \in L^2_\sigma$. Dizemos que

$$\{\ u,\ b \quad \in \quad L^2((0,T); H^1_\sigma(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty((0,T); L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)), \tag{6}$$

é uma solução fraca em $(0,T)$ se, $\forall\, \vartheta \in C_0^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^3) \cap H^m_\sigma$:

$$\int_0^T -(u, \partial_t \vartheta)_{L^2} + (\nabla \,.\, u \otimes u - (\nabla \times b) \times b, \vartheta)_{L^2} + (\nabla u, \nabla \vartheta)_{L^2}\, ds = (u_o, \vartheta(0))_{L^2};$$

$$\int_0^T -(b, \partial_t \vartheta)_{L^2} - (\nabla \times (u \times b), \vartheta)_{L^2} + (\nabla b, \nabla \vartheta)_{L^2} + ((\nabla \times b) \times b, \nabla \times \vartheta)_{L^2}\, ds = (b_o, \vartheta(0))_{L^2};$$

- Teorema:[2] Existem soluções fracas globalmente definidas no tempo. Unicidade de soluções fracas é um problema em aberto.
- *Ponto principal:* Indentidade de Energia para soluções suaves.

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\|b(T)\|^2_{L^2} + \int_0^T \|\nabla u\|^2_{L^2} + \|\nabla b\|^2_{L^2}\, ds = \frac{1}{2}\|u_o\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\|b_o\|^2_{L^2};$$

[2] Chae D., Degond P. & Liu J., *Well-posedness for Hall-magnetohydrodynamics*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 31 (2014), 555-565.

- Espaços básicos:

$$H^m_\sigma = \{v \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3;\ D^\alpha v \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3, \forall\, |\alpha| \leq m \ \text{ e } \ \nabla \,.\, v = 0\}.$$

- Definição: Dado $u_o, b_o \in L^2_\sigma$. Dizemos que

$$\{ \ u,\ b \quad \in \quad L^2((0,T); H^1_\sigma(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty((0,T); L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)), \tag{6}$$

é uma solução fraca em $(0,T)$ se, $\forall\, \vartheta \in C^\infty_0([0,T) \times \mathbb{R}^3) \cap H^m_\sigma$:

$$\int_0^T -(u, \partial_t \vartheta)_{L^2} + (\nabla \,.\, u \otimes u - (\nabla \times b) \times b, \vartheta)_{L^2} + (\nabla u, \nabla \vartheta)_{L^2}\, ds = (u_o, \vartheta(0))_{L^2};$$

$$\int_0^T -(b, \partial_t \vartheta)_{L^2} - (\nabla \times (u \times b), \vartheta)_{L^2} + (\nabla b, \nabla \vartheta)_{L^2} + ((\nabla \times b) \times b, \nabla \times \vartheta)_{L^2}\, ds = (b_o, \vartheta(0))_{L^2};$$

- Teorema:[2] Existem soluções fracas globalmente definidas no tempo. Unicidade de soluções fracas é um problema em aberto.
- *Ponto principal:* Indentidade de Energia para soluções suaves.

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\|b(T)\|^2_{L^2} + \int_0^T \|\nabla u\|^2_{L^2} + \|\nabla b\|^2_{L^2}\, ds = \frac{1}{2}\|u_o\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\|b_o\|^2_{L^2};$$

[2] Chae D., Degond P. & Liu J., *Well-posedness for Hall-magnetohydrodynamics*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 31 (2014), 555-565.

Soluções fracas

- Espaços básicos:

$$H_\sigma^m = \{v \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3;\ D^\alpha v \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3, \forall\, |\alpha| \leq m \ \text{ e } \ \nabla \,.\, v = 0\}.$$

- Definição: Dado $u_o, b_o \in L^2_\sigma$. Dizemos que

$$\{\ u,\ b \quad \in \quad L^2((0,T); H^1_\sigma(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty((0,T); L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)), \tag{6}$$

é uma solução fraca em $(0,T)$ se, $\forall\, \vartheta \in C_0^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^3) \cap H_\sigma^m$:

$$\int_0^T -(u, \partial_t \vartheta)_{L^2} + (\nabla \,.\, u \otimes u - (\nabla \times b) \times b, \vartheta)_{L^2} + (\nabla u, \nabla \vartheta)_{L^2}\, ds = (u_o, \vartheta(0))_{L^2};$$

$$\int_0^T -(b, \partial_t \vartheta)_{L^2} - (\nabla \times (u \times b), \vartheta)_{L^2} + (\nabla b, \nabla \vartheta)_{L^2} + ((\nabla \times b) \times b, \nabla \times \vartheta)_{L^2}\, ds = (b_o, \vartheta(0))_{L^2};$$

- Teorema:[2] Existem soluções fracas globalmente definidas no tempo. Unicidade de soluções fracas é um problema em aberto.
- *Ponto principal:* Indentidade de Energia para soluções suaves.

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\|b(T)\|^2_{L^2} + \int_0^T \|\nabla u\|^2_{L^2} + \|\nabla b\|^2_{L^2}\, ds = \frac{1}{2}\|u_o\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\|b_o\|^2_{L^2};$$

[2] Chae D., Degond P. & Liu J., *Well-posedness for Hall-magnetohydrodynamics*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 31 (2014), 555-565.

- Espaços básicos:

$$H^m_\sigma = \{v \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3;\ D^\alpha v \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3,\ \forall\,|\alpha| \le m \ \text{ e } \ \nabla . v = 0\}.$$

- Definição: Dado $u_o, b_o \in L^2_\sigma$. Dizemos que

$$\left\{\ u,\ b \quad \in \quad L^2((0,T); H^1_\sigma(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty((0,T); L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)), \right. \tag{6}$$

é uma solução fraca em $(0,T)$ se, $\forall\,\vartheta \in C_0^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^3) \cap H^m_\sigma$:

$$\int_0^T -(u, \partial_t\vartheta)_{L^2} + (\nabla . u \otimes u - (\nabla \times b) \times b, \vartheta)_{L^2} + (\nabla u, \nabla\vartheta)_{L^2}\, ds = (u_o, \vartheta(0))_{L^2};$$

$$\int_0^T -(b, \partial_t\vartheta)_{L^2} - (\nabla \times (u \times b), \vartheta)_{L^2} + (\nabla b, \nabla\vartheta)_{L^2} + ((\nabla \times b) \times b, \nabla \times \vartheta)_{L^2}\, ds = (b_o, \vartheta(0))_{L^2};$$

- Teorema:[2] Existem soluções fracas globalmente definidas no tempo. Unicidade de soluções fracas é um problema em aberto.
- *Ponto principal:* Indentidade de Energia para soluções suaves.

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\|b(T)\|^2_{L^2} + \int_0^T \|\nabla u\|^2_{L^2} + \|\nabla b\|^2_{L^2}\, ds = \frac{1}{2}\|u_o\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\|b_o\|^2_{L^2};$$

[2] Chae D., Degond P. & Liu J., *Well-posedness for Hall-magnetohydrodynamics*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 31 (2014), 555-565.

Soluções fracas

- Espaços básicos:

$$H_\sigma^m = \{v \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3;\ D^\alpha v \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3, \forall\, |\alpha| \le m \ \text{ e } \ \nabla \,.\, v = 0\}.$$

- Definição: Dado $u_o, b_o \in L^2_\sigma$. Dizemos que

$$\{\ u,\ b \quad \in \quad L^2((0,T); H^1_\sigma(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty((0,T); L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)), \tag{6}$$

é uma solução fraca em $(0,T)$ se, $\forall\, \vartheta \in C_0^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^3) \cap H^m_\sigma$:

$$\int_0^T -(u, \partial_t \vartheta)_{L^2} + (\nabla \,.\, u \otimes u - (\nabla \times b) \times b, \vartheta)_{L^2} + (\nabla u, \nabla \vartheta)_{L^2}\, ds = (u_o, \vartheta(0))_{L^2};$$

$$\int_0^T -(b, \partial_t \vartheta)_{L^2} - (\nabla \times (u \times b), \vartheta)_{L^2} + (\nabla b, \nabla \vartheta)_{L^2} + ((\nabla \times b) \times b, \nabla \times \vartheta)_{L^2}\, ds = (b_o, \vartheta(0))_{L^2};$$

- Teorema:[2] Existem soluções fracas globalmente definidas no tempo. Unicidade de soluções fracas é um problema em aberto.
- *Ponto principal:* Indentidade de Energia para soluções suaves.

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\|b(T)\|^2_{L^2} + \int_0^T \|\nabla u\|^2_{L^2} + \|\nabla b\|^2_{L^2}\, ds = \frac{1}{2}\|u_o\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\|b_o\|^2_{L^2};$$

[2] Chae D., Degond P. & Liu J., *Well-posedness for Hall-magnetohydrodynamics*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 31 (2014), 555-565.

Ideia da demonstração:

- Seja $\mathcal{J}_n \equiv \rho_n *$ um mollifier. Regulariza-se o sistema:

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{J}_n(\mathcal{J}_n u \otimes \mathcal{J}_n u) - \mathcal{J}_n((\nabla \times \mathcal{J}_n b) \times \mathcal{J}_n b) - \nabla p &= \Delta \mathcal{J}_n^2 u; \\ \partial_t b - \nabla \times \mathcal{J}_n(\mathcal{J}_n u \times \mathcal{J}_n b) + \nabla \times \mathcal{J}_n((\nabla \times \mathcal{J}_n b) \times \mathcal{J}_n b) &= \Delta \mathcal{J}_n^2 b; \\ (u_{n,0}, b_{n,0}) &= (\mathcal{J}_n u_0, \mathcal{J}_n b_0). \end{cases}$$

- Considera-se o sistema acima como uma EDO autônoma em H^m_σ e usa-se o Teorema de Picard para espaços de Banach para obter existência de soluções suaves globais no tempo (u_n, b_n). O ponto chave aqui são as desigualdades obtidas via mollifier ($\|\mathcal{J}_n v\|_{H^{m+k}} \leq C(m,k)\|\mathcal{J}_n v\|_{H^m}$).

- Usa-se a Identidade de Energia vista anteriormente para obter-se estimativas, independentes de n, para (u_n, b_n) em $L^2((0,\infty); H^1_\sigma) \cap L^\infty((0,\infty); L^2_\sigma)$ e para $(\partial_t u_n, \partial_t b_n)$, em $L^{\frac{4}{3}}((0,\infty); H^{-2}_\sigma)$

- Usa-se resultados de compacidade do tipo Aubin-Lions para extrair uma subsequência de $(u_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge em espaços adequados, e em sentidos fracos, e de tal forma que é possível passar o limite na formulação fraca, obtendo assim existência de soluções fracas.

- Não há regularidade suficiente nas soluções fracas para demonstrar unicidade de soluções.

- O Termo de Hall não ofereceu dificuldade extra.

Soluções fracas

Ideia da demonstração:

- Seja $\mathcal{J}_n \equiv \rho_n *$ um mollifier. Regulariza-se o sistema:

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{J}_n(\mathcal{J}_n u \otimes \mathcal{J}_n u) - \mathcal{J}_n((\nabla \times \mathcal{J}_n b) \times \mathcal{J}_n b) - \nabla p &= \Delta \mathcal{J}_n^2 u; \\ \partial_t b - \nabla \times \mathcal{J}_n(\mathcal{J}_n u \times \mathcal{J}_n b) + \nabla \times \mathcal{J}_n((\nabla \times \mathcal{J}_n b) \times \mathcal{J}_n b) &= \Delta \mathcal{J}_n^2 b; \\ (u_{n,0}, b_{n,0}) &= (\mathcal{J}_n u_0, \mathcal{J}_n b_0). \end{cases}$$

- Considera-se o sistema acima como uma EDO autônoma em H^m_σ e usa-se o Teorema de Picard para espaços de Banach para obter existência de soluções suaves globais no tempo (u_n, b_n). O ponto chave aqui são as desigualdades obtidas via mollifier ($\|\mathcal{J}_n v\|_{H^{m+k}} \leq C(n,k)\|\mathcal{J}_n v\|_{H^m}$).

- Usa-se a Identidade de Energia vista anteriormente para obter-se estimativas, independentes de n, para (u_n, b_n) em $L^2((0,\infty); H^1_\sigma) \cap L^\infty((0,\infty); L^2_\sigma)$ e para $(\partial_t u_n, \partial_t b_n)$, em $L^{\frac{4}{3}}((0,\infty); H^{-2}_\sigma)$

- Usa-se resultados de compacidade do tipo Aubin-Lions para extrair uma subsequência de $(u_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge em espaços adequados, e em sentidos fracos, e de tal forma que é possível passar o limite na formulação fraca, obtendo assim existência de soluções fracas.

- Não há regularidade suficiente nas soluções fracas para demonstrar unicidade de soluções.

- O Termo de Hall não ofereceu dificuldade extra.

Soluções fracas

Ideia da demonstração:

- Seja $\mathcal{J}_n \equiv \rho_n *$ um mollifier. Regulariza-se o sistema:

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{J}_n(\mathcal{J}_n u \otimes \mathcal{J}_n u) - \mathcal{J}_n((\nabla \times \mathcal{J}_n b) \times \mathcal{J}_n b) - \nabla p &= \Delta \mathcal{J}_n^2 u; \\ \partial_t b - \nabla \times \mathcal{J}_n(\mathcal{J}_n u \times \mathcal{J}_n b) + \nabla \times \mathcal{J}_n((\nabla \times \mathcal{J}_n b) \times \mathcal{J}_n b) &= \Delta \mathcal{J}_n^2 b; \\ (u_{n,0}, b_{n,0}) &= (\mathcal{J}_n u_0, \mathcal{J}_n b_0). \end{cases}$$

- Considera-se o sistema acima como uma EDO autônoma em H^m_σ e usa-se o Teorema de Picard para espaços de Banach para obter existência de soluções suaves globais no tempo (u_n, b_n). O ponto chave aqui são as desigualdades obtidas via mollifier ($\|\mathcal{J}_n v\|_{H^{m+k}} \leq C(n,k)\|\mathcal{J}_n v\|_{H^m}$).

- Usa-se a Identidade de Energia vista anteriormente para obter-se estimativas, independentes de n, para (u_n, b_n) em $L^2((0,\infty); H^1_\sigma) \cap L^\infty((0,\infty); L^2_\sigma)$ e para $(\partial_t u_n, \partial_t b_n)$, em $L^{\frac{4}{3}}((0,\infty); H^{-2}_\sigma)$

- Usa-se resultados de compacidade do tipo Aubin-Lions para extrair uma subsequência de $(u_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge em espaços adequados, e em sentidos fracos, e de tal forma que é possível passar o limite na formulação fraca, obtendo assim existência de soluções fracas.

- Não há regularidade suficiente nas soluções fracas para demonstrar unicidade de soluções.

- O Termo de Hall não ofereceu dificuldade extra.

Soluções fracas

Ideia da demonstração:

- Seja $\mathcal{J}_n \equiv \rho_n *$ um mollifier. Regulariza-se o sistema:

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{J}_n(\mathcal{J}_n u \otimes \mathcal{J}_n u) - \mathcal{J}_n((\nabla \times \mathcal{J}_n b) \times \mathcal{J}_n b) - \nabla p & = & \Delta \mathcal{J}_n^2 u; \\ \partial_t b - \nabla \times \mathcal{J}_n(\mathcal{J}_n u \times \mathcal{J}_n b) + \nabla \times \mathcal{J}_n((\nabla \times \mathcal{J}_n b) \times \mathcal{J}_n b) & = & \Delta \mathcal{J}_n^2 b; \\ (u_{n,0}, b_{n,0}) & = & (\mathcal{J}_n u_0, \mathcal{J}_n b_0). \end{cases}$$

- Considera-se o sistema acima como uma EDO autônoma em H^m_σ e usa-se o Teorema de Picard para espaços de Banach para obter existência de soluções suaves globais no tempo (u_n, b_n). O ponto chave aqui são as desigualdades obtidas via mollifier $(\|\mathcal{J}_n v\|_{H^{m+k}} \leq C(n,k)\|\mathcal{J}_n v\|_{H^m})$.

- Usa-se a Identidade de Energia vista anteriormente para obter-se estimativas, independentes de n, para (u_n, b_n) em $L^2((0,\infty); H^1_\sigma) \cap L^\infty((0,\infty); L^2_\sigma)$ e para $(\partial_t u_n, \partial_t b_n)$, em $L^{\frac{4}{3}}((0,\infty); H^{-2}_\sigma)$

- Usa-se resultados de compacidade do tipo Aubin-Lions para extrair uma subsequência de $(u_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge em espaços adequados, e em sentidos fracos, e de tal forma que é possível passar o limite na formulação fraca, obtendo assim existência de soluções fracas.

- Não há regularidade suficiente nas soluções fracas para demonstrar unicidade de soluções.

- O Termo de Hall não ofereceu dificuldade extra.

Soluções fracas

Ideia da demonstração:

- Seja $\mathcal{J}_n \equiv \rho_n *$ um mollifier. Regulariza-se o sistema:

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{J}_n(\mathcal{J}_n u \otimes \mathcal{J}_n u) - \mathcal{J}_n((\nabla \times \mathcal{J}_n b) \times \mathcal{J}_n b) - \nabla p &= \Delta \mathcal{J}_n^2 u; \\ \partial_t b - \nabla \times \mathcal{J}_n(\mathcal{J}_n u \times \mathcal{J}_n b) + \nabla \times \mathcal{J}_n((\nabla \times \mathcal{J}_n b) \times \mathcal{J}_n b) &= \Delta \mathcal{J}_n^2 b; \\ (u_{n,0}, b_{n,0}) &= (\mathcal{J}_n u_0, \mathcal{J}_n b_0). \end{cases}$$

- Considera-se o sistema acima como uma EDO autônoma em H^m_σ e usa-se o Teorema de Picard para espaços de Banach para obter existência de soluções suaves globais no tempo (u_n, b_n). O ponto chave aqui são as desigualdades obtidas via mollifier ($\|\mathcal{J}_n v\|_{H^{m+k}} \leq C(n,k)\|\mathcal{J}_n v\|_{H^m}$).

- Usa-se a Identidade de Energia vista anteriormente para obter-se estimativas, independentes de n, para (u_n, b_n) em $L^2((0,\infty); H^1_\sigma) \cap L^\infty((0,\infty); L^2_\sigma)$ e para $(\partial_t u_n, \partial_t b_n)$, em $L^{\frac{4}{3}}((0,\infty); H^{-2}_\sigma)$

- Usa-se resultados de compacidade do tipo Aubin-Lions para extrair uma subsequência de $(u_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge em espaços adequados, e em sentidos fracos, e de tal forma que é possível passar o limite na formulação fraca, obtendo assim existência de soluções fracas.

- Não há regularidade suficiente nas soluções fracas para demonstrar unicidade de soluções.

- O Termo de Hall não ofereceu dificuldade extra.

Soluções fracas

Ideia da demonstração:

- Seja $\mathcal{J}_n \equiv \rho_n *$ um mollifier. Regulariza-se o sistema:

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{J}_n(\mathcal{J}_n u \otimes \mathcal{J}_n u) - \mathcal{J}_n((\nabla \times \mathcal{J}_n b) \times \mathcal{J}_n b) - \nabla p & = & \Delta \mathcal{J}_n^2 u; \\ \partial_t b - \nabla \times \mathcal{J}_n(\mathcal{J}_n u \times \mathcal{J}_n b) + \nabla \times \mathcal{J}_n((\nabla \times \mathcal{J}_n b) \times \mathcal{J}_n b) & = & \Delta \mathcal{J}_n^2 b; \\ (u_{n,0}, b_{n,0}) & = & (\mathcal{J}_n u_0, \mathcal{J}_n b_0). \end{cases}$$

- Considera-se o sistema acima como uma EDO autônoma em H^m_σ e usa-se o Teorema de Picard para espaços de Banach para obter existência de soluções suaves globais no tempo (u_n, b_n). O ponto chave aqui são as desigualdades obtidas via mollifier $(\|\mathcal{J}_n v\|_{H^{m+k}} \leq C(n,k)\|\mathcal{J}_n v\|_{H^m})$.

- Usa-se a Identidade de Energia vista anteriormente para obter-se estimativas, independentes de n, para (u_n, b_n) em $L^2((0,\infty); H^1_\sigma) \cap L^\infty((0,\infty); L^2_\sigma)$ e para $(\partial_t u_n, \partial_t b_n)$, em $L^{\frac{4}{3}}((0,\infty); H^{-2}_\sigma)$

- Usa-se resultados de compacidade do tipo Aubin-Lions para extrair uma subsequência de $(u_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge em espaços adequados, e em sentidos fracos, e de tal forma que é possível passar o limite na formulação fraca, obtendo assim existência de soluções fracas.

- Não há regularidade suficiente nas soluções fracas para demonstrar unicidade de soluções.

- O Termo de Hall não ofereceu dificuldade extra.

Soluções fracas

Ideia da demonstração:

- Seja $\mathcal{J}_n \equiv \rho_n *$ um mollifier. Regulariza-se o sistema:

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{J}_n(\mathcal{J}_n u \otimes \mathcal{J}_n u) - \mathcal{J}_n((\nabla \times \mathcal{J}_n b) \times \mathcal{J}_n b) - \nabla p &= \Delta \mathcal{J}_n^2 u; \\ \partial_t b - \nabla \times \mathcal{J}_n(\mathcal{J}_n u \times \mathcal{J}_n b) + \nabla \times \mathcal{J}_n((\nabla \times \mathcal{J}_n b) \times \mathcal{J}_n b) &= \Delta \mathcal{J}_n^2 b; \\ (u_{n,0}, b_{n,0}) &= (\mathcal{J}_n u_0, \mathcal{J}_n b_0). \end{cases}$$

- Considera-se o sistema acima como uma EDO autônoma em H^m_σ e usa-se o Teorema de Picard para espaços de Banach para obter existência de soluções suaves globais no tempo (u_n, b_n). O ponto chave aqui são as desigualdades obtidas via mollifier $(\|\mathcal{J}_n v\|_{H^{m+k}} \leq C(n,k)\|\mathcal{J}_n v\|_{H^m})$.

- Usa-se a Identidade de Energia vista anteriormente para obter-se estimativas, independentes de n, para (u_n, b_n) em $L^2((0,\infty); H^1_\sigma) \cap L^\infty((0,\infty); L^2_\sigma)$ e para $(\partial_t u_n, \partial_t b_n)$, em $L^{\frac{4}{3}}((0,\infty); H^{-2}_\sigma)$

- Usa-se resultados de compacidade do tipo Aubin-Lions para extrair uma subsequência de $(u_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge em espaços adequados, e em sentidos fracos, e de tal forma que é possível passar o limite na formulação fraca, obtendo assim existência de soluções fracas.

- Não há regularidade suficiente nas soluções fracas para demonstrar unicidade de soluções.

- O Termo de Hall não ofereceu dificuldade extra.

Soluções fracas

Ideia da demonstração:

- Seja $\mathcal{J}_n \equiv \rho_n *$ um mollifier. Regulariza-se o sistema:

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{J}_n(\mathcal{J}_n u \otimes \mathcal{J}_n u) - \mathcal{J}_n((\nabla \times \mathcal{J}_n b) \times \mathcal{J}_n b) - \nabla p & = & \Delta \mathcal{J}_n^2 u; \\ \partial_t b - \nabla \times \mathcal{J}_n(\mathcal{J}_n u \times \mathcal{J}_n b) + \nabla \times \mathcal{J}_n((\nabla \times \mathcal{J}_n b) \times \mathcal{J}_n b) & = & \Delta \mathcal{J}_n^2 b; \\ (u_{n,0}, b_{n,0}) & = & (\mathcal{J}_n u_0, \mathcal{J}_n b_0). \end{cases}$$

- Considera-se o sistema acima como uma EDO autônoma em H^m_σ e usa-se o Teorema de Picard para espaços de Banach para obter existência de soluções suaves globais no tempo (u_n, b_n). O ponto chave aqui são as desigualdades obtidas via mollifier $(\|\mathcal{J}_n v\|_{H^{m+k}} \leq C(n,k)\|\mathcal{J}_n v\|_{H^m})$.

- Usa-se a Identidade de Energia vista anteriormente para obter-se estimativas, independentes de n, para (u_n, b_n) em $L^2((0,\infty); H^1_\sigma) \cap L^\infty((0,\infty); L^2_\sigma)$ e para $(\partial_t u_n, \partial_t b_n)$, em $L^{\frac{4}{3}}((0,\infty); H^{-2}_\sigma)$

- Usa-se resultados de compacidade do tipo Aubin-Lions para extrair uma subsequência de $(u_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge em espaços adequados, e em sentidos fracos, e de tal forma que é possível passar o limite na formulação fraca, obtendo assim existência de soluções fracas.

- Não há regularidade suficiente nas soluções fracas para demonstrar unicidade de soluções.

- O Termo de Hall não ofereceu dificuldade extra.

Soluções fortes

- Que é esperado se as condições iniciais forem mais regulares, por exemplo, $u_o, b_o \in H^m$? O esperado é que seja possível demonstrar existência e unicidade de soluções regulares, porém apenas definidas localmente no tempo.

- As desigualdades do tipo energia em H^m não geram estimativas suficientes.

- Aqui o Termo de Hall introduz dificuldades extras.

- Vamos usar as seguintes desigualdades de Gagliardo-Nirenberg em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \|f\|_{L^6} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}, \\ \|f\|_{L^3} & \leq & C\|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \\ \|f\|_{L^\infty} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla^2 f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

- Vamos fazer estimativas em H^1 para os termos não-lineares no nosso sistema:

$$\begin{aligned} |\langle \nabla . (u \otimes u), \Delta u \rangle_{L_2}| &\leq \|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}\|\Delta u\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \\ &\leq \epsilon\|\Delta u\|_{L^2}^2 + C\|\nabla u\|_{L^2}^6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), \Delta b \rangle_{L_2}| &\leq C\left(\|\nabla b\|_{L^3}\|\nabla b\|_{L^6} + \|b\|_{L^\infty}\|\Delta b\|_{L^2}\right)\|\Delta b\|_{L^2} \\ &\leq C\|\Delta b\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}(\|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Delta b\|_{L^2}) \\ &\leq \epsilon\|\Delta b\|_{L^2}^2 + C\|\nabla b\|_{L^2}^2\|\Delta b\|_{L^2}^4. \end{aligned}$$

Soluções fortes

- Que é esperado se as condições iniciais forem mais regulares, por exemplo, $u_o, b_o \in H^m$? O esperado é que seja possível demonstrar existência e unicidade de soluções regulares, porém apenas definidas localmente no tempo.

- As desigualdades do tipo energia em H^m não geram estimativas suficientes.

- Aqui o Termo de Hall introduz dificuldades extras.

- Vamos usar as seguintes desigualdades de Gagliardo-Nirenberg em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \|f\|_{L^6} & \leq \quad C\|\nabla f\|_{L^2}, \\ \|f\|_{L^3} & \leq \quad C\|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \\ \|f\|_{L^\infty} & \leq \quad C\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla^2 f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

- Vamos fazer estimativas em H^1 para os termos não-lineares no nosso sistema:

$$\begin{aligned} |\langle \nabla \cdot (u \otimes u), \Delta u\rangle_{L_2}| &\leq \|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}\|\Delta u\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \\ &\leq \epsilon\|\Delta u\|_{L^2}^2 + C\|\nabla u\|_{L^2}^6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), \Delta b\rangle_{L_2}| &\leq C\left(\|\nabla b\|_{L^3}\|\nabla b\|_{L^6} + \|b\|_{L^\infty}\|\Delta b\|_{L^2}\right)\|\Delta b\|_{L^2} \\ &\leq C\|\Delta b\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}(\|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Delta b\|_{L^2}) \\ &\leq \epsilon\|\Delta b\|_{L^2}^2 + C\|\nabla b\|_{L^2}^2\|\Delta b\|_{L^2}^4. \end{aligned}$$

Soluções fortes

- Que é esperado se as condições iniciais forem mais regulares, por exemplo, $u_o, b_o \in H^m$? O esperado é que seja possível demonstrar existência e unicidade de soluções regulares, porém apenas definidas localmente no tempo.

- As desigualdades do tipo energia em H^m não geram estimativas suficientes.

- Aqui o Termo de Hall introduz dificuldades extras.

- Vamos usar as seguintes desigualdades de Gagliardo-Nirenberg em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \|f\|_{L^6} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}, \\ \|f\|_{L^3} & \leq & C\|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \\ \|f\|_{L^\infty} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla^2 f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

- Vamos fazer estimativas em H^1 para os termos não-lineares no nosso sistema:

$$\begin{aligned} |\langle \nabla \cdot (u \otimes u), \Delta u \rangle_{L_2}| &\leq \|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}\|\Delta u\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \\ &\leq \epsilon\|\Delta u\|_{L^2}^2 + C\|\nabla u\|_{L^2}^6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), \Delta b \rangle_{L_2}| &\leq C\left(\|\nabla b\|_{L^3}\|\nabla b\|_{L^6} + \|b\|_{L^\infty}\|\Delta b\|_{L^2}\right)\|\Delta b\|_{L^2} \\ &\leq C\|\Delta b\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}(\|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Delta b\|_{L^2}) \\ &\leq \epsilon\|\Delta b\|_{L^2}^2 + C\|\nabla b\|_{L^2}^2\|\Delta b\|_{L^2}^4. \end{aligned}$$

Soluções fortes

- Que é esperado se as condições iniciais forem mais regulares, por exemplo, $u_o, b_o \in H^m$? O esperado é que seja possível demonstrar existência e unicidade de soluções regulares, porém apenas definidas localmente no tempo.

- As desigualdades do tipo energia em H^m não geram estimativas suficientes.

- Aqui o Termo de Hall introduz dificuldades extras.

- Vamos usar as seguintes desigualdades de Gagliardo-Nirenberg em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \|f\|_{L^6} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}, \\ \|f\|_{L^3} & \leq & C\|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \\ \|f\|_{L^\infty} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla^2 f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

- Vamos fazer estimativas em H^1 para os termos não-lineares no nosso sistema:

$$\begin{aligned} |\langle \nabla \cdot (u \otimes u), \Delta u \rangle_{L_2}| & \leq \|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}\|\Delta u\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \\ & \leq \epsilon\|\Delta u\|_{L^2}^2 + C\|\nabla u\|_{L^2}^6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), \Delta b \rangle_{L_2}| & \leq C\left(\|\nabla b\|_{L^3}\|\nabla b\|_{L^6} + \|b\|_{L^\infty}\|\Delta b\|_{L^2}\right)\|\Delta b\|_{L^2} \\ & \leq C\|\Delta b\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}(\|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Delta b\|_{L^2}) \\ & \leq \epsilon\|\Delta b\|_{L^2}^2 + C\|\nabla b\|_{L^2}^2\|\Delta b\|_{L^2}^4. \end{aligned}$$

Soluções fortes

- Que é esperado se as condições iniciais forem mais regulares, por exemplo, $u_o, b_o \in H^m$? O esperado é que seja possível demonstrar existência e unicidade de soluções regulares, porém apenas definidas localmente no tempo.

- As desigualdades do tipo energia em H^m não geram estimativas suficientes.

- Aqui o Termo de Hall introduz dificuldades extras.

- Vamos usar as seguintes desigualdades de Gagliardo-Nirenberg em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \|f\|_{L^6} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}, \\ \|f\|_{L^3} & \leq & C\|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \\ \|f\|_{L^\infty} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla^2 f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

- Vamos fazer estimativas em H^1 para os termos não-lineares no nosso sistema:

$$\begin{aligned} |\langle \nabla\cdot(u\otimes u), \Delta u\rangle_{L_2}| &\leq \|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}\|\Delta u\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \\ &\leq \epsilon\|\Delta u\|_{L^2}^2 + C\|\nabla u\|_{L^2}^6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle \nabla\times((\nabla\times b)\times b), \Delta b\rangle_{L_2}| &\leq C\left(\|\nabla b\|_{L^3}\|\nabla b\|_{L^6} + \|b\|_{L^\infty}\|\Delta b\|_{L^2}\right)\|\Delta b\|_{L^2} \\ &\leq C\|\Delta b\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}(\|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Delta b\|_{L^2}) \\ &\leq \epsilon\|\Delta b\|_{L^2}^2 + C\|\nabla b\|_{L^2}^2\|\Delta b\|_{L^2}^4. \end{aligned}$$

Soluções fortes

- Que é esperado se as condições iniciais forem mais regulares, por exemplo, $u_o, b_o \in H^m$? O esperado é que seja possível demonstrar existência e unicidade de soluções regulares, porém apenas definidas localmente no tempo.

- As desigualdades do tipo energia em H^m não geram estimativas suficientes.

- Aqui o Termo de Hall introduz dificuldades extras.

- Vamos usar as seguintes desigualdades de Gagliardo-Nirenberg em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \|f\|_{L^6} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}, \\ \|f\|_{L^3} & \leq & C\|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \\ \|f\|_{L^\infty} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla^2 f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

- Vamos fazer estimativas em H^1 para os termos não-lineares no nosso sistema:

$$\begin{aligned} |\langle \nabla . (u \otimes u), \Delta u \rangle_{L_2}| &\leq \|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}\|\Delta u\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \\ &\leq \epsilon\|\Delta u\|_{L^2}^2 + C\|\nabla u\|_{L^2}^6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), \Delta b \rangle_{L_2}| &\leq C\left(\|\nabla b\|_{L^3}\|\nabla b\|_{L^6} + \|b\|_{L^\infty}\|\Delta b\|_{L^2}\right)\|\Delta b\|_{L^2} \\ &\leq C\|\Delta b\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}(\|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Delta b\|_{L^2}) \\ &\leq \epsilon\|\Delta b\|_{L^2}^2 + C\|\nabla b\|_{L^2}^2\|\Delta b\|_{L^2}^4. \end{aligned}$$

Soluções fortes

- Que é esperado se as condições iniciais forem mais regulares, por exemplo, $u_o, b_o \in H^m$? O esperado é que seja possível demonstrar existência e unicidade de soluções regulares, porém apenas definidas localmente no tempo.

- As desigualdades do tipo energia em H^m não geram estimativas suficientes.

- Aqui o Termo de Hall introduz dificuldades extras.

- Vamos usar as seguintes desigualdades de Gagliardo-Nirenberg em $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \|f\|_{L^6} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}, \\ \|f\|_{L^3} & \leq & C\|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \\ \|f\|_{L^\infty} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla^2 f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}. \end{array} \right.$$

- Vamos fazer estimativas em H^1 para os termos não-lineares no nosso sistema:

$$\begin{array}{rcl} |\langle \nabla . (u \otimes u), \Delta u \rangle_{L_2}| & \leq & \|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}\|\Delta u\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \\ & \leq & \epsilon\|\Delta u\|_{L^2}^2 + C\|\nabla u\|_{L^2}^6. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} |\langle \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), \Delta b \rangle_{L_2}| & \leq & C\left(\|\nabla b\|_{L^3}\|\nabla b\|_{L^6} + \|b\|_{L^\infty}\|\Delta b\|_{L^2}\right)\|\Delta b\|_{L^2} \\ & \leq & C\|\Delta b\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}(\|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Delta b\|_{L^2}) \\ & \leq & \epsilon\|\Delta b\|_{L^2}^2 + C\|\nabla b\|_{L^2}^2\|\Delta b\|_{L^2}^4. \end{array}$$

Soluções fortes

- Que é esperado se as condições iniciais forem mais regulares, por exemplo, $u_o, b_o \in H^m$? O esperado é que seja possível demonstrar existência e unicidade de soluções regulares, porém apenas definidas localmente no tempo.

- As desigualdades do tipo energia em H^m não geram estimativas suficientes.

- Aqui o Termo de Hall introduz dificuldades extras.

- Vamos usar as seguintes desigualdades de Gagliardo-Nirenberg em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \|f\|_{L^6} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}, \\ \|f\|_{L^3} & \leq & C\|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \\ \|f\|_{L^\infty} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla^2 f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

- Vamos fazer estimativas em H^1 para os termos não-lineares no nosso sistema:

$$\begin{aligned} |\langle \nabla . (u \otimes u), \Delta u\rangle_{L_2}| & \leq \|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}\|\Delta u\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \\ & \leq \epsilon\|\Delta u\|_{L^2}^2 + C\|\nabla u\|_{L^2}^6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), \Delta b\rangle_{L_2}| & \leq C\left(\|\nabla b\|_{L^3}\|\nabla b\|_{L^6} + \|b\|_{L^\infty}\|\Delta b\|_{L^2}\right)\|\Delta b\|_{L^2} \\ & \leq C\|\Delta b\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}(\|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Delta b\|_{L^2}) \\ & \leq \epsilon\|\Delta b\|_{L^2}^2 + C\|\nabla b\|_{L^2}^2\|\Delta b\|_{L^2}^4. \end{aligned}$$

Soluções fortes

- Que é esperado se as condições iniciais forem mais regulares, por exemplo, $u_o, b_o \in H^m$? O esperado é que seja possível demonstrar existência e unicidade de soluções regulares, porém apenas definidas localmente no tempo.

- As desigualdades do tipo energia em H^m não geram estimativas suficientes.

- Aqui o Termo de Hall introduz dificuldades extras.

- Vamos usar as seguintes desigualdades de Gagliardo-Nirenberg em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \|f\|_{L^6} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}, \\ \|f\|_{L^3} & \leq & C\|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \\ \|f\|_{L^\infty} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla^2 f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

- Vamos fazer estimativas em H^1 para os termos não-lineares no nosso sistema:

$$\begin{aligned} |\langle \nabla . (u \otimes u), \Delta u\rangle_{L_2}| & \leq \|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}\|\Delta u\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \\ & \leq \epsilon\|\Delta u\|_{L^2}^2 + C\|\nabla u\|_{L^2}^6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), \Delta b\rangle_{L_2}| & \leq C\left(\|\nabla b\|_{L^3}\|\nabla b\|_{L^6} + \|b\|_{L^\infty}\|\Delta b\|_{L^2}\right)\|\Delta b\|_{L^2} \\ & \leq C\|\Delta b\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}(\|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Delta b\|_{L^2}) \\ & \leq \epsilon\|\Delta b\|_{L^2}^2 + C\|\nabla b\|_{L^2}^2\|\Delta b\|_{L^2}^4. \end{aligned}$$

Soluções fortes

- Que é esperado se as condições iniciais forem mais regulares, por exemplo, $u_o, b_o \in H^m$? O esperado é que seja possível demonstrar existência e unicidade de soluções regulares, porém apenas definidas localmente no tempo.

- As desigualdades do tipo energia em H^m não geram estimativas suficientes.

- Aqui o Termo de Hall introduz dificuldades extras.

- Vamos usar as seguintes desigualdades de Gagliardo-Nirenberg em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \|f\|_{L^6} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}, \\ \|f\|_{L^3} & \leq & C\|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \\ \|f\|_{L^\infty} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla^2 f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

- Vamos fazer estimativas em H^1 para os termos não-lineares no nosso sistema:

$$\begin{aligned} |\langle \nabla . (u \otimes u), \Delta u \rangle_{L_2}| &\leq \|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}\|\Delta u\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \\ &\leq \epsilon\|\Delta u\|_{L^2}^2 + C\|\nabla u\|_{L^2}^6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), \Delta b \rangle_{L_2}| &\leq C\left(\|\nabla b\|_{L^3}\|\nabla b\|_{L^6} + \|b\|_{L^\infty}\|\Delta b\|_{L^2}\right)\|\Delta b\|_{L^2} \\ &\leq C\|\Delta b\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}(\|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Delta b\|_{L^2}) \\ &\leq \epsilon\|\Delta b\|_{L^2}^2 + C\|\nabla b\|_{L^2}^2\|\Delta b\|_{L^2}^4. \end{aligned}$$

Soluções fortes

- Que é esperado se as condições iniciais forem mais regulares, por exemplo, $u_o, b_o \in H^m$? O esperado é que seja possível demonstrar existência e unicidade de soluções regulares, porém apenas definidas localmente no tempo.

- As desigualdades do tipo energia em H^m não geram estimativas suficientes.

- Aqui o Termo de Hall introduz dificuldades extras.

- Vamos usar as seguintes desigualdades de Gagliardo-Nirenberg em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \|f\|_{L^6} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}, \\ \|f\|_{L^3} & \leq & C\|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \\ \|f\|_{L^\infty} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla^2 f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

- Vamos fazer estimativas em H^1 para os termos não-lineares no nosso sistema:

$$\begin{aligned} |\langle \nabla . (u \otimes u), \Delta u \rangle_{L_2}| & \leq \|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}\|\Delta u\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \\ & \leq \epsilon\|\Delta u\|_{L^2}^2 + C\|\nabla u\|_{L^2}^6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), \Delta b \rangle_{L_2}| & \leq C\left(\|\nabla b\|_{L^3}\|\nabla b\|_{L^6} + \|b\|_{L^\infty}\|\Delta b\|_{L^2}\right)\|\Delta b\|_{L^2} \\ & \leq C\|\Delta b\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}(\|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Delta b\|_{L^2}) \\ & \leq \epsilon\|\Delta b\|_{L^2}^2 + C\|\nabla b\|_{L^2}^2\|\Delta b\|_{L^2}^4. \end{aligned}$$

Soluções fortes

- Que é esperado se as condições iniciais forem mais regulares, por exemplo, $u_o, b_o \in H^m$? O esperado é que seja possível demonstrar existência e unicidade de soluções regulares, porém apenas definidas localmente no tempo.

- As desigualdades do tipo energia em H^m não geram estimativas suficientes.

- Aqui o Termo de Hall introduz dificuldades extras.

- Vamos usar as seguintes desigualdades de Gagliardo-Nirenberg em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \|f\|_{L^6} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}, \\ \|f\|_{L^3} & \leq & C\|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \\ \|f\|_{L^\infty} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla^2 f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

- Vamos fazer estimativas em H^1 para os termos não-lineares no nosso sistema:

$$\begin{aligned} |\langle \nabla . (u \otimes u), \Delta u\rangle_{L_2}| & \leq \|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}\|\Delta u\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \\ & \leq \epsilon\|\Delta u\|_{L^2}^2 + C\|\nabla u\|_{L^2}^6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), \Delta b\rangle_{L_2}| & \leq C\left(\|\nabla b\|_{L^3}\|\nabla b\|_{L^6} + \|b\|_{L^\infty}\|\Delta b\|_{L^2}\right)\|\Delta b\|_{L^2} \\ & \leq C\|\Delta b\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}(\|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Delta b\|_{L^2}) \\ & \leq \epsilon\|\Delta b\|_{L^2}^2 + C\|\nabla b\|_{L^2}^2\|\Delta b\|_{L^2}^4. \end{aligned}$$

Soluções fortes

- Que é esperado se as condições iniciais forem mais regulares, por exemplo, $u_o, b_o \in H^m$? O esperado é que seja possível demonstrar existência e unicidade de soluções regulares, porém apenas definidas localmente no tempo.

- As desigualdades do tipo energia em H^m não geram estimativas suficientes.

- Aqui o Termo de Hall introduz dificuldades extras.

- Vamos usar as seguintes desigualdades de Gagliardo-Nirenberg em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \|f\|_{L^6} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}, \\ \|f\|_{L^3} & \leq & C\|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \\ \|f\|_{L^\infty} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla^2 f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

- Vamos fazer estimativas em H^1 para os termos não-lineares no nosso sistema:

$$\begin{aligned} |\langle \nabla . (u \otimes u), \Delta u \rangle_{L_2}| &\leq \|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}\|\Delta u\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \\ &\leq \epsilon\|\Delta u\|_{L^2}^2 + C\|\nabla u\|_{L^2}^6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), \Delta b \rangle_{L_2}| &\leq C\left(\|\nabla b\|_{L^3}\|\nabla b\|_{L^6} + \|b\|_{L^\infty}\|\Delta b\|_{L^2}\right)\|\Delta b\|_{L^2} \\ &\leq C\|\Delta b\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}(\|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Delta b\|_{L^2}) \\ &\leq \epsilon\|\Delta b\|_{L^2}^2 + C\|\nabla b\|_{L^2}^2\|\Delta b\|_{L^2}^4. \end{aligned}$$

Soluções fortes

- Que é esperado se as condições iniciais forem mais regulares, por exemplo, $u_o, b_o \in H^m$? O esperado é que seja possível demonstrar existência e unicidade de soluções regulares, porém apenas definidas localmente no tempo.

- As desigualdades do tipo energia em H^m não geram estimativas suficientes.

- Aqui o Termo de Hall introduz dificuldades extras.

- Vamos usar as seguintes desigualdades de Gagliardo-Nirenberg em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \|f\|_{L^6} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}, \\ \|f\|_{L^3} & \leq & C\|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \\ \|f\|_{L^\infty} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla^2 f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

- Vamos fazer estimativas em H^1 para os termos não-lineares no nosso sistema:

$$\begin{aligned} |\langle \nabla . (u \otimes u), \Delta u\rangle_{L_2}| &\leq \|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}\|\Delta u\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \\ &\leq \epsilon\|\Delta u\|_{L^2}^2 + C\|\nabla u\|_{L^2}^6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), \Delta b\rangle_{L_2}| &\leq C\left(\|\nabla b\|_{L^3}\|\nabla b\|_{L^6} + \|b\|_{L^\infty}\|\Delta b\|_{L^2}\right)\|\Delta b\|_{L^2} \\ &\leq C\|\Delta b\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}(\|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Delta b\|_{L^2}) \\ &\leq \epsilon\|\Delta b\|_{L^2}^2 + C\|\nabla b\|_{L^2}^2\|\Delta b\|_{L^2}^4. \end{aligned}$$

Soluções fortes

- Que é esperado se as condições iniciais forem mais regulares, por exemplo, $u_o, b_o \in H^m$? O esperado é que seja possível demonstrar existência e unicidade de soluções regulares, porém apenas definidas localmente no tempo.

- As desigualdades do tipo energia em H^m não geram estimativas suficientes.

- Aqui o Termo de Hall introduz dificuldades extras.

- Vamos usar as seguintes desigualdades de Gagliardo-Nirenberg em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \|f\|_{L^6} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}, \\ \|f\|_{L^3} & \leq & C\|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \\ \|f\|_{L^\infty} & \leq & C\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla^2 f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

- Vamos fazer estimativas em H^1 para os termos não-lineares no nosso sistema:

$$\begin{aligned} |\langle \nabla . (u \otimes u), \Delta u\rangle_{L_2}| &\leq \|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}\|\Delta u\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \\ &\leq \epsilon\|\Delta u\|_{L^2}^2 + C\|\nabla u\|_{L^2}^6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), \Delta b\rangle_{L_2}| &\leq C\left(\|\nabla b\|_{L^3}\|\nabla b\|_{L^6} + \|b\|_{L^\infty}\|\Delta b\|_{L^2}\right)\|\Delta b\|_{L^2} \\ &\leq C\|\Delta b\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}(\|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Delta b\|_{L^2}) \\ &\leq \epsilon\|\Delta b\|_{L^2}^2 + C\|\nabla b\|_{L^2}^2\|\Delta b\|_{L^2}^4. \end{aligned}$$

Soluções fortes

- Que é esperado se as condições iniciais forem mais regulares, por exemplo, $u_o, b_o \in H^m$? O esperado é que seja possível demonstrar existência e unicidade de soluções regulares, porém apenas definidas localmente no tempo.

- As desigualdades do tipo energia em H^m não geram estimativas suficientes.

- Aqui o Termo de Hall introduz dificuldades extras.

- Vamos usar as seguintes desigualdades de Gagliardo-Nirenberg em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \|f\|_{L^6} & \leq \quad C\|\nabla f\|_{L^2}, \\ \|f\|_{L^3} & \leq \quad C\|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \\ \|f\|_{L^\infty} & \leq \quad C\|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla^2 f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

- Vamos fazer estimativas em H^1 para os termos não-lineares no nosso sistema:

$$\begin{aligned} |\langle \nabla . (u \otimes u), \Delta u \rangle_{L_2}| &\leq \|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^3}\|\Delta u\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \\ &\leq \epsilon\|\Delta u\|_{L^2}^2 + C\|\nabla u\|_{L^2}^6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), \Delta b \rangle_{L_2}| &\leq C\left(\|\nabla b\|_{L^3}\|\nabla b\|_{L^6} + \|b\|_{L^\infty}\|\Delta b\|_{L^2}\right)\|\Delta b\|_{L^2} \\ &\leq C\|\Delta b\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}(\|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Delta b\|_{L^2}) \\ &\leq \epsilon\|\Delta b\|_{L^2}^2 + C\|\nabla b\|_{L^2}^2\|\Delta b\|_{L^2}^4. \end{aligned}$$

- Temos a seguinte estimativa do tipo energia:

$$\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right) + \frac{1}{2}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\Delta b\|_{L^2}^2 \leq C\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right)^3 + C\|\Delta b\|_{L^2}^4\|\nabla b\|_{L^2}^2.$$

- Não é imediato obter exitência de soluções locais fortes para dados iniciais em H^1_σ, devido ao termo em azul.
- Teorema:[3] Sejam $m \geq 3$ e u_o, $b_o \in H^m_\sigma$. Então existe $T > 0$ e uma única solução

$$\{\, u, b \quad \in \quad L^\infty((0,T); H^m_\sigma).$$

Além disso, se o dado inicial é pequeno, então $T = \infty$.

- *Ponto principal:* Imersão contínua $H^m(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$ e desigualdes de cálculo.

[3] Chae D., Degond P. & Liu J., *Well-posedness for Hall-magnetohydrodynamics*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 31 (2014), 555-565.

Soluções fortes

- Temos a seguinte estimativa do tipo energia:

$$\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right) + \frac{1}{2}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\Delta b\|_{L^2}^2 \leq C\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right)^3 + C\|\Delta b\|_{L^2}^4\|\nabla b\|_{L^2}^2.$$

- Não é imediato obter exitência de soluções locais fortes para dados iniciais em H^1_σ, devido ao termo em azul.
- Teorema:[3] Sejam $m \geq 3$ e $u_o,\ b_o \in H^m_\sigma$. Então existe $T > 0$ e uma única solução

$$\{\ u,\ b \quad \in \quad L^\infty((0,T); H^m_\sigma),$$

Além disso, se o dado inicial é pequeno, então $T = \infty$.

- *Ponto principal:* Imersão contínua $H^m(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$ e desigualdes de cálculo.

[3] Chae D., Degond P. & Liu J., *Well-posedness for Hall-magnetohydrodynamics*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 31 (2014), 555-565.

- Temos a seguinte estimativa do tipo energia:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right) + \frac{1}{2}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\Delta b\|_{L^2}^2 \quad &\leq \quad C\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right)^3 \\ &+ \quad C\|\Delta b\|_{L^2}^4\|\nabla b\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

- Não é imediato obter exitência de soluções locais fortes para dados iniciais em H^1_σ, devido ao termo em azul.
- Teorema:[3] Sejam $m \geq 3$ e $u_o,\ b_o \in H^m_\sigma$. Então existe $T > 0$ e uma única solução

$$\{\ u,\ b \quad \in \quad L^\infty((0,T); H^m_\sigma),$$

Além disso, se o dado inicial é pequeno, então $T = \infty$.

- *Ponto principal:* Imersão contínua $H^m(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$ e desigualdes de cálculo.

[3] Chae D., Degond P. & Liu J., *Well-posedness for Hall-magnetohydrodynamics*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 31 (2014), 555-565.

Soluções fortes

- Temos a seguinte estimativa do tipo energia:

$$\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right) + \frac{1}{2}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\Delta b\|_{L^2}^2 \leq C\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right)^3 + C\|\Delta b\|_{L^2}^4\|\nabla b\|_{L^2}^2.$$

- Não é imediato obter exitência de soluções locais fortes para dados iniciais em H^1_σ, devido ao termo em azul.
- Teorema:[3] Sejam $m \geq 3$ e $u_o,\ b_o \in H^m_\sigma$. Então existe $T > 0$ e uma única solução

$$\left\{\ u, b \ \in \ L^\infty((0,T); H^m_\sigma),\right.$$

Além disso, se o dado inicial é pequeno, então $T = \infty$.

- *Ponto principal:* Imersão contínua $H^m(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$ e desigualdes de cálculo.

[3] Chae D., Degond P. & Liu J., *Well-posedness for Hall-magnetohydrodynamics*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 31 (2014), 555-565.

Soluções fortes

- Temos a seguinte estimativa do tipo energia:

$$\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right) + \frac{1}{2}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\Delta b\|_{L^2}^2 \leq C\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right)^3 + C\|\Delta b\|_{L^2}^4\|\nabla b\|_{L^2}^2.$$

- Não é imediato obter exitência de soluções locais fortes para dados iniciais em H^1_σ, devido ao termo em azul.
- Teorema:[3] Sejam $m \geq 3$ e u_o, $b_o \in H^m_\sigma$. Então existe $T > 0$ e uma única solução

$$\left\{\ u, b \in L^\infty((0,T); H^m_\sigma),\right.$$

Além disso, se o dado inicial é pequeno, então $T = \infty$.

- *Ponto principal:* Imersão contínua $H^m(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$ e desigualdes de cálculo.

[3] Chae D., Degond P. & Liu J., *Well-posedness for Hall-magnetohydrodynamics*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 31 (2014), 555-565.

Soluções fortes

- Temos a seguinte estimativa do tipo energia:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right) + \frac{1}{2}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\Delta b\|_{L^2}^2 \quad &\leq \quad C\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right)^3 \\ &+ \quad C\|\Delta b\|_{L^2}^4\|\nabla b\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

- Não é imediato obter exitência de soluções locais fortes para dados iniciais em H^1_σ, devido ao termo em azul.
- Teorema:[3] Sejam $m \geq 3$ e $u_o,\ b_o \in H^m_\sigma$. Então existe $T > 0$ e uma única solução

$$\left\{\ u,\ b \quad \in \quad L^\infty((0,T); H^m_\sigma),\right.$$

Além disso, se o dado inicial é pequeno, então $T = \infty$.

- *Ponto principal:* Imersão contínua $H^m(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$ e desigualdes de cálculo.

[3] Chae D., Degond P. & Liu J., *Well-posedness for Hall-magnetohydrodynamics*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 31 (2014), 555-565.

Soluções fortes

- Temos a seguinte estimativa do tipo energia:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right) + \frac{1}{2}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\Delta b\|_{L^2}^2 \quad &\leq \quad C\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right)^3 \\ &+ \quad C\|\Delta b\|_{L^2}^4 \|\nabla b\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

- Não é imediato obter exitência de soluções locais fortes para dados iniciais em H_σ^1, devido ao termo em azul.
- Teorema:[3] Sejam $m \geq 3$ e u_o, $b_o \in H_\sigma^m$. Então existe $T > 0$ e uma única solução

$$\{\ u,\ b \quad \in \quad L^\infty((0,T); H_\sigma^m),$$

Além disso, se o dado inicial é pequeno, então $T = \infty$.

- *Ponto principal:* Imersão contínua $H^m(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$ e desigualdes de cálculo.

[3] Chae D., Degond P. & Liu J., *Well-posedness for Hall-magnetohydrodynamics*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 31 (2014), 555-565.

- Temos a seguinte estimativa do tipo energia:

$$\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right) + \frac{1}{2}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\Delta b\|_{L^2}^2 \leq C\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla b\|_{L^2}^2\right)^3 + C\|\Delta b\|_{L^2}^4\|\nabla b\|_{L^2}^2.$$

- Não é imediato obter exitência de soluções locais fortes para dados iniciais em H_σ^1, devido ao termo em azul.
- Teorema:[3] Sejam $m \geq 3$ e $u_o,\ b_o \in H_\sigma^m$. Então existe $T > 0$ e uma única solução

$$\left\{\ u,\ b \quad \in \quad L^\infty((0,T); H_\sigma^m),\right.$$

  Além disso, se o dado inicial é pequeno, então $T = \infty$.
- *Ponto principal:* <u>Imersão contínua</u> $H^m(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$ e desigualdes de cálculo.

[3] Chae D., Degond P. & Liu J., *Well-posedness for Hall-magnetohydrodynamics*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 31 (2014), 555-565.

Ideia da demonstração:

- Para o sistema regularizado com $\mathcal{J}_n \equiv \rho_n *$, temos a estimativa:

$$\frac{d}{dt}(\|u_n\|^2_{H^m} + \|b_n\|^2_{H^m} + 1) + \|\nabla u_n\|^2_{H^m} + \|\nabla b_n\|^2_{H^m} \leq C(\|u_n\|^2_{H^m} + \|b_n\|^2_{H^m} + 1)^2.$$

- Se $X(t) = \|u_n\|^2_{H^m} + \|b_n\|^2_{H^m} + 1$, então $\frac{d}{dt}X(t) \leq CX^2(t)$,
-

$$\begin{aligned}
& |\langle D^m \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), D^m b \rangle_{L^2}| = |\langle D^m((\nabla \times b) \times b), D^m(\nabla \times b)\rangle_{L^2}| = \\
= \quad & |\langle D^m((\nabla \times b) \times b) - (D^m(\nabla \times b)) \times b, D^m(\nabla \times b)\rangle_{L^2}| \leq \\
\leq \quad & \|D^m((\nabla \times b) \times b) - (D^m(\nabla \times b)) \times b\|_{L^2} \|D^m(\nabla \times b)\|_{L^2} \\
\leq \quad & (\|b\|_{H^m} \|\nabla b\|_{L^\infty}) \|\nabla b\|_{H^m} \leq \|b\|^2_{H^m} \|\nabla b\|_{H^m} \leq \\
\leq \quad & \epsilon \|\nabla b\|^2_{H^m} + \|b\|^4_{H^m}.
\end{aligned}$$

Soluções fortes

Ideia da demonstração:

- Para o sistema regularizado com $\mathcal{J}_n \equiv \rho_n *$, temos a estimativa:

$$\frac{d}{dt}(\|u_n\|_{H^m}^2 + \|b_n\|_{H^m}^2 + 1) + \|\nabla u_n\|_{H^m}^2 + \|\nabla b_n\|_{H^m}^2 \leq C(\|u_n\|_{H^m}^2 + \|b_n\|_{H^m}^2 + 1)^2.$$

- Se $X(t) = \|u_n\|_{H^m}^2 + \|b_n\|_{H^m}^2 + 1$, então $\frac{d}{dt}X(t) \leq CX^2(t)$,
-

$$\begin{aligned}
& |\langle D^m \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), D^m b\rangle_{L^2}| = |\langle D^m((\nabla \times b) \times b), D^m(\nabla \times b)\rangle_{L^2}| = \\
= \quad & |\langle D^m((\nabla \times b) \times b) - (D^m(\nabla \times b)) \times b, D^m(\nabla \times b)\rangle_{L^2}| \leq \\
\leq \quad & \|D^m((\nabla \times b) \times b) - (D^m(\nabla \times b)) \times b\|_{L^2} \|D^m(\nabla \times b)\|_{L^2} \\
\leq \quad & (\|b\|_{H^m} \|\nabla b\|_{L^\infty}) \|\nabla b\|_{H^m} \leq \|b\|_{H^m}^2 \|\nabla b\|_{H^m} \leq \\
\leq \quad & \epsilon \|\nabla b\|_{H^m}^2 + \|b\|_{H^m}^4 .
\end{aligned}$$

Ideia da demonstração:

- Para o sistema regularizado com $\mathcal{J}_n \equiv \rho_n *$, temos a estimativa:

$$\frac{d}{dt}(\|u_n\|_{H^m}^2 + \|b_n\|_{H^m}^2 + 1) + \|\nabla u_n\|_{H^m}^2 + \|\nabla b_n\|_{H^m}^2 \leq C(\|u_n\|_{H^m}^2 + \|b_n\|_{H^m}^2 + 1)^2.$$

- Se $X(t) = \|u_n\|_{H^m}^2 + \|b_n\|_{H^m}^2 + 1$, então $\frac{d}{dt}X(t) \leq CX^2(t)$,
-

$$\begin{aligned}
& |\langle D^m \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), D^m b \rangle_{L^2}| = |\langle D^m((\nabla \times b) \times b), D^m(\nabla \times b)\rangle_{L^2}| = \\
= \; & |\langle D^m((\nabla \times b) \times b) - (D^m(\nabla \times b)) \times b, D^m(\nabla \times b)\rangle_{L^2}| \leq \\
\leq \; & \|D^m((\nabla \times b) \times b) - (D^m(\nabla \times b)) \times b\|_{L^2} \|D^m(\nabla \times b)\|_{L^2} \\
\leq \; & (\|b\|_{H^m} \|\nabla b\|_{L^\infty}) \|\nabla b\|_{H^m} \leq \|b\|_{H^m}^2 \|\nabla b\|_{H^m} \leq \\
\leq \; & \epsilon \|\nabla b\|_{H^m}^2 + \|b\|_{H^m}^4 .
\end{aligned}$$

Ideia da demonstração:

- Para o sistema regularizado com $\mathcal{J}_n \equiv \rho_n *$, temos a estimativa:

$$\frac{d}{dt}(\|u_n\|^2_{H^m} + \|b_n\|^2_{H^m} + 1) + \|\nabla u_n\|^2_{H^m} + \|\nabla b_n\|^2_{H^m} \leq C(\|u_n\|^2_{H^m} + \|b_n\|^2_{H^m} + 1)^2.$$

- Se $X(t) = \|u_n\|^2_{H^m} + \|b_n\|^2_{H^m} + 1$, então $\frac{d}{dt}X(t) \leq CX^2(t)$, e portanto

$$X(t) \leq \frac{X(0)}{1 - tCX(0)}.$$

-

$$\begin{aligned} & |\langle D^m \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), D^m b \rangle_{L^2}| = |\langle D^m((\nabla \times b) \times b), D^m(\nabla \times b) \rangle_{L^2}| = \\ = \; & |\langle D^m((\nabla \times b) \times b) - (D^m(\nabla \times b)) \times b, D^m(\nabla \times b) \rangle_{L^2}| \leq \\ \leq \; & \|D^m((\nabla \times b) \times b) - (D^m(\nabla \times b)) \times b\|_{L^2} \|D^m(\nabla \times b)\|_{L^2} \\ \leq \; & (\|b\|_{H^m} \|\nabla b\|_{L^\infty}) \|\nabla b\|_{H^m} \leq \|b\|^2_{H^m} \|\nabla b\|_{H^m} \leq \\ \leq \; & \epsilon \|\nabla b\|^2_{H^m} + \|b\|^4_{H^m}. \end{aligned}$$

Soluções fortes

Ideia da demonstração:

- Para o sistema regularizado com $\mathcal{J}_n \equiv \rho_n *$, temos a estimativa:

$$\frac{d}{dt}(\|u_n\|^2_{H^m} + \|b_n\|^2_{H^m} + 1) + \|\nabla u_n\|^2_{H^m} + \|\nabla b_n\|^2_{H^m} \leq C(\|u_n\|^2_{H^m} + \|b_n\|^2_{H^m} + 1)^2.$$

- Se $X(t) = \|u_n\|^2_{H^m} + \|b_n\|^2_{H^m} + 1$, então $\frac{d}{dt}X(t) \leq CX^2(t)$, e portanto

$$X(t) \leq \frac{X(0)}{1 - tCX(0)}.$$

Tem-se estimativas uniformes em H^m, se $0 < t < \frac{1}{2CX(0)}$.

-

$$\begin{aligned}
& |\langle D^m \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), D^m b\rangle_{L^2}| = |\langle D^m((\nabla \times b) \times b), D^m(\nabla \times b)\rangle_{L^2}| = \\
= \quad & |\langle D^m((\nabla \times b) \times b) - (D^m(\nabla \times b)) \times b, D^m(\nabla \times b)\rangle_{L^2}| \leq \\
\leq \quad & \|D^m((\nabla \times b) \times b) - (D^m(\nabla \times b)) \times b\|_{L^2}\|D^m(\nabla \times b)\|_{L^2} \\
\leq \quad & (\|b\|_{H^m}\|\nabla b\|_{L^\infty})\|\nabla b\|_{H^m} \leq \|b\|^2_{H^m}\|\nabla b\|_{H^m} \leq \\
\leq \quad & \epsilon\|\nabla b\|^2_{H^m} + \|b\|^4_{H^m}.
\end{aligned}$$

Soluções fortes

Ideia da demonstração:

- Para o sistema regularizado com $\mathcal{J}_n \equiv \rho_n *$, temos a estimativa:

$$\frac{d}{dt}(\|u_n\|_{H^m}^2 + \|b_n\|_{H^m}^2 + 1) + \|\nabla u_n\|_{H^m}^2 + \|\nabla b_n\|_{H^m}^2 \leq C(\|u_n\|_{H^m}^2 + \|b_n\|_{H^m}^2 + 1)^2.$$

- Se $X(t) = \|u_n\|_{H^m}^2 + \|b_n\|_{H^m}^2 + 1$, então $\frac{d}{dt}X(t) \leq CX^2(t)$, e portanto

$$X(t) \leq \frac{X(0)}{1 - tCX(0)}.$$

  Tem-se estimativas uniformes em H^m, se $0 < t < \frac{1}{2CX(0)}$.

-

$$\begin{aligned}
&|\langle D^m \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), D^m b\rangle_{L^2}| = |\langle D^m((\nabla \times b) \times b), D^m(\nabla \times b)\rangle_{L^2}| = \\
= \quad & |\langle D^m((\nabla \times b) \times b) - (D^m(\nabla \times b)) \times b, D^m(\nabla \times b)\rangle_{L^2}| \leq \\
\leq \quad & \|D^m((\nabla \times b) \times b) - (D^m(\nabla \times b)) \times b\|_{L^2} \|D^m(\nabla \times b)\|_{L^2} \\
\leq \quad & (\|b\|_{H^m} \|\nabla b\|_{L^\infty}) \|\nabla b\|_{H^m} \leq \|b\|_{H^m}^2 \|\nabla b\|_{H^m} \leq \\
\leq \quad & \epsilon \|\nabla b\|_{H^m}^2 + \|b\|_{H^m}^4 .
\end{aligned}$$

Ideia da demonstração:

- Para o sistema regularizado com $\mathcal{J}_n \equiv \rho_n *$, temos a estimativa:

$$\frac{d}{dt}(\|u_n\|^2_{H^m} + \|b_n\|^2_{H^m} + 1) + \|\nabla u_n\|^2_{H^m} + \|\nabla b_n\|^2_{H^m} \leq C(\|u_n\|^2_{H^m} + \|b_n\|^2_{H^m} + 1)^2.$$

- Se $X(t) = \|u_n\|^2_{H^m} + \|b_n\|^2_{H^m} + 1$, então $\frac{d}{dt}X(t) \leq CX^2(t)$, e portanto

$$X(t) \leq \frac{X(0)}{1 - tCX(0)}.$$

Tem-se estimativas uniformes em H^m, se $0 < t < \frac{1}{2CX(0)}$.

-

$$\begin{aligned}
& |\langle D^m \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), D^m b\rangle_{L^2}| = |\langle D^m((\nabla \times b) \times b), D^m(\nabla \times b)\rangle_{L^2}| = \\
= \;& |\langle D^m((\nabla \times b) \times b) - (D^m(\nabla \times b)) \times b, D^m(\nabla \times b)\rangle_{L^2}| \leq \\
\leq \;& \|D^m((\nabla \times b) \times b) - (D^m(\nabla \times b)) \times b\|_{L^2}\|D^m(\nabla \times b)\|_{L^2} \\
\leq \;& (\|b\|_{H^m}\|\nabla b\|_{L^\infty})\|\nabla b\|_{H^m} \leq \|b\|^2_{H^m}\|\nabla b\|_{H^m} \leq \\
\leq \;& \epsilon\|\nabla b\|^2_{H^m} + \|b\|^4_{H^m}.
\end{aligned}$$

Ideia da demonstração:

- Para o sistema regularizado com $\mathcal{J}_n \equiv \rho_n *$, temos a estimativa:

$$\frac{d}{dt}(\|u_n\|_{H^m}^2 + \|b_n\|_{H^m}^2 + 1) + \|\nabla u_n\|_{H^m}^2 + \|\nabla b_n\|_{H^m}^2 \leq C(\|u_n\|_{H^m}^2 + \|b_n\|_{H^m}^2 + 1)^2.$$

- Se $X(t) = \|u_n\|_{H^m}^2 + \|b_n\|_{H^m}^2 + 1$, então $\frac{d}{dt}X(t) \leq CX^2(t)$, e portanto

$$X(t) \leq \frac{X(0)}{1 - tCX(0)}.$$

Tem-se estimativas uniformes em H^m, se $0 < t < \frac{1}{2CX(0)}$.

-

$$\begin{aligned}
& |\langle D^m \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), D^m b\rangle_{L^2}| = |\langle D^m((\nabla \times b) \times b), D^m(\nabla \times b)\rangle_{L^2}| = \\
= \quad & |\langle D^m((\nabla \times b) \times b) - (D^m(\nabla \times b)) \times b, D^m(\nabla \times b)\rangle_{L^2}| \leq \\
\leq \quad & \|D^m((\nabla \times b) \times b) - (D^m(\nabla \times b)) \times b\|_{L^2} \|D^m(\nabla \times b)\|_{L^2} \\
\leq \quad & (\|b\|_{H^m} \|\nabla b\|_{L^\infty}) \|\nabla b\|_{H^m} \leq \|b\|_{H^m}^2 \|\nabla b\|_{H^m} \leq \\
\leq \quad & \epsilon \|\nabla b\|_{H^m}^2 + \|b\|_{H^m}^4.
\end{aligned}$$

Ideia da demonstração:

- Para o sistema regularizado com $\mathcal{J}_n \equiv \rho_n *$, temos a estimativa:

$$\frac{d}{dt}(\|u_n\|_{H^m}^2 + \|b_n\|_{H^m}^2 + 1) + \|\nabla u_n\|_{H^m}^2 + \|\nabla b_n\|_{H^m}^2 \leq C(\|u_n\|_{H^m}^2 + \|b_n\|_{H^m}^2 + 1)^2.$$

- Se $X(t) = \|u_n\|_{H^m}^2 + \|b_n\|_{H^m}^2 + 1$, então $\frac{d}{dt}X(t) \leq CX^2(t)$, e portanto

$$X(t) \leq \frac{X(0)}{1 - tCX(0)}.$$

Tem-se estimativas uniformes em H^m, se $0 < t < \frac{1}{2CX(0)}$.

-

$$\begin{aligned}
& |\langle D^m \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), D^m b\rangle_{L^2}| = |\langle D^m((\nabla \times b) \times b), D^m(\nabla \times b)\rangle_{L^2}| = \\
= \quad & |\langle D^m((\nabla \times b) \times b) - (D^m(\nabla \times b)) \times b, D^m(\nabla \times b)\rangle_{L^2}| \leq \\
\leq \quad & \|D^m((\nabla \times b) \times b) - (D^m(\nabla \times b)) \times b\|_{L^2}\|D^m(\nabla \times b)\|_{L^2} \\
\leq \quad & (\|b\|_{H^m}\|\nabla b\|_{L^\infty})\|\nabla b\|_{H^m} \leq \|b\|_{H^m}^2\|\nabla b\|_{H^m} \leq \\
\leq \quad & \epsilon\|\nabla b\|_{H^m}^2 + \|b\|_{H^m}^4.
\end{aligned}$$

Ideia da demonstração:

- Para o sistema regularizado com $\mathcal{J}_n \equiv \rho_n *$, temos a estimativa:

$$\frac{d}{dt}(\|u_n\|_{H^m}^2 + \|b_n\|_{H^m}^2 + 1) + \|\nabla u_n\|_{H^m}^2 + \|\nabla b_n\|_{H^m}^2 \leq C(\|u_n\|_{H^m}^2 + \|b_n\|_{H^m}^2 + 1)^2.$$

- Se $X(t) = \|u_n\|_{H^m}^2 + \|b_n\|_{H^m}^2 + 1$, então $\frac{d}{dt}X(t) \leq CX^2(t)$, e portanto

$$X(t) \leq \frac{X(0)}{1 - tCX(0)}.$$

Tem-se estimativas uniformes em H^m, se $0 < t < \frac{1}{2CX(0)}$.

-

$$\begin{aligned} & |\langle D^m \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), D^m b\rangle_{L^2}| = |\langle D^m((\nabla \times b) \times b), D^m(\nabla \times b)\rangle_{L^2}| = \\ = \quad & |\langle D^m((\nabla \times b) \times b) - (D^m(\nabla \times b)) \times b, D^m(\nabla \times b)\rangle_{L^2}| \leq \\ \leq \quad & \|D^m((\nabla \times b) \times b) - (D^m(\nabla \times b)) \times b\|_{L^2} \|D^m(\nabla \times b)\|_{L^2} \\ \leq \quad & (\|b\|_{H^m}\|\nabla b\|_{L^\infty})\|\nabla b\|_{H^m} \leq \|b\|_{H^m}^2\|\nabla b\|_{H^m} \leq \\ \leq \quad & \epsilon\|\nabla b\|_{H^m}^2 + \|b\|_{H^m}^4. \end{aligned}$$

Ideia da demonstração:

- Para o sistema regularizado com $\mathcal{J}_n \equiv \rho_n *$, temos a estimativa:

$$\frac{d}{dt}(\|u_n\|_{H^m}^2 + \|b_n\|_{H^m}^2 + 1) + \|\nabla u_n\|_{H^m}^2 + \|\nabla b_n\|_{H^m}^2 \leq C(\|u_n\|_{H^m}^2 + \|b_n\|_{H^m}^2 + 1)^2.$$

- Se $X(t) = \|u_n\|_{H^m}^2 + \|b_n\|_{H^m}^2 + 1$, então $\frac{d}{dt}X(t) \leq CX^2(t)$, e portanto

$$X(t) \leq \frac{X(0)}{1 - tCX(0)}.$$

Tem-se estimativas uniformes em H^m, se $0 < t < \frac{1}{2CX(0)}$.

-

$$\begin{aligned}
& |\langle D^m \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), D^m b\rangle_{L^2}| = |\langle D^m ((\nabla \times b) \times b), D^m (\nabla \times b)\rangle_{L^2}| = \\
= \quad & |\langle D^m ((\nabla \times b) \times b) - (D^m (\nabla \times b)) \times b, D^m (\nabla \times b)\rangle_{L^2}| \leq \\
\leq \quad & \|D^m ((\nabla \times b) \times b) - (D^m (\nabla \times b)) \times b\|_{L^2} \|D^m (\nabla \times b)\|_{L^2} \\
\leq \quad & (\|b\|_{H^m} \|\nabla b\|_{L^\infty}) \|\nabla b\|_{H^m} \leq \|b\|_{H^m}^2 \|\nabla b\|_{H^m} \leq \\
\leq \quad & \epsilon \|\nabla b\|_{H^m}^2 + \|b\|_{H^m}^4.
\end{aligned}$$

Ideia da demonstração:

- Para o sistema regularizado com $\mathcal{J}_n \equiv \rho_n *$, temos a estimativa:

$$\frac{d}{dt}(\|u_n\|_{H^m}^2 + \|b_n\|_{H^m}^2 + 1) + \|\nabla u_n\|_{H^m}^2 + \|\nabla b_n\|_{H^m}^2 \leq C(\|u_n\|_{H^m}^2 + \|b_n\|_{H^m}^2 + 1)^2.$$

- Se $X(t) = \|u_n\|_{H^m}^2 + \|b_n\|_{H^m}^2 + 1$, então $\frac{d}{dt}X(t) \leq CX^2(t)$, e portanto

$$X(t) \leq \frac{X(0)}{1 - tCX(0)}.$$

Tem-se estimativas uniformes em H^m, se $0 < t < \frac{1}{2CX(0)}$.

-

$$\begin{aligned}
& |\langle D^m \nabla \times ((\nabla \times b) \times b), D^m b \rangle_{L^2}| = |\langle D^m ((\nabla \times b) \times b), D^m (\nabla \times b) \rangle_{L^2}| = \\
= \quad & |\langle D^m ((\nabla \times b) \times b) - (D^m (\nabla \times b)) \times b, D^m (\nabla \times b) \rangle_{L^2}| \leq \\
\leq \quad & \|D^m ((\nabla \times b) \times b) - (D^m (\nabla \times b)) \times b\|_{L^2} \|D^m (\nabla \times b)\|_{L^2} \\
\leq \quad & (\|b\|_{H^m} \|\nabla b\|_{L^\infty}) \|\nabla b\|_{H^m} \leq \|b\|_{H^m}^2 \|\nabla b\|_{H^m} \leq \\
\leq \quad & \epsilon \|\nabla b\|_{H^m}^2 + \|b\|_{H^m}^4.
\end{aligned}$$

Teorema (Benvenutti & Ferreira, 2016, Differential Integral Equations)

- *Seja* $(u_0, b_0) \in H^2_\sigma(\mathbb{R}^3) \times H^2(\mathbb{R}^3)$. *Então,* $\exists!$ *solução local e regular. Se o dado inicial é pequeno, então a solução é global no tempo.*

  Se $T < \infty$ *é o tempo maximal de existência, então*

$$\int_0^T \left(\|\nabla u\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Delta b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) dt = \infty. \tag{7}$$

- *Seja* (u, b) *uma solução global e regular satisfazendo*

$$\int_0^\infty \left(\|\nabla u\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Delta b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) dt < \infty. \tag{8}$$

  Então, $\exists\ \delta > 0$ *tal que se* $(v_0, h_0) \in H^2_\sigma(\mathbb{R}^3) \times H^2(\mathbb{R}^3)$ *e*

$$\|u_0 - v_0\|^2_{H^2_\sigma(\mathbb{R}^3)} + \|b_0 - h_0\|^2_{H^2(\mathbb{R}^3)} < \delta, \tag{9}$$

  então a solução (v, h) *com dado inicial* (v_0, h_0) *é também global.*

- *Além disso,* (v, h) *permanece perto de* (u, b) *uniformemente no tempo,*

Teorema (Benvenutti & Ferreira, 2016, Differential Integral Equations)

- *Seja* $(u_0, b_0) \in H^2_\sigma(\mathbb{R}^3) \times H^2(\mathbb{R}^3)$. *Então,* $\exists!$ *solução local e regular. Se o dado inicial é pequeno, então a solução é global no tempo.*

  Se $T < \infty$ *é o tempo maximal de existência, então*

$$\int_0^T \left(\|\nabla u\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Delta b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) dt = \infty. \tag{7}$$

- *Seja* (u, b) *uma solução global e regular satisfazendo*

$$\int_0^\infty \left(\|\nabla u\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Delta b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) dt < \infty. \tag{8}$$

  Então, $\exists\ \delta > 0$ *tal que se* $(v_0, h_0) \in H^2_\sigma(\mathbb{R}^3) \times H^2(\mathbb{R}^3)$ *e*

$$\|u_0 - v_0\|^2_{H^2_\sigma(\mathbb{R}^3)} + \|b_0 - h_0\|^2_{H^2(\mathbb{R}^3)} < \delta, \tag{9}$$

  então a solução (v, h) *com dado inicial* (v_0, h_0) *é também global.*

- *Além disso,* (v, h) *permanece perto de* (u, b) *uniformemente no tempo,*

Teorema (Benvenutti & Ferreira, 2016, Differential Integral Equations)

- *Seja* $(u_0, b_0) \in H^2_\sigma(\mathbb{R}^3) \times H^2(\mathbb{R}^3)$. *Então,* $\exists!$ *solução local e regular. Se o dado inicial é pequeno, então a solução é global no tempo.*

  Se $T < \infty$ *é o tempo maximal de existência, então*

$$\int_0^T \left(\|\nabla u\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Delta b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) dt = \infty. \tag{7}$$

- *Seja* (u, b) *uma solução global e regular satisfazendo*

$$\int_0^\infty \left(\|\nabla u\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Delta b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) dt < \infty. \tag{8}$$

  Então, $\exists\ \delta > 0$ *tal que se* $(v_0, h_0) \in H^2_\sigma(\mathbb{R}^3) \times H^2(\mathbb{R}^3)$ *e*

$$\|u_0 - v_0\|^2_{H^2_\sigma(\mathbb{R}^3)} + \|b_0 - h_0\|^2_{H^2(\mathbb{R}^3)} < \delta, \tag{9}$$

  então a solução (v, h) *com dado inicial* (v_0, h_0) *é também global.*

- *Além disso,* (v, h) *permanece perto de* (u, b) *uniformemente no tempo,*

Teorema (Benvenutti & Ferreira, 2016, Differential Integral Equations)

- *Seja* $(u_0, b_0) \in H^2_\sigma(\mathbb{R}^3) \times H^2(\mathbb{R}^3)$*. Então,* $\exists!$ *solução local e regular. Se o dado inicial é pequeno, então a solução é global no tempo.*

  Se $T < \infty$ *é o tempo maximal de existência, então*

$$\int_0^T \left(\|\nabla u\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Delta b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) dt = \infty. \tag{7}$$

- *Seja* (u, b) *uma solução global e regular satisfazendo*

$$\int_0^\infty \left(\|\nabla u\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Delta b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) dt < \infty. \tag{8}$$

  Então, $\exists\ \delta > 0$ *tal que se* $(v_0, h_0) \in H^2_\sigma(\mathbb{R}^3) \times H^2(\mathbb{R}^3)$ *e*

$$\|u_0 - v_0\|^2_{H^2_\sigma(\mathbb{R}^3)} + \|b_0 - h_0\|^2_{H^2(\mathbb{R}^3)} < \delta, \tag{9}$$

  então a solução (v, h) *com dado inicial* (v_0, h_0) *é também global.*

- *Além disso,* (v, h) *permanece perto de* (u, b) *uniformemente no tempo,*

Teorema (Benvenutti & Ferreira, 2016, Differential Integral Equations)

- *Seja* $(u_0, b_0) \in H^2_\sigma(\mathbb{R}^3) \times H^2(\mathbb{R}^3)$. *Então,* $\exists!$ *solução local e regular. Se o dado inicial é pequeno, então a solução é global no tempo.*

  Se $T < \infty$ *é o tempo maximal de existência, então*

$$\int_0^T \left(\|\nabla u\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Delta b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) dt = \infty. \tag{7}$$

- *Seja* (u, b) *uma solução global e regular satisfazendo*

$$\int_0^\infty \left(\|\nabla u\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Delta b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) dt < \infty. \tag{8}$$

  Então, $\exists\ \delta > 0$ *tal que se* $(v_0, h_0) \in H^2_\sigma(\mathbb{R}^3) \times H^2(\mathbb{R}^3)$ *e*

$$\|u_0 - v_0\|^2_{H^2_\sigma(\mathbb{R}^3)} + \|b_0 - h_0\|^2_{H^2(\mathbb{R}^3)} < \delta, \tag{9}$$

  então a solução (v, h) *com dado inicial* (v_0, h_0) *é também global.*

- *Além disso,* (v, h) *permanece perto de* (u, b) *uniformemente no tempo, isto é,* $\exists$ $M = M(\delta)$ *com* $M(\delta) \xrightarrow{\delta \to 0} 0$ *tal que*

$$\sup_{t \geq 0} \left(\|u(t) - v(t)\|^2_{H^2_\sigma(\mathbb{R}^3)} + \|b(t) - h(t)\|^2_{H^2(\mathbb{R}^3)} \right) \leq M(\delta) \tag{10}$$

Teorema (Benvenutti & Ferreira, 2016, Differential Integral Equations)

- *Seja* $(u_0, b_0) \in H^2_\sigma(\mathbb{R}^3) \times H^2(\mathbb{R}^3)$. *Então,* $\exists!$ *solução local e regular. Se o dado inicial é pequeno, então a solução é global no tempo.*

  Se $T < \infty$ *é o tempo maximal de existência, então*

$$\int_0^T \left(\|\nabla u\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Delta b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) dt = \infty. \tag{7}$$

- *Seja* (u, b) *uma solução global e regular satisfazendo*

$$\int_0^\infty \left(\|\nabla u\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Delta b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) dt < \infty. \tag{8}$$

  Então, $\exists\ \delta > 0$ *tal que se* $(v_0, h_0) \in H^2_\sigma(\mathbb{R}^3) \times H^2(\mathbb{R}^3)$ *e*

$$\|u_0 - v_0\|^2_{H^2_\sigma(\mathbb{R}^3)} + \|b_0 - h_0\|^2_{H^2(\mathbb{R}^3)} < \delta, \tag{9}$$

  então a solução (v, h) *com dado inicial* (v_0, h_0) *é também global.*

- *Além disso,* (v, h) *permanece perto de* (u, b) *uniformemente no tempo, isto é,* $\exists$ $M = M(\delta)$ *com* $M(\delta) \xrightarrow{\delta \to 0} 0$ *tal que*

$$\sup_{t \geq 0} \left(\|u(t) - v(t)\|^2_{H^2_\sigma(\mathbb{R}^3)} + \|b(t) - h(t)\|^2_{H^2(\mathbb{R}^3)} \right) \leq M(\delta). \tag{10}$$

Teorema (Benvenutti & Ferreira, 2016, Differential Integral Equations)

- *Seja* $(u_0, b_0) \in H^2_\sigma(\mathbb{R}^3) \times H^2(\mathbb{R}^3)$. *Então,* $\exists!$ *solução local e regular. Se o dado inicial é pequeno, então a solução é global no tempo.*

  Se $T < \infty$ *é o tempo maximal de existência, então*

$$\int_0^T \left(\|\nabla u\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Delta b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) dt = \infty. \tag{7}$$

- *Seja* (u, b) *uma solução global e regular satisfazendo*

$$\int_0^\infty \left(\|\nabla u\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Delta b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) dt < \infty. \tag{8}$$

  Então, $\exists\ \delta > 0$ *tal que se* $(v_0, h_0) \in H^2_\sigma(\mathbb{R}^3) \times H^2(\mathbb{R}^3)$ *e*

$$\|u_0 - v_0\|^2_{H^2_\sigma(\mathbb{R}^3)} + \|b_0 - h_0\|^2_{H^2(\mathbb{R}^3)} < \delta, \tag{9}$$

  então a solução (v, h) *com dado inicial* (v_0, h_0) *é também global.*

- *Além disso,* (v, h) *permanece perto de* (u, b) *uniformemente no tempo, isto é,* $\exists$ $M = M(\delta)$ *com* $M(\delta) \xrightarrow{\delta \to 0} 0$ *tal que*

$$\sup_{t \geq 0} \left(\|u(t) - v(t)\|^2_{H^2_\sigma(\mathbb{R}^3)} + \|b(t) - h(t)\|^2_{H^2(\mathbb{R}^3)} \right) \leq M(\delta). \tag{10}$$

Stretch of the proof

- The proof is based entirely on appropriate energy type inequalities.
- The novelty is how we estimate the Hall-term (second order nonlinear).
- We use the particular structure of the Hall-term (vector identities).

Stretch of the proof

- The proof is based entirely on appropriate energy type inequalities.
- The novelty is how we estimate the Hall-term (second order nonlinear).
- We use the particular structure of the Hall-term (vector identities).

Stretch of the proof

- The proof is based entirely on appropriate energy type inequalities.
- The novelty is how we estimate the Hall-term (second order nonlinear).
- We use the particular structure of the Hall-term (vector identities).

Stretch of the proof

- The proof is based entirely on appropriate energy type inequalities.
- The novelty is how we estimate the Hall-term (second order nonlinear).
- We use the particular structure of the Hall-term (vector identities).

Stretch of the proof of stability

Lemma

If $U = v - u$ and $B = h - b$,

- Obs:
  - It is an estimate of energy type with norm H^2 for U and B;
  - In right side, we have only derivative until 2º order to U and B;
  - There are derivatives until third order to b in L;
  - We can prove that the hypothesis over (u,b) implies that $\int_0^\infty L(s)ds < \infty$;
  - Then, the stability follows by using Gronwall's Lemma in a suitable way.

Stretch of the proof of stability

Lemma

If $U = v - u$ and $B = h - b$, then

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\|U\|^2_{H^2}\right. &+ \left.\|B\|^2_{H^2}\right) + \left(\|\nabla U\|^2_{L^2} + \|\Delta U\|^2_{L^2} + \|\nabla \times \Delta U\|^2_{L^2}\right) \\
&+ \left(\|\nabla B\|^2_{L^2} + \|\Delta B\|^2_{L^2} + \|\nabla \times \Delta B\|^2_{L^2} + \|div\, \Delta B\|^2_{L^2}\right) \\
&\leq \tilde{C}\left(\|U\|^2_{H^2} + \|B\|^2_{H^2}\right)^3 + \tilde{C}\left(\|U\|^2_{H^2} + \|B\|^2_{H^2}\right) L(t),
\end{aligned}$$

where

$$L(t) = \|\nabla u\|^2_{L^2} + \|\nabla b\|^2_{L^2} + \|\Delta b\|^2_{L^2} + \|\Delta u\|^2_{L^2} + \|\nabla \times \Delta b\|^2_{L^2} + \|div\, \Delta b\|^2_{L^2}$$

- Obs:
  - It is an estimate of energy type with norm H^2 for U and B;
  - In right side, we have only derivative until 2º order to U and B;
  - There are derivatives until third order to b in L;
  - We can prove that the hypothesis over (u,b) implies that $\int_0^\infty L(s)ds < \infty$;
  - Then, the stability follows by using Gronwall's Lemma in a suitable way.

Stretch of the proof of stability

Lemma

If $U = v - u$ and $B = h - b$, then

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\|U\|_{H^2}^2\right. &+ \left.\|B\|_{H^2}^2\right) + \left(\|\nabla U\|_{L^2}^2 + \|\Delta U\|_{L^2}^2 + \|\nabla \times \Delta U\|_{L^2}^2\right) \\ &+ \left(\|\nabla B\|_{L^2}^2 + \|\Delta B\|_{L^2}^2 + \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2\right) \\ &\leq \tilde{C}\left(\|U\|_{H^2}^2 + \|B\|_{H^2}^2\right)^3 + \tilde{C}\left(\|U\|_{H^2}^2 + \|B\|_{H^2}^2\right) L(t),\end{aligned}$$

where

$$L(t) = \|\nabla u\|_{L^2}^4 + \|\nabla b\|_{L^2}^4 + \|\Delta b\|_{L^2}^4 + \|\Delta u\|_{L^2}^4 + \|\nabla \times \Delta b\|_{L^2}^2 + \|div\, \Delta b\|_{L^2}^2.$$

- Obs:
  - It is an estimate of energy type with norm H^2 for U and B;
  - In right side, we have only derivative until 2º order to U and B;
  - There are derivatives until third order to b in L;
  - We can prove that the hypothesis over (u,b) implies that $\int_0^\infty L(s)ds < \infty$;
  - Then, the stability follows by using Gronwall's Lemma in a suitable way.

Lemma

If $U = v - u$ and $B = h - b$, then

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\|U\|_{H^2}^2\right. &+ \left.\|B\|_{H^2}^2\right) + \left(\|\nabla U\|_{L^2}^2 + \|\Delta U\|_{L^2}^2 + \|\nabla \times \Delta U\|_{L^2}^2\right)\\ &+ \left(\|\nabla B\|_{L^2}^2 + \|\Delta B\|_{L^2}^2 + \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \|div\,\Delta B\|_{L^2}^2\right)\\ &\leq \tilde{C}\left(\|U\|_{H^2}^2 + \|B\|_{H^2}^2\right)^3 + \tilde{C}\left(\|U\|_{H^2}^2 + \|B\|_{H^2}^2\right) L(t),\end{aligned}$$

where

$$L(t) = \|\nabla u\|_{L^2}^4 + \|\nabla b\|_{L^2}^4 + \|\Delta b\|_{L^2}^4 + \|\Delta u\|_{L^2}^4 + \|\nabla \times \Delta b\|_{L^2}^2 + \|div\,\Delta b\|_{L^2}^2.$$

- Obs:
  - It is an estimate of energy type with norm H^2 for U and B;
  - In right side, we have only derivative until 2º order to U and B;
  - There are derivatives until third order to b in L;
  - We can prove that the hypothesis over (u,b) implies that $\int_0^\infty L(s)ds < \infty$;
  - Then, the stability follows by using Gronwall's Lemma in a suitable way.

Stretch of the proof of stability

Lemma

If $U = v - u$ and $B = h - b$, then

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\|U\|_{H^2}^2\right. &+ \left.\|B\|_{H^2}^2\right) + \left(\|\nabla U\|_{L^2}^2 + \|\Delta U\|_{L^2}^2 + \|\nabla \times \Delta U\|_{L^2}^2\right) \\
&+ \left(\|\nabla B\|_{L^2}^2 + \|\Delta B\|_{L^2}^2 + \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2\right) \\
&\leq \tilde{C}\left(\|U\|_{H^2}^2 + \|B\|_{H^2}^2\right)^3 + \tilde{C}\left(\|U\|_{H^2}^2 + \|B\|_{H^2}^2\right) L(t),
\end{aligned}$$

where

$$L(t) = \|\nabla u\|_{L^2}^4 + \|\nabla b\|_{L^2}^4 + \|\Delta b\|_{L^2}^4 + \|\Delta u\|_{L^2}^4 + \|\nabla \times \Delta b\|_{L^2}^2 + \|div\, \Delta b\|_{L^2}^2.$$

- Obs:
  - It is an estimate of energy type with norm H^2 for U and B;
  - In right side, we have only derivative until 2° order to U and B;
  - There are derivatives until third order to b in L;
  - We can prove that the hypothesis over (u,b) implies that $\int_0^\infty L(s)ds < \infty$;
  - Then, the stability follows by using Gronwall's Lemma in a suitable way.

Lemma

If $U = v - u$ and $B = h - b$, then

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\|U\|_{H^2}^2\right. &+ \left.\|B\|_{H^2}^2\right) + \left(\|\nabla U\|_{L^2}^2 + \|\Delta U\|_{L^2}^2 + \|\nabla \times \Delta U\|_{L^2}^2\right) \\
&+ \left(\|\nabla B\|_{L^2}^2 + \|\Delta B\|_{L^2}^2 + \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2\right) \\
&\leq \tilde{C}\left(\|U\|_{H^2}^2 + \|B\|_{H^2}^2\right)^3 + \tilde{C}\left(\|U\|_{H^2}^2 + \|B\|_{H^2}^2\right) L(t),
\end{aligned}$$

where

$$L(t) = \|\nabla u\|_{L^2}^4 + \|\nabla b\|_{L^2}^4 + \|\Delta b\|_{L^2}^4 + \|\Delta u\|_{L^2}^4 + \|\nabla \times \Delta b\|_{L^2}^2 + \|div\, \Delta b\|_{L^2}^2.$$

- Obs:
  - It is an estimate of energy type with norm H^2 for U and B;
  - In right side, we have only derivative until 2° order to U and B;
  - There are derivatives until third order to b in L;
  - We can prove that the hypothesis over (u,b) implies that $\int_0^\infty L(s)ds < \infty$;
  - Then, the stability follows by using Gronwall's Lemma in a suitable way.

Stretch of the proof of stability

Lemma

If $U = v - u$ and $B = h - b$, then

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\|U\|_{H^2}^2\right. &+ \left.\|B\|_{H^2}^2\right) + \left(\|\nabla U\|_{L^2}^2 + \|\Delta U\|_{L^2}^2 + \|\nabla \times \Delta U\|_{L^2}^2\right) \\ &+ \left(\|\nabla B\|_{L^2}^2 + \|\Delta B\|_{L^2}^2 + \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2\right) \\ &\leq \tilde{C}\left(\|U\|_{H^2}^2 + \|B\|_{H^2}^2\right)^3 + \tilde{C}\left(\|U\|_{H^2}^2 + \|B\|_{H^2}^2\right) L(t),\end{aligned}$$

where

$$L(t) = \|\nabla u\|_{L^2}^4 + \|\nabla b\|_{L^2}^4 + \|\Delta b\|_{L^2}^4 + \|\Delta u\|_{L^2}^4 + \|\nabla \times \Delta b\|_{L^2}^2 + \|div\, \Delta b\|_{L^2}^2.$$

- Obs:
  - It is an estimate of energy type with norm H^2 for U and B;
  - In right side, we have only derivative until 2º order to U and B;
  - There are derivatives until third order to b in L;
  - We can prove that the hypothesis over (u,b) implies that $\int_0^\infty L(s)ds < \infty$;
  - Then, the stability follows by using Gronwall's Lemma in a suitable way.

Stretch of the proof of stability

Lemma

If $U = v - u$ and $B = h - b$, then

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\|U\|_{H^2}^2\right. &+ \left.\|B\|_{H^2}^2\right) + \left(\|\nabla U\|_{L^2}^2 + \|\Delta U\|_{L^2}^2 + \|\nabla \times \Delta U\|_{L^2}^2\right) \\ &+ \left(\|\nabla B\|_{L^2}^2 + \|\Delta B\|_{L^2}^2 + \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \|div\,\Delta B\|_{L^2}^2\right) \\ &\leq \tilde{C}\left(\|U\|_{H^2}^2 + \|B\|_{H^2}^2\right)^3 + \tilde{C}\left(\|U\|_{H^2}^2 + \|B\|_{H^2}^2\right) L(t),\end{aligned}$$

where

$$L(t) = \|\nabla u\|_{L^2}^4 + \|\nabla b\|_{L^2}^4 + \|\Delta b\|_{L^2}^4 + \|\Delta u\|_{L^2}^4 + \|\nabla \times \Delta b\|_{L^2}^2 + \|div\,\Delta b\|_{L^2}^2.$$

- Obs:
  - It is an estimate of energy type with norm H^2 for U and B;
  - In right side, we have only derivative until 2° order to U and B;
  - There are derivatives until third order to b in L;
  - We can prove that the hypothesis over (u,b) implies that $\int_0^\infty L(s)ds < \infty$;
  - Then, the stability follows by using Gronwall's Lemma in a suitable way.

Stretch of the proof of stability

Lemma

If $U = v - u$ and $B = h - b$, then

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\|U\|_{H^2}^2\right. &+ \left.\|B\|_{H^2}^2\right) + \left(\|\nabla U\|_{L^2}^2 + \|\Delta U\|_{L^2}^2 + \|\nabla \times \Delta U\|_{L^2}^2\right) \\ &+ \left(\|\nabla B\|_{L^2}^2 + \|\Delta B\|_{L^2}^2 + \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2\right) \\ &\leq \tilde{C}\left(\|U\|_{H^2}^2 + \|B\|_{H^2}^2\right)^3 + \tilde{C}\left(\|U\|_{H^2}^2 + \|B\|_{H^2}^2\right) L(t),\end{aligned}$$

where

$$L(t) = \|\nabla u\|_{L^2}^4 + \|\nabla b\|_{L^2}^4 + \|\Delta b\|_{L^2}^4 + \|\Delta u\|_{L^2}^4 + \|\nabla \times \Delta b\|_{L^2}^2 + \|div\, \Delta b\|_{L^2}^2.$$

- Obs:
  - It is an estimate of energy type with norm H^2 for U and B;
  - In right side, we have only derivative until 2° order to U and B;
  - There are derivatives until third order to b in L;
  - We can prove that the hypothesis over (u,b) implies that $\int_0^\infty L(s)ds < \infty$;
  - Then, the stability follows by using Gronwall's Lemma in a suitable way.

Stretch of the proof of stability

Lemma

If $U = v - u$ and $B = h - b$, then

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\|U\|_{H^2}^2\right. &+ \left.\|B\|_{H^2}^2\right) + \left(\|\nabla U\|_{L^2}^2 + \|\Delta U\|_{L^2}^2 + \|\nabla \times \Delta U\|_{L^2}^2\right) \\ &+ \left(\|\nabla B\|_{L^2}^2 + \|\Delta B\|_{L^2}^2 + \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2\right) \\ &\leq \tilde{C}\left(\|U\|_{H^2}^2 + \|B\|_{H^2}^2\right)^3 + \tilde{C}\left(\|U\|_{H^2}^2 + \|B\|_{H^2}^2\right) L(t),\end{aligned}$$

where

$$L(t) = \|\nabla u\|_{L^2}^4 + \|\nabla b\|_{L^2}^4 + \|\Delta b\|_{L^2}^4 + \|\Delta u\|_{L^2}^4 + \|\nabla \times \Delta b\|_{L^2}^2 + \|div\, \Delta b\|_{L^2}^2.$$

- Obs:
  - It is an estimate of energy type with norm H^2 for U and B;
  - In right side, we have only derivative until 2º order to U and B;
  - There are derivatives until third order to b in L;
  - We can prove that the hypothesis over (u,b) implies that $\int_0^\infty L(s)ds < \infty$;
  - Then, the stability follows by using Gronwall's Lemma in a suitable way.

Stretch of the proof of stability

Lemma

If $U = v - u$ and $B = h - b$, then

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\|U\|_{H^2}^2\right. &+ \left.\|B\|_{H^2}^2\right) + \left(\|\nabla U\|_{L^2}^2 + \|\Delta U\|_{L^2}^2 + \|\nabla \times \Delta U\|_{L^2}^2\right) \\ &+ \left(\|\nabla B\|_{L^2}^2 + \|\Delta B\|_{L^2}^2 + \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2\right) \\ &\leq \tilde{C}\left(\|U\|_{H^2}^2 + \|B\|_{H^2}^2\right)^3 + \tilde{C}\left(\|U\|_{H^2}^2 + \|B\|_{H^2}^2\right) L(t), \end{aligned}$$

where

$$L(t) = \|\nabla u\|_{L^2}^4 + \|\nabla b\|_{L^2}^4 + \|\Delta b\|_{L^2}^4 + \|\Delta u\|_{L^2}^4 + \|\nabla \times \Delta b\|_{L^2}^2 + \|div\, \Delta b\|_{L^2}^2.$$

- Obs:
  - It is an estimate of energy type with norm H^2 for U and B;
  - In right side, we have only derivative until 2º order to U and B;
  - There are derivatives until third order to b in L;
  - We can prove that the hypothesis over (u,b) implies that $\int_0^\infty L(s)ds < \infty$;
  - Then, the stability follows by using Gronwall's Lemma in a suitable way.

Stretch of the proof of lemma

- The difference $B = h - b$ satisfies:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t B - \Delta B & = & \nabla \times (U \times B) + \nabla \times (U \times b) + \nabla \times (u \times B) \\ & - & \nabla \times ((\nabla \times B) \times B) - \nabla \times ((\nabla \times B) \times b) \\ & - & \nabla \times ((\nabla \times b) \times B) \end{array} \right.$$

- The parts that are in blue are those that came from the Hall term.
- We must multiply the equation by $\nabla \times \nabla \times \Delta B$, integrate and estimate each term.

$$\begin{array}{rl} & |\langle \nabla \times ((\nabla \times B) \times B), \nabla \times \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \\ = & |\langle \nabla \times \nabla \times ((\nabla \times B) \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \ldots \\ = & |\langle (\nabla \times \{(\nabla \times B)(div\, B) - 2[(\nabla \times B) \cdot \nabla] B\} + ((\nabla \times \nabla \times B)(div\, B) \\ & \quad -2[(\nabla \times \nabla \times B) \cdot \nabla] B - (\nabla \times \nabla \times B) \times (\nabla \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L^2}| \leq \\ \leq & C \|\Delta B\|_{L^2} \|\nabla B\|_{L^\infty} \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2} \leq \\ \leq & \|\Delta B\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} (\|\nabla \times \Delta B\|_{L^2} + \|div\, \Delta B\|_{L^2})^{\frac{3}{2}} \leq \\ \leq & \epsilon \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \epsilon \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2 + C \|\Delta B\|_{L^2}^6. \end{array}$$

Stretch of the proof of lemma

- The difference $B = h - b$ satisfies:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial_t B - \Delta B & = & \nabla \times (U \times B) + \nabla \times (U \times b) + \nabla \times (u \times B) \\ & - & \nabla \times ((\nabla \times B) \times B) - \nabla \times ((\nabla \times B) \times b) \\ & - & \nabla \times ((\nabla \times b) \times B) \end{array} \right.$$

- The parts that are in blue are those that came from the Hall term.
- We must multiply the equation by $\nabla \times \nabla \times \Delta B$, integrate and estimate each term.

$$\begin{array}{cl} & |\langle \nabla \times ((\nabla \times B) \times B), \nabla \times \nabla \times \Delta B \rangle_{L^2}| = \\ = & |\langle \nabla \times \nabla \times ((\nabla \times B) \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \ldots \\ = & |\langle (\nabla \times \{(\nabla \times B)(div\, B) - 2[(\nabla \times B) \cdot \nabla] B\} + ((\nabla \times \nabla \times B)(div\, B) \\ & \quad -2[(\nabla \times \nabla \times B) \cdot \nabla] B - (\nabla \times \nabla \times B) \times (\nabla \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L^2}| \leq \\ \leq & C \|\Delta B\|_{L^2} \|\nabla B\|_{L^\infty} \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2} \leq \\ \leq & \|\Delta B\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} (\|\nabla \times \Delta B\|_{L^2} + \|div\, \Delta B\|_{L^2})^{\frac{3}{2}} \leq \\ \leq & \epsilon \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \epsilon \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2 + C \|\Delta B\|_{L^2}^6. \end{array}$$

Stretch of the proof of lemma

- The difference $B = h - b$ satisfies:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial_t B - \Delta B & = & \nabla \times (U \times B) + \nabla \times (U \times b) + \nabla \times (u \times B) \\ & - & \nabla \times ((\nabla \times B) \times B) - \nabla \times ((\nabla \times B) \times b) \\ & - & \nabla \times ((\nabla \times b) \times B) \end{array} \right.$$

- The parts that are in blue are those that came from the Hall term.
- We must multiply the equation by $\nabla \times \nabla \times \Delta B$, integrate and estimate each term.

$$\begin{aligned} & |\langle \nabla \times ((\nabla \times B) \times B), \nabla \times \nabla \times \Delta B \rangle_{L^2}| = \\ = \; & |\langle \nabla \times \nabla \times ((\nabla \times B) \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L^2}| = \ldots \\ = \; & |\langle (\nabla \times \{(\nabla \times B)(div\, B) - 2[(\nabla \times B) \cdot \nabla] B\} + ((\nabla \times \nabla \times B)(div\, B) \\ & \quad -2[(\nabla \times \nabla \times B) \cdot \nabla] B - (\nabla \times \nabla \times B) \times (\nabla \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L^2}| \leq \\ \leq \; & C \|\Delta B\|_{L^2} \|\nabla B\|_{L^\infty} \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2} \leq \\ \leq \; & \|\Delta B\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} (\|\nabla \times \Delta B\|_{L^2} + \|div\, \Delta B\|_{L^2})^{\frac{3}{2}} \leq \\ \leq \; & \epsilon \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \epsilon \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2 + C \|\Delta B\|_{L^2}^6 . \end{aligned}$$

Stretch of the proof of lemma

- The difference $B = h - b$ satisfies:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t B - \Delta B & = & \nabla \times (U \times B) + \nabla \times (U \times b) + \nabla \times (u \times B) \\ & - & \nabla \times ((\nabla \times B) \times B) - \nabla \times ((\nabla \times B) \times b) \\ & - & \nabla \times ((\nabla \times b) \times B) \end{array} \right.$$

- The parts that are in blue are those that came from the Hall term.
- We must multiply the equation by $\nabla \times \nabla \times \Delta B$, integrate and estimate each term.

$$\begin{array}{rl} & |\langle \nabla \times ((\nabla \times B) \times B), \nabla \times \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \\ = & |\langle \nabla \times \nabla \times ((\nabla \times B) \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \dots \\ = & |\langle (\nabla \times \{(\nabla \times B)(div\, B) - 2[(\nabla \times B) \cdot \nabla]B\} + ((\nabla \times \nabla \times B)(div\, B) \\ & \quad -2[(\nabla \times \nabla \times B) \cdot \nabla]B - (\nabla \times \nabla \times B) \times (\nabla \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L^2}| \leq \\ \leq & C\|\Delta B\|_{L^2} \|\nabla B\|_{L^\infty} \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2} \leq \\ \leq & \|\Delta B\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} (\|\nabla \times \Delta B\|_{L^2} + \|div\, \Delta B\|_{L^2})^{\frac{3}{2}} \leq \\ \leq & \epsilon\|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \epsilon\|div\, \Delta B\|_{L^2}^2 + C\|\Delta B\|_{L^2}^6. \end{array}$$

Stretch of the proof of lemma

- The difference $B = h - b$ satisfies:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial_t B - \Delta B & = & \nabla \times (U \times B) + \nabla \times (U \times b) + \nabla \times (u \times B) \\ & - & \nabla \times ((\nabla \times B) \times B) - \nabla \times ((\nabla \times B) \times b) \\ & - & \nabla \times ((\nabla \times b) \times B) \end{array} \right.$$

- The parts that are in blue are those that came from the Hall term.
- We must multiply the equation by $\nabla \times \nabla \times \Delta B$, integrate and estimate each term.

$$\begin{aligned} & |\langle \nabla \times ((\nabla \times B) \times B), \nabla \times \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \\ = \; & |\langle \nabla \times \nabla \times ((\nabla \times B) \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \ldots \\ = \; & |\langle (\nabla \times \{(\nabla \times B)(div\, B) - 2[(\nabla \times B) \cdot \nabla] B\} + ((\nabla \times \nabla \times B)(div\, B) \\ & \quad -2[(\nabla \times \nabla \times B) \cdot \nabla] B - (\nabla \times \nabla \times B) \times (\nabla \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L^2}| \leq \\ \leq \; & C \|\Delta B\|_{L^2} \|\nabla B\|_{L^\infty} \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2} \leq \\ \leq \; & \|\Delta B\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} (\|\nabla \times \Delta B\|_{L^2} + \|div\, \Delta B\|_{L^2})^{\frac{3}{2}} \leq \\ \leq \; & \epsilon \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \epsilon \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2 + C \|\Delta B\|_{L^2}^6 . \end{aligned}$$

Stretch of the proof of lemma

- The difference $B = h - b$ satisfies:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t B - \Delta B & = & \nabla \times (U \times B) + \nabla \times (U \times b) + \nabla \times (u \times B) \\ & - & \nabla \times ((\nabla \times B) \times B) - \nabla \times ((\nabla \times B) \times b) \\ & - & \nabla \times ((\nabla \times b) \times B) \end{array} \right.$$

- The parts that are in blue are those that came from the Hall term.
- We must multiply the equation by $\nabla \times \nabla \times \Delta B$, integrate and estimate each term.

$$\begin{array}{rl} & |\langle \nabla \times ((\nabla \times B) \times B), \nabla \times \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \\ = & |\langle \nabla \times \nabla \times ((\nabla \times B) \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \dots \\ = & |\langle (\nabla \times \{(\nabla \times B)(div\, B) - 2[(\nabla \times B) \cdot \nabla]B\} + ((\nabla \times \nabla \times B)(div\, B) \\ & \quad -2[(\nabla \times \nabla \times B) \cdot \nabla]B - (\nabla \times \nabla \times B) \times (\nabla \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L^2}| \leq \\ \leq & C\|\Delta B\|_{L^2} \|\nabla B\|_{L^\infty} \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2} \leq \\ \leq & \|\Delta B\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} (\|\nabla \times \Delta B\|_{L^2} + \|div\, \Delta B\|_{L^2})^{\frac{3}{2}} \leq \\ \leq & \epsilon \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \epsilon \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2 + C\|\Delta B\|_{L^2}^6 . \end{array}$$

Stretch of the proof of lemma

- The difference $B = h - b$ satisfies:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial_t B - \Delta B & = & \nabla \times (U \times B) + \nabla \times (U \times b) + \nabla \times (u \times B) \\ & - & \nabla \times ((\nabla \times B) \times B) - \nabla \times ((\nabla \times B) \times b) \\ & - & \nabla \times ((\nabla \times b) \times B) \end{array} \right.$$

- The parts that are in blue are those that came from the Hall term.
- We must multiply the equation by $\nabla \times \nabla \times \Delta B$, integrate and estimate each term.

$$\begin{array}{cl} & |\langle \nabla \times ((\nabla \times B) \times B), \nabla \times \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \\ = & |\langle \nabla \times \nabla \times ((\nabla \times B) \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \dots \\ = & |\langle (\nabla \times \{(\nabla \times B)(div\, B) - 2[(\nabla \times B) \cdot \nabla]B\} + ((\nabla \times \nabla \times B)(div\, B) \\ & \quad -2[(\nabla \times \nabla \times B) \cdot \nabla]B - (\nabla \times \nabla \times B) \times (\nabla \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L^2}| \leq \\ \leq & C\|\Delta B\|_{L^2} \|\nabla B\|_{L^\infty} \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2} \leq \\ \leq & \|\Delta B\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} (\|\nabla \times \Delta B\|_{L^2} + \|div\, \Delta B\|_{L^2})^{\frac{3}{2}} \leq \\ \leq & \epsilon \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \epsilon \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2 + C\|\Delta B\|_{L^2}^6. \end{array}$$

- The difference $B = h - b$ satisfies:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial_t B - \Delta B & = & \nabla \times (U \times B) + \nabla \times (U \times b) + \nabla \times (u \times B) \\ & - & \nabla \times ((\nabla \times B) \times B) - \nabla \times ((\nabla \times B) \times b) \\ & - & \nabla \times ((\nabla \times b) \times B) \end{array} \right.$$

- The parts that are in blue are those that came from the Hall term.
- We must multiply the equation by $\nabla \times \nabla \times \Delta B$, integrate and estimate each term.

$$\begin{aligned} & |\langle \nabla \times ((\nabla \times B) \times B), \nabla \times \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \\ = \quad & |\langle \nabla \times \nabla \times ((\nabla \times B) \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \dots \\ = \quad & |\langle (\nabla \times \{(\nabla \times B)(div\, B) - 2[(\nabla \times B) \cdot \nabla]B\} + ((\nabla \times \nabla \times B)(div\, B) \\ & \quad -2[(\nabla \times \nabla \times B) \cdot \nabla]B - (\nabla \times \nabla \times B) \times (\nabla \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L^2}| \leq \\ \leq \quad & C\|\Delta B\|_{L^2} \|\nabla B\|_{L^\infty} \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2} \leq \\ \leq \quad & \|\Delta B\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} (\|\nabla \times \Delta B\|_{L^2} + \|div\, \Delta B\|_{L^2})^{\frac{3}{2}} \leq \\ \leq \quad & \epsilon \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \epsilon \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2 + C\|\Delta B\|_{L^2}^6 . \end{aligned}$$

- The difference $B = h - b$ satisfies:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t B - \Delta B &=& \nabla \times (U \times B) + \nabla \times (U \times b) + \nabla \times (u \times B) \\ &-& \nabla \times ((\nabla \times B) \times B) - \nabla \times ((\nabla \times B) \times b) \\ &-& \nabla \times ((\nabla \times b) \times B) \end{array} \right.$$

- The parts that are in blue are those that came from the Hall term.
- We must multiply the equation by $\nabla \times \nabla \times \Delta B$, integrate and estimate each term.

$$\begin{array}{rl} & |\langle \nabla \times ((\nabla \times B) \times B), \nabla \times \nabla \times \Delta B\rangle_{L_2}| = \\ = & |\langle \nabla \times \nabla \times ((\nabla \times B) \times B), \nabla \times \Delta B\rangle_{L_2}| = \ldots \\ = & |\langle (\nabla \times \{(\nabla \times B)(div\, B) - 2[(\nabla \times B) \cdot \nabla]B\} + ((\nabla \times \nabla \times B)(div\, B) \\ & -2[(\nabla \times \nabla \times B) \cdot \nabla]B - (\nabla \times \nabla \times B) \times (\nabla \times B), \nabla \times \Delta B\rangle_{L^2}| \leq \\ \leq & C\|\Delta B\|_{L^2}\|\nabla B\|_{L^\infty}\|\nabla \times \Delta B\|_{L^2} \leq \\ \leq & \|\Delta B\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}(\|\nabla \times \Delta B\|_{L^2} + \|div\, \Delta B\|_{L^2})^{\frac{3}{2}} \leq \\ \leq & \epsilon\|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \epsilon\|div\, \Delta B\|_{L^2}^2 + C\|\Delta B\|_{L^2}^6. \end{array}$$

Stretch of the proof of lemma

- The difference $B = h - b$ satisfies:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial_t B - \Delta B & = & \nabla \times (U \times B) + \nabla \times (U \times b) + \nabla \times (u \times B) \\ & - & \nabla \times ((\nabla \times B) \times B) - \nabla \times ((\nabla \times B) \times b) \\ & - & \nabla \times ((\nabla \times b) \times B) \end{array} \right.$$

- The parts that are in blue are those that came from the Hall term.
- We must multiply the equation by $\nabla \times \nabla \times \Delta B$, integrate and estimate each term.

$$\begin{array}{cl} & |\langle \nabla \times ((\nabla \times B) \times B), \nabla \times \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \\ = & |\langle \nabla \times \nabla \times ((\nabla \times B) \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \ldots \\ = & |\langle (\nabla \times \{(\nabla \times B)(div\, B) - 2[(\nabla \times B) \cdot \nabla]B\} + ((\nabla \times \nabla \times B)(div\, B) \\ & \quad -2[(\nabla \times \nabla \times B) \cdot \nabla]B - (\nabla \times \nabla \times B) \times (\nabla \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L^2}| \leq \\ \leq & C \|\Delta B\|_{L^2} \|\nabla B\|_{L^\infty} \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2} \leq \\ \leq & \|\Delta B\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} (\|\nabla \times \Delta B\|_{L^2} + \|div\, \Delta B\|_{L^2})^{\frac{3}{2}} \leq \\ \leq & \epsilon \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \epsilon \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2 + C \|\Delta B\|_{L^2}^6 . \end{array}$$

Stretch of the proof of lemma

- The difference $B = h - b$ satisfies:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial_t B - \Delta B & = & \nabla \times (U \times B) + \nabla \times (U \times b) + \nabla \times (u \times B) \\ & - & \nabla \times ((\nabla \times B) \times B) - \nabla \times ((\nabla \times B) \times b) \\ & - & \nabla \times ((\nabla \times b) \times B) \end{array} \right.$$

- The parts that are in blue are those that came from the Hall term.
- We must multiply the equation by $\nabla \times \nabla \times \Delta B$, integrate and estimate each term.

$$\begin{array}{cl} & |\langle \nabla \times ((\nabla \times B) \times B), \nabla \times \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \\ = & |\langle \nabla \times \nabla \times ((\nabla \times B) \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \dots \\ = & |\langle (\nabla \times \{(\nabla \times B)(div\, B) - 2[(\nabla \times B) \cdot \nabla]B\} + ((\nabla \times \nabla \times B)(div\, B) \\ & \quad -2[(\nabla \times \nabla \times B) \cdot \nabla]B - (\nabla \times \nabla \times B) \times (\nabla \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L^2}| \leq \\ \leq & C \|\Delta B\|_{L^2} \|\nabla B\|_{L^\infty} \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2} \leq \\ \leq & \|\Delta B\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} (\|\nabla \times \Delta B\|_{L^2} + \|div\, \Delta B\|_{L^2})^{\frac{3}{2}} \leq \\ \leq & \epsilon \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \epsilon \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2 + C \|\Delta B\|_{L^2}^6. \end{array}$$

$$|\langle \nabla \times ((\nabla \times B) \times b), \nabla \times \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| \ldots$$

[illegible]

$$\leq \ldots$$ [illegible]

$$
\begin{aligned}
& |\langle \nabla \times ((\nabla \times b) \times B), \nabla \times \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \\
= \; & |\langle \nabla \times \nabla \times ((\nabla \times b) \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| \leq \ldots \leq \\
\leq \; & \epsilon \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \epsilon \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2 + C\|\Delta B\|_{L^2}^2 \|\Delta b\|_{L^2}^4 \\
& + C \left(\|\nabla B\|_{L^2}^2 + \|\Delta B\|_{L^2}^2 \right) \left(\|\nabla \times \Delta b\|_{L^2}^2 + \|div\, \Delta b\|_{L^2}^2 \right).
\end{aligned}
$$

Stretch of the proof of lemma

$$
\begin{aligned}
& |\langle \nabla \times ((\nabla \times B) \times b), \nabla \times \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| \\
= \quad & |\langle \nabla \times \nabla \times ((\nabla \times B) \times b), \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \ldots \\
\leq \quad & \epsilon \|\nabla \times \Delta B\|^2_{L^2} + \epsilon \|div\, \Delta B\|^2_{L^2} + C\|\Delta B\|^2_{L^2} \|\Delta b\|^4_{L^2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& |\langle \nabla \times ((\nabla \times b) \times B), \nabla \times \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \\
= \quad & |\langle \nabla \times \nabla \times ((\nabla \times b) \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| \leq \ldots \leq \\
\leq \quad & \epsilon \|\nabla \times \Delta B\|^2_{L^2} + \epsilon \|div\, \Delta B\|^2_{L^2} + C\|\Delta B\|^2_{L^2} \|\Delta b\|^4_{L^2} \\
& + C \left(\|\nabla B\|^2_{L^2} + \|\Delta B\|^2_{L^2} \right) \left(\|\nabla \times \Delta b\|^2_{L^2} + \|div\, \Delta b\|^2_{L^2} \right).
\end{aligned}
$$

Stretch of the proof of lemma

$$
\begin{aligned}
& |\langle \nabla \times ((\nabla \times B) \times b), \nabla \times \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| \\
= \; & |\langle \nabla \times \nabla \times ((\nabla \times B) \times b), \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \ldots \\
\leq \; & \epsilon \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \epsilon \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2 + C\|\Delta B\|_{L^2}^2 \|\Delta b\|_{L^2}^4 .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& |\langle \nabla \times ((\nabla \times b) \times B), \nabla \times \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \\
= \; & |\langle \nabla \times \nabla \times ((\nabla \times b) \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| \leq \ldots \leq \\
\leq \; & \epsilon \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \epsilon \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2 + C\|\Delta B\|_{L^2}^2 \|\Delta b\|_{L^2}^4 \\
& + C \left(\|\nabla B\|_{L^2}^2 + \|\Delta B\|_{L^2}^2 \right) \left(\|\nabla \times \Delta b\|_{L^2}^2 + \|div\, \Delta b\|_{L^2}^2 \right) .
\end{aligned}
$$

Stretch of the proof of lemma

$$
\begin{aligned}
& \left|\langle \nabla \times ((\nabla \times B) \times b), \nabla \times \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}\right| \\
= \; & \left|\langle \nabla \times \nabla \times ((\nabla \times B) \times b), \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}\right| = \ldots \\
\leq \; & \epsilon \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \epsilon \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2 + C\|\Delta B\|_{L^2}^2 \|\Delta b\|_{L^2}^4 .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \left|\langle \nabla \times ((\nabla \times b) \times B), \nabla \times \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}\right| = \\
= \; & \left|\langle \nabla \times \nabla \times ((\nabla \times b) \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}\right| \leq \ldots \leq \\
\leq \; & \epsilon \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \epsilon \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2 + C\|\Delta B\|_{L^2}^2 \|\Delta b\|_{L^2}^4 \\
& + C\left(\|\nabla B\|_{L^2}^2 + \|\Delta B\|_{L^2}^2\right)\left(\|\nabla \times \Delta b\|_{L^2}^2 + \|div\, \Delta b\|_{L^2}^2\right) .
\end{aligned}
$$

Stretch of the proof of lemma

$$
\begin{aligned}
& |\langle \nabla \times ((\nabla \times B) \times b), \nabla \times \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| \\
= \; & |\langle \nabla \times \nabla \times ((\nabla \times B) \times b), \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \ldots \\
\leq \; & \epsilon \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \epsilon \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2 + C\|\Delta B\|_{L^2}^2 \|\Delta b\|_{L^2}^4 .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& |\langle \nabla \times ((\nabla \times b) \times B), \nabla \times \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \\
= \; & |\langle \nabla \times \nabla \times ((\nabla \times b) \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| \leq \ldots \leq \\
\leq \; & \epsilon \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \epsilon \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2 + C\|\Delta B\|_{L^2}^2 \|\Delta b\|_{L^2}^4 \\
& + C \left(\|\nabla B\|_{L^2}^2 + \|\Delta B\|_{L^2}^2 \right) \left(\|\nabla \times \Delta b\|_{L^2}^2 + \|div\, \Delta b\|_{L^2}^2 \right) .
\end{aligned}
$$

Stretch of the proof of lemma

$$
\begin{aligned}
& |\langle \nabla \times ((\nabla \times B) \times b), \nabla \times \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| \\
= \; & |\langle \nabla \times \nabla \times ((\nabla \times B) \times b), \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \ldots \\
\leq \; & \epsilon \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \epsilon \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2 + C \|\Delta B\|_{L^2}^2 \|\Delta b\|_{L^2}^4 .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& |\langle \nabla \times ((\nabla \times b) \times B), \nabla \times \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \\
= \; & |\langle \nabla \times \nabla \times ((\nabla \times b) \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| \leq \ldots \leq \\
\leq \; & \epsilon \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \epsilon \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2 + C \|\Delta B\|_{L^2}^2 \|\Delta b\|_{L^2}^4 \\
& + C \left(\|\nabla B\|_{L^2}^2 + \|\Delta B\|_{L^2}^2 \right) \left(\|\nabla \times \Delta b\|_{L^2}^2 + \|div\, \Delta b\|_{L^2}^2 \right) .
\end{aligned}
$$

Stretch of the proof of lemma

$$
\begin{aligned}
& |\langle \nabla \times ((\nabla \times B) \times b), \nabla \times \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| \\
= \quad & |\langle \nabla \times \nabla \times ((\nabla \times B) \times b), \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \ldots \\
\leq \quad & \epsilon \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \epsilon \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2 + C \|\Delta B\|_{L^2}^2 \|\Delta b\|_{L^2}^4 .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& |\langle \nabla \times ((\nabla \times b) \times B), \nabla \times \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| = \\
= \quad & |\langle \nabla \times \nabla \times ((\nabla \times b) \times B), \nabla \times \Delta B \rangle_{L_2}| \leq \ldots \leq \\
\leq \quad & \epsilon \|\nabla \times \Delta B\|_{L^2}^2 + \epsilon \|div\, \Delta B\|_{L^2}^2 + C \|\Delta B\|_{L^2}^2 \|\Delta b\|_{L^2}^4 \\
& + C \left(\|\nabla B\|_{L^2}^2 + \|\Delta B\|_{L^2}^2 \right) \left(\|\nabla \times \Delta b\|_{L^2}^2 + \|div\, \Delta b\|_{L^2}^2 \right) .
\end{aligned}
$$

- In [4] a similar stability result was obtained to the Navier-Stokes, with the criterion

$$\int_0^\infty \|\nabla u(s)\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds < \infty. \tag{11}$$

  - There are symmetric global solutions of N.S. that satisfy (11).
  - Then the Theorem of stability was applied to these symmetric solutions and, in fact, it was possible to obtain a class of 3D almost large strong solutions for N.S.

Corollary

[4] Ponce G., Racke R., Sideris T.C. & Titi E., *Global Stability of Large Solutions to the 3D Navier-Stokes Equations*, Comm. Math. Phys. 159 (1994), 329-341.

- In [4] a similar stability result was obtained to the Navier-Stokes, with the criterion

$$\int_0^\infty \|\nabla u(s)\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds < \infty. \tag{11}$$

  - There are symmetric global solutions of N.S. that satisfy (11).
  - Then, the Theorem of stability was applied to these symmetric solutions, and, in fact, it was possible to obtain a class of 3D global large strong solutions for N.S.

Corollary

[4] Ponce G., Racke R., Sideris T.C. & Titi E., *Global Stability of Large Solutions to the 3D Navier-Stokes Equations* , Comm. Math. Phys. 159 (1994), 329-341.

- In [4] a similar stability result was obtained to the Navier-Stokes, with the criterion

$$\int_0^\infty \|\nabla u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^4 ds < \infty. \tag{11}$$

  - There are symmetric global solutions of N.S. that satisfy (11).
  - Then, the Theorem of stability was applied to these symmetric solutions, and, in fact, it was possible to obtain a class of 3D global large strong solutions for N.S.

Corollary

[4] Ponce G., Racke R., Sideris T.C. & Titi E., *Global Stability of Large Solutions to the 3D Navier-Stokes Equations* , Comm. Math. Phys. 159 (1994), 329-341.

- In [4] a similar stability result was obtained to the Navier-Stokes, with the criterion

$$\int_0^\infty \|\nabla u(s)\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds < \infty. \tag{11}$$

  - There are symmetric global solutions of N.S. that satisfy (11).
  - Then, the Theorem of stability was applied to these symmetric solutions, and, in fact, it was possible to obtain a class of 3D global large strong solutions for N.S.

Corollary

- *If u is as in the Theorem, we have that $(u, b) = (u, 0)$ is a global strong solution for Hall-MHD and verifies previous criterion:*

$$\int_0^\infty \left(\|\nabla u\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Delta b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right) dt < \infty.$$

- *If (v, h) is a local-in-time strong solution for Hall-MHD such that v_0 is close to u_0 and h_0 is small enough, then (v, h) is also a global strong solution.*

[4] Ponce G., Racke R., Sideris T.C. & Titi E., *Global Stability of Large Solutions to the 3D Navier-Stokes Equations* , Comm. Math. Phys. 159 (1994), 329-341.

- In [4] a similar stability result was obtained to the Navier-Stokes, with the criterion

$$\int_0^\infty \|\nabla u(s)\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds < \infty. \tag{11}$$

  - There are symmetric global solutions of N.S. that satisfy (11).
  - Then, the Theorem of stability was applied to these symmetric solutions, and, in fact, it was possible to obtain a class of 3D global large strong solutions for N.S.

Corollary

- *If u is as in the Theorem, we have that $(u, b) \equiv (u, 0)$ is a global strong solution for Hall-MHD and verifies previous criterion:*

$$\int_0^\infty \left(\|\nabla u\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Delta b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) dt < \infty.$$

- *If (v, h) is a local-in-time strong solution for Hall-MHD such that v_0 is close to u_0 and h_0 is small enough, then (v, h) is also a global strong solution.*

[4] Ponce G., Racke R., Sideris T.C. & Titi E., *Global Stability of Large Solutions to the 3D Navier-Stokes Equations* , Comm. Math. Phys. 159 (1994), 329-341.

- In [4] a similar stability result was obtained to the Navier-Stokes, with the criterion

$$\int_0^\infty \|\nabla u(s)\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds < \infty. \tag{11}$$

  - There are symmetric global solutions of N.S. that satisfy (11).
  - Then, the Theorem of stability was applied to these symmetric solutions, and, in fact, it was possible to obtain a class of 3D global large strong solutions for N.S.

Corollary

- *If u is as in the Theorem, we have that $(u, b) \equiv (u, 0)$ is a global strong solution for Hall-MHD and verifies previous criterion:*

$$\int_0^\infty \left(\|\nabla u\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Delta b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) dt < \infty.$$

- *If (v, h) is a local-in-time strong solution for Hall-MHD such that v_0 is close to u_0 and h_0 is small enough, then (v, h) is also a global strong solution.*

[4] Ponce G., Racke R., Sideris T.C. & Titi E., *Global Stability of Large Solutions to the 3D Navier-Stokes Equations*, Comm. Math. Phys. 159 (1994), 329-341.

- In [4] a similar stability result was obtained to the Navier-Stokes, with the criterion

$$\int_0^\infty \|\nabla u(s)\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds < \infty. \tag{11}$$

  - There are symmetric global solutions of N.S. that satisfy (11).
  - Then, the Theorem of stability was applied to these symmetric solutions, and, in fact, it was possible to obtain a class of 3D global large strong solutions for N.S.

Corollary

- *If u is as in the Theorem, we have that $(u, b) \equiv (u, 0)$ is a global strong solution for Hall-MHD and verifies previous criterion:*

$$\int_0^\infty \left(\|\nabla u\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Delta b\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) dt < \infty.$$

- *If (v, h) is a local-in-time strong solution for Hall-MHD such that v_0 is close to u_0 and h_0 is small enough, then (v, h) is also a global strong solution.*

---

[4] PONCE G., RACKE R., SIDERIS T.C. & TITI E., *Global Stability of Large Solutions to the 3D Navier-Stokes Equations* , Comm. Math. Phys. 159 (1994), 329-341.

Thank you very much!