

Dynamics of stochastic Bratteli diagrams

Danilo Antonio Caprio (UNESP-IBILCE)

(Apoio FAPESP nº 2015/26161-6)

Trabalho em colaboração com Ali Messaoudi

25 de novembro de 2016

Conjuntos de Julia

$X = \mathbb{C}^d$, $d \geq 1$ e $f : X \rightarrow X$ função polinomial de grau $k \geq 2$.

Conjuntos de Julia

$X = \mathbb{C}^d$, $d \geq 1$ e $f : X \rightarrow X$ função polinomial de grau $k \geq 2$.

Conjunto de Julia: $K(f) := \{z \in \mathbb{C}^d : (f^n(z))_{n \geq 0} \text{ é limitada}\}$

Conjuntos de Julia

$X = \mathbb{C}^d$, $d \geq 1$ e $f : X \rightarrow X$ função polinomial de grau $k \geq 2$.

Conjunto de Julia: $K(f) := \{z \in \mathbb{C}^d : (f^n(z))_{n \geq 0} \text{ é limitada}\}$

Gaston Julia (1915): caso $d = 1$.

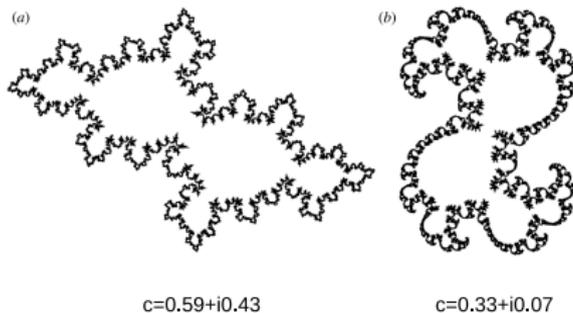
Conjuntos de Julia

$X = \mathbb{C}^d$, $d \geq 1$ e $f : X \rightarrow X$ função polinomial de grau $k \geq 2$.

Conjunto de Julia: $K(f) := \{z \in \mathbb{C}^d : (f^n(z))_{n \geq 0} \text{ é limitada}\}$

Gaston Julia (1915): caso $d = 1$.

Exemplo: $f(z) = z^2 + c$, onde $c \in \mathbb{C}$.

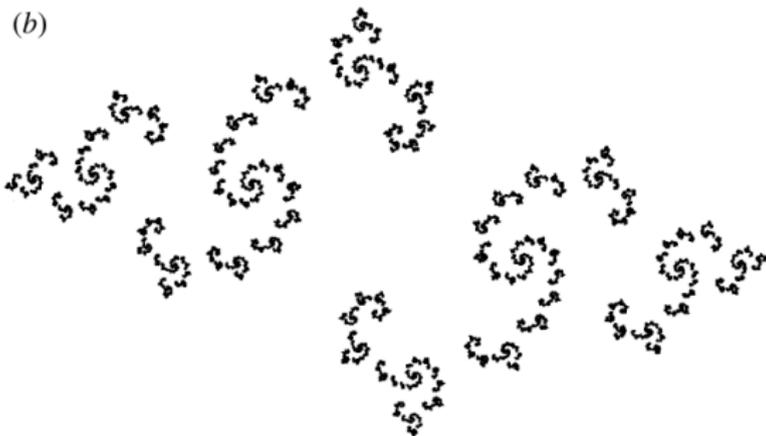


Conjuntos de Julia

Exemplo: $f(z) = z^2 + c$, onde $c \in \mathbb{C}$.



$c = 0.38 + i0.22$



$c = -0.82 + i0.33$

Máquina de Somar Estocástica em base 2

Máquinas de somar estocásticas foi definida por Killeen e Taylor em 2000.

Máquina de Somar Estocástica em base 2

Máquinas de somar estocásticas foi definida por Killeen e Taylor em 2000.

Considere $N \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Então podemos escrever N em base 2 de forma única como $N = \varepsilon_{k(N)} \dots \varepsilon_1 \varepsilon_0_2$, onde

$$N = \sum_{i=0}^{k(N)} \varepsilon_i(N) 2^i, \text{ com } \varepsilon_i(N) = 0, 1.$$

Máquina de Somar Estocástica em base 2

Máquinas de somar estocásticas foi definida por Killeen e Taylor em 2000.

Considere $N \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Então podemos escrever N em base 2 de forma única como $N = \varepsilon_{k(N)} \dots \varepsilon_1 \varepsilon_0_2$, onde

$$N = \sum_{i=0}^{k(N)} \varepsilon_i(N) 2^i, \text{ com } \varepsilon_i(N) = 0, 1.$$

Exemplo: $6 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 110_2$.

Máquina de Somar Estocástica em base 2

Dado $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_1 \varepsilon_0 \in \mathbb{N}$, escrito em base 2, como podemos calcular os dígitos de $N + 1$ em base 2?

Se $\varepsilon_0 = 0$, temos:

$$\begin{array}{r|l} N = & \varepsilon_k \quad \dots \quad \varepsilon_1 \quad 0 \\ & + \quad \quad \quad \quad 1 \\ \hline N + 1 = & \end{array}$$

Máquina de Somar Estocástica em base 2

Dado $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_1 \varepsilon_0 \in \mathbb{N}$, escrito em base 2, como podemos calcular os dígitos de $N + 1$ em base 2?

Se $\varepsilon_0 = 0$, temos:

$$\begin{array}{r|l} N = & \varepsilon_k \quad \dots \quad \varepsilon_1 \quad 0 \\ & + \quad \quad \quad \quad 1 \\ \hline N + 1 = & \quad \quad \quad \quad 1 \end{array}$$

Máquina de Somar Estocástica em base 2

Dado $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_1 \varepsilon_0 \in \mathbb{N}$, escrito em base 2, como podemos calcular os dígitos de $N + 1$ em base 2?

Se $\varepsilon_0 = 0$, temos:

$$\begin{array}{r|l} N = & \varepsilon_k \quad \dots \quad \varepsilon_1 \quad 0 \\ & + \quad \quad \quad \quad 1 \\ \hline N + 1 = & \varepsilon_k \quad \dots \quad \varepsilon_1 \quad 1 \end{array}$$

Máquina de Somar Estocástica em base 2

Se $\varepsilon_{i-1} \dots \varepsilon_0 = 1 \dots 1$ e $\varepsilon_i = 0$, temos:

$$\begin{array}{r|cccccccc} N = & \varepsilon_k & \dots & \varepsilon_{i+1} & {}^10 & {}^11 & \dots & {}^11 & 1 \\ & & & & & & & & 1 \\ + & & & & & & & & \\ \hline N + 1 = & \varepsilon_k & \dots & \varepsilon_{i+1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}$$

Máquina de Somar Estocástica em base 2

Exemplo Seja $N = 5 = 101_2$. Então

$$\begin{array}{r|l} 5 = & 1 \quad 0 \quad 1 \\ & + 1 \\ \hline 6 = & 1 \quad 1 \quad 0 \end{array}$$

Máquina de Somar Estocástica em base 2

Exemplo Seja $N = 5 = 101_2$. Então

$$\begin{array}{r|l}
 5 = & 1 \quad {}^10 \quad {}^11 \\
 & \phantom{{}^10} \quad +1 \\
 \hline
 6 = & 1 \quad 1 \quad 0
 \end{array}$$

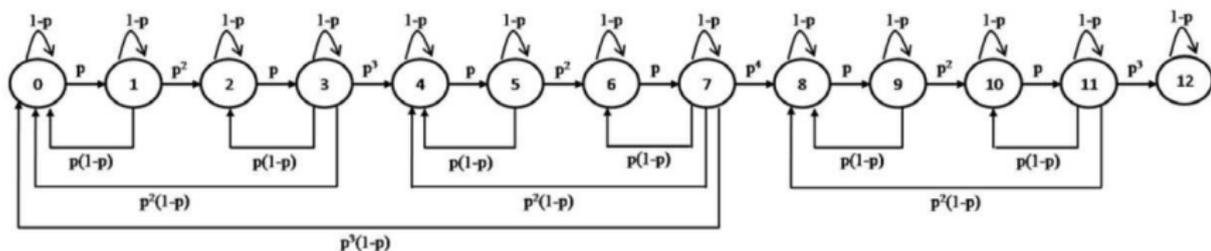
$$\begin{array}{r|l}
 & \phantom{{}^01} \quad 1-p \\
 \hline
 5 = & 1 \quad 0 \quad {}^01 \\
 & \phantom{{}^01} \quad +1 \\
 \hline
 5 = & 1 \quad 0 \quad 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & \phantom{{}^11} \quad 1-p \quad p \\
 \hline
 5 = & 1 \quad {}^00 \quad {}^11 \\
 & \phantom{{}^00} \quad \phantom{{}^11} \quad +1 \\
 \hline
 4 = & 1 \quad 0 \quad 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & \phantom{{}^11} \quad p \quad p \\
 \hline
 5 = & 1 \quad {}^10 \quad {}^11 \\
 & \phantom{{}^10} \quad \phantom{{}^11} \quad +1 \\
 \hline
 6 = & 1 \quad 1 \quad 0
 \end{array}$$

Máquina de Somar Estocástica em base 2

Grafo de transição da máquina de somar estocástica em base 2:



Máquina de Somar Estocástica em base 2

Operador de transição S da máquina de somar estocástica em base 2:

$$S = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & \dots \\ p(1-p) & 1-p & p^2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1-p & p & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

onde s_{ij} é a probabilidade de transição do estado i para o estado j .

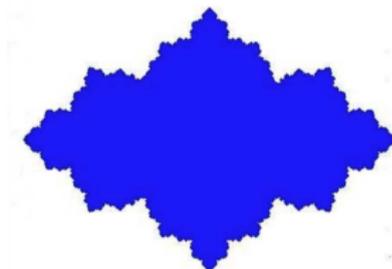
Teorema:(Killeen, Taylor)(2000)

$$\sigma_{pt}(S) = \sigma(S) = \{z \in \mathbb{C} : (f^n(z))_{n \geq 0} \text{ é limitada}\}, \text{ onde}$$
$$f(z) = \left(\frac{z-(1-p)}{p}\right)^2.$$

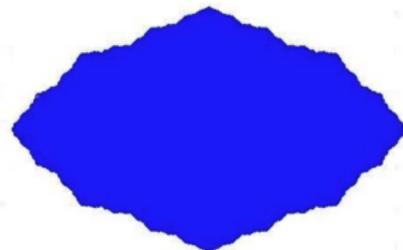
Teorema:(Killeen, Taylor)(2000) Para $0 < p < 1$, a cadeia de Markov é irredutível, periódica de período 2 e nula recorrente.

Máquina de Somar Estocástica em base 2

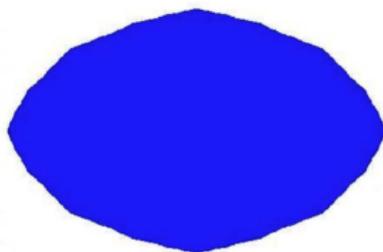
$$\sigma_{pt}(S) = \sigma(S) = J_c(f); f(z) = \left(\frac{z - (1-p)}{p} \right)^2$$



p=0.7



p=0.8



p=0.9

Máquina de Somar Estocástica em base de Fibonacci

Considere a base de Fibonacci: $F_0 = 1$, $F_1 = 2$ e

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$. Daí $F_0 = 1$, $F_1 = 2$, $F_2 = 3$, $F_3 = 5$,
 $F_4 = 8$, $F_5 = 13$, $F_6 = 21$, $F_7 = 34$, ...

Considere $N \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Então, utilizando o algoritmo fominha, podemos escrever N em base de Fibonacci de forma única como $N = \varepsilon_{k(N)} \dots \varepsilon_1 \varepsilon_0 F$, onde $N = \sum_{i=0}^{k(N)} \varepsilon_i(N) F_i$, com $\varepsilon_i(N) = 0, 1$ e $\varepsilon_{i+1} \varepsilon_i \neq 11$.

Máquina de Somar Estocástica em base de Fibonacci

Considere a base de Fibonacci: $F_0 = 1$, $F_1 = 2$ e

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$. Daí $F_0 = 1$, $F_1 = 2$, $F_2 = 3$, $F_3 = 5$,
 $F_4 = 8$, $F_5 = 13$, $F_6 = 21$, $F_7 = 34$, ...

Considere $N \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Então, utilizando o algoritmo fominha, podemos escrever N em base de Fibonacci de forma única como $N = \varepsilon_{k(N)} \dots \varepsilon_1 \varepsilon_0$, onde $N = \sum_{i=0}^{k(N)} \varepsilon_i(N) F_i$, com $\varepsilon_i(N) = 0, 1$ e $\varepsilon_{i+1} \varepsilon_i \neq 11$.

Exemplo: $N = 28 = 21 + 5 + 2 = F_6 + F_3 + F_1 = 1001010$.

Máquina de Somar Estocástica em base de Fibonacci

Seja $N \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon_k \dots \varepsilon_0$ a sua representação em base de Fibonacci. Então temos as seguintes possibilidades:

1) $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_2 00$;

2) $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_j 0010 \dots 10$ for some $j \geq 4$;

3) $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_2 001$;

4) $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_j 0010 \dots 101$ for some $j \geq 5$.

Máquina de Somar Estocástica em base de Fibonacci

Daí, o processo de adicionar 1 a um número $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_0$ escrito em base de Fibonacci é dado pelo seguinte:

Caso 1)

$$\begin{array}{r|l} N = & \varepsilon_k \dots \varepsilon_2 \quad 100 \\ & \quad +1 \\ \hline N + 1 = & \varepsilon_k \dots \varepsilon_2 \quad 01 \end{array}$$

Caso 2)

$$\begin{array}{r|l} N = & \varepsilon_k \dots \varepsilon_j \quad 100 \quad 110 \quad \dots \quad 110 \quad 110 \\ & \quad +1 \\ \hline N + 1 = & \varepsilon_k \dots \varepsilon_j \quad 01 \quad 00 \quad \dots \quad 00 \quad 00 \end{array}$$

Máquina de Somar Estocástica em base de Fibonacci

Daí, o processo de adicionar 1 a um número $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_0$ escrito em base de Fibonacci é dado pelo seguinte:

Caso 3)

$$\begin{array}{r|l} N = & \varepsilon_k \dots \varepsilon_2 \quad {}^100 \quad {}^11 \\ & \\ \hline N + 1 = & \varepsilon_k \dots \varepsilon_2 \quad 01 \quad 0 \end{array}$$

Caso 4)

$$\begin{array}{r|l} N = & \varepsilon_k \dots \varepsilon_j \quad {}^100 \quad {}^110 \quad \dots \quad {}^110 \quad {}^11 \\ & \\ \hline N + 1 = & \varepsilon_k \dots \varepsilon_j \quad 01 \quad 00 \quad \dots \quad 00 \quad 0 \end{array}$$

Exemplo Seja $N = 28 = 1001010$.

Exemplo Seja $N = 28 = 1001010$.

$$\begin{array}{r|cccc} N = & 1 & {}^100 & {}^110 & {}^110 \\ & & & & +1 \\ \hline N + 1 = & 1 & 01 & 00 & 00 \end{array}$$

Máquina de Somar Estocástica em base de Fibonacci

Considere $(p_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de probabilidades e $\varepsilon_k \dots \varepsilon_0$ a representação em base de Fibonacci de algum inteiro não negativo N .

Iremos definir a máquina de somar estocástica em base de Fibonacci da seguinte maneira: o primeiro “carry” 1 acontece com probabilidade p_1 e não acontece com probabilidade $1 - p_1$, ou seja, o primeiro “carry” será 0 com probabilidade $1 - p_1$. Continuando desta maneira, o n -ésimo “carry” será 1 com probabilidade p_n e será 0 com probabilidade $1 - p_n$.

Máquina de Somar Estocástica em base de Fibonacci

Exemplo Seja $N = 28 = 1001010$. Então

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 - p_1 \\
 \hline
 28 = & 1 \ 00 \ 10 \ 0^10 \\
 & +1 \\
 \hline
 28 = & 1 \ 00 \ 10 \ 10
 \end{array}$$

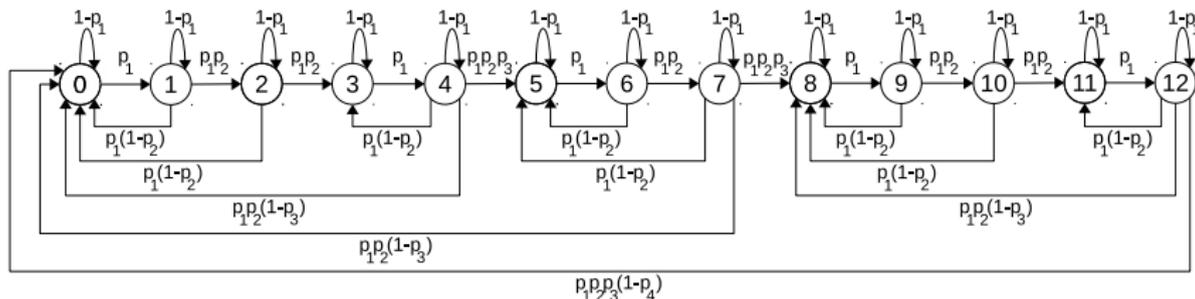
$$\begin{array}{r|l}
 & 1 - p_2 \quad p_1 \\
 \hline
 28 = & 1 \ 00 \ 0^10 \ 1^10 \\
 & +1 \\
 \hline
 26 = & 1 \ 00 \ 10 \ 00
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 - p_3 \quad p_2 \quad p_1 \\
 \hline
 28 = & 1 \ 0^00 \ 1^10 \ 1^10 \\
 & +1 \\
 \hline
 21 = & 1 \ 00 \ 00 \ 00
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & p_3 \quad p_2 \quad p_1 \\
 \hline
 28 = & 1 \ 1^00 \ 1^10 \ 1^10 \\
 & +1 \\
 \hline
 29 = & 1 \ 01 \ 00 \ 00
 \end{array}$$

Máquina de Somar Estocástica em base de Fibonacci

Grafo de transição da máquina de somar estocástica em base de Fibonacci:



Máquina de Somar Estocástica em base de Fibonacci

$$\begin{pmatrix} 1 - p_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p_1(1 - p_2) & 1 - p_1 & p_1p_2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p_1(1 - p_2) & 0 & 1 - p_1 & p_1p_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 - p_1 & p_1 & 0 & \dots \\ p_1p_2(1 - p_3) & 0 & 0 & p_1(1 - p_2) & 1 - p_1 & p_1p_2p_3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - p_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1(1 - p_2) & \dots \\ p_1p_2(1 - p_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1(1 - p_2) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Teorema(Messaoudi,Smania)(2009) Em $l^\infty(\mathbb{N})$, temos

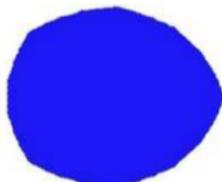
$\sigma_{pt}(S) \subset E = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda_1, \lambda) \in J_c(f)\}$, onde $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ é definida por $f(x, y) = \left(\frac{1}{p^2}(x - 1 + p)(y - 1 + p), x\right)$ e $\lambda_1 = 1 - p + \frac{(1-\lambda-p)^2}{p}$.

Máquina de Somar Estocástica em base de Fibonacci

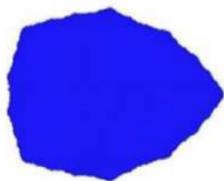
$$\sigma_{pt}(S) \subset E = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda_1, \lambda) \in J_c(f)\}, \lambda_1 = 1 - p + \frac{(1-\lambda-p)^2}{p} e$$
$$f(x, y) = \left(\frac{1}{p^2}(x-1+p)(y-1+p), x \right)$$



$p=1$



$p=0.9$



$p=0.8$



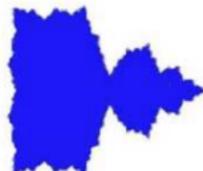
$p=0.7$

Máquina de Somar Estocástica em base de Fibonacci

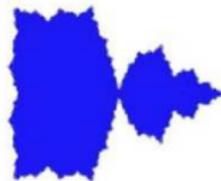
$$\sigma_{pt}(S) \subset E = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda_1, \lambda) \in J_c(f)\}, \quad \lambda_1 = 1 - p + \frac{(1-\lambda-p)^2}{p} \text{ e}$$
$$f(x, y) = \left(\frac{1}{p^2}(x-1+p)(y-1+p), x \right)$$



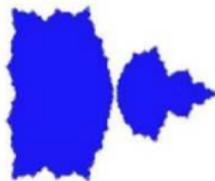
$p = 0.64$



$p = 0.63$



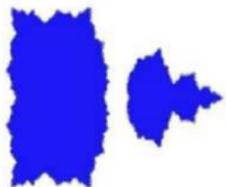
$p = 0.6305$



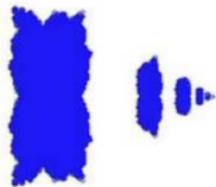
$p = 0.6301$

Máquina de Somar Estocástica em base de Fibonacci

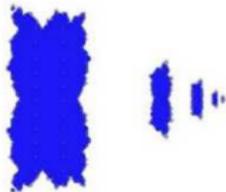
$$\sigma_{pt}(S) \subset E = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda_1, \lambda) \in J_c(f)\}, \lambda_1 = 1 - p + \frac{(1-\lambda-p)^2}{p} \text{ e}$$
$$f(x, y) = \left(\frac{1}{p^2}(x-1+p)(y-1+p), x \right)$$



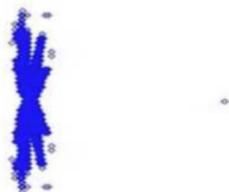
$p = 0.625$



$p = 0.6$



$p = 0.58$



$p = 0.5$

Definição

Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, seja $(q_n(\lambda))_{n \geq 1} = (q_n)_{n \geq 1}$ uma seqüência definida por $q_N = q_{F_0}^{\varepsilon_0} \dots q_{F_k}^{\varepsilon_k}$, onde $N = \sum_{i=0}^k \varepsilon_i F_i$, $q_{F_0} = \frac{\lambda - (1 - p_1)}{p_1}$, $q_{F_1} = \frac{1}{p_2} q_{F_0}^2 - \left(\frac{1}{p_2} - 1\right)$ e $q_{F_n} = \frac{1}{r_n} q_{F_{n-1}} q_{F_{n-2}} - \left(\frac{1}{r_n} - 1\right)$, $\forall n \geq 2$, onde $r_n = p_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1}$, $\forall n \geq 1$.

Teorema

$\sigma_{pt}(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (q_n)_{n \geq 1} \text{ é limitada}\} \subset E \subset \sigma(S)$, onde $E := \{\lambda \in \mathbb{C} : (q_{F_n})_{n \geq 0} \text{ é limitada}\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\psi_n(q_{F_1}, q_{F_0}))_{n \geq 2} \text{ é limitada}\}$, $\psi_n = g_n \circ \dots \circ g_2$ e $g_n : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ é definido por $g_n(x, y) = \left(\frac{1}{r_n} xy - \left(\frac{1}{r_n} - 1\right), x\right)$, $\forall n \geq 2$.

Propriedades espectrais

Ideia da prova: 1) $\sigma_{pt}(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (q_n)_{n \geq 1} \text{ é limitada}\}$.

De fato, sejam $\lambda \in \sigma_{pt}(S)$ e $v \in l^\infty(\mathbb{N})$ tal que $(S - \lambda I)v = 0$.

Como S é auto similar, segue que $v_n = q_n v_0, \forall n \geq 1$. Logo $(q_n)_{n \geq 1}$ é limitada.

2) $E = \{\lambda \in \mathbb{C} : (q_{F_n})_{n \geq 0} \text{ é limitada}\} \subset \sigma(S)$.

De fato, seja $\lambda \in E$. Se $\lambda \in \sigma_{pt}(S)$, acabou. Suponha $\lambda \notin \sigma_{pt}(S)$ e, para cada $k \geq 2$, sejam $w^{(k)} = (1, q_1(\lambda), \dots, q_k(\lambda), 0, 0, \dots)$ e $u^{(k)} = \frac{w^{(k)}}{\|w^{(k)}\|_\infty}$. Então $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(S - \lambda I)u^{(F_n)}\| = 0$ e, portando, $\lambda \in \sigma_a(S) \subset \sigma(S)$.



Conjectura

1) $E = \sigma(S)$;

2) existe $0 < \delta < 1$ tal que se $p_i > \delta, \forall i \geq 1$, então $\sigma_{pt}(S) = E$.

Teorema

Se $\liminf_{i \rightarrow \infty} p_i > 0$ então E é compacto e $\mathbb{C} \setminus E$ é conexo.

Ideia da prova: $E = \{z \in \mathbb{C} : (q_{F_n}(z))_{n \geq 0} \text{ é limitada}\}$, onde

$$q_{F_0}(z) = z, \quad q_{F_1}(z) = \frac{1}{r_1}z^2 - \left(\frac{1}{r_1} - 1\right) \text{ e}$$

$$q_{F_n}(z) = \frac{1}{r_n}q_{F_{n-1}}(z)q_{F_{n-2}}(z) - \left(\frac{1}{r_n} - 1\right), \quad \forall n \geq 2. \text{ Temos que}$$

existe $R > 1$ tal que $E = \bigcap_{n=0}^{+\infty} q_{F_n}^{-1} \overline{D(0, R)}$. Logo E é compacto e

$\mathbb{C} \setminus E = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathbb{C} \setminus q_{F_n}^{-1} \overline{D(0, R)}$. Pelo teorema do módulo máximo

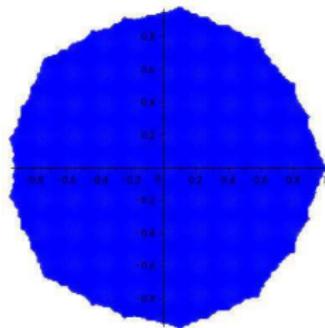
$\mathbb{C} \setminus q_{F_n}^{-1} \overline{D(0, R)}$ é conexo, $\forall n \geq 0$. Como $\mathbb{C} \setminus q_{F_n}^{-1} \overline{D(0, R)}$ contém uma vizinhança no infinito, $\forall n \geq 0$, segue que $\mathbb{C} \setminus E$ é conexo.

Conjectura

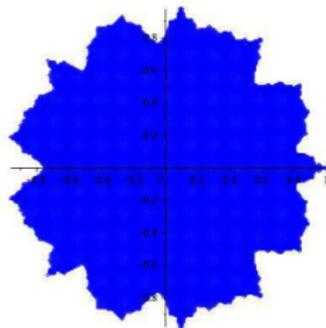
Existe $0 < \delta < 1$ tal que se $p_i > \delta, \forall i \geq 1$, então E é conexo.

Essa conjectura é motivada pelo fato que quando $p \rightarrow 1$ (no caso $p_i = p, \forall i$), então E é quase-disco (Bonnot, Abdalaoui, Messaoudi, Sester).

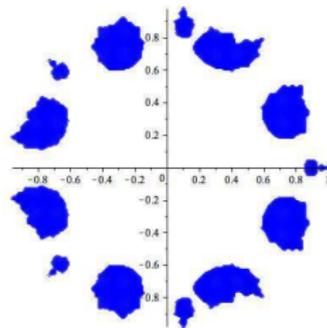
Conjunto $E := \{\lambda \in \mathbb{C} : (q_{F_n})_{n \geq 0} \text{ é limitada}\}$



01)



02)



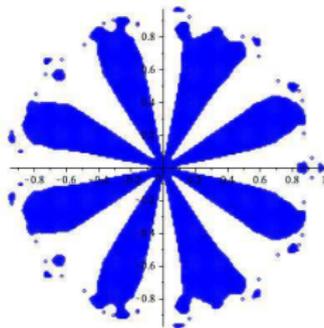
03)

Figura: 01) $p_1 = 1, p_2 = 0,999, p_3 = 0,909, p_4 = 0,833, p_5 = 0,769, p_6 = 0,714, p_7 = 0,666, p_8 = 0,625, p_9 = 0,588, p_{10} = 0,555, p_{11} = 0,526, p_i = 1, \text{ for all } i \in \{12, \dots, 17\}.$

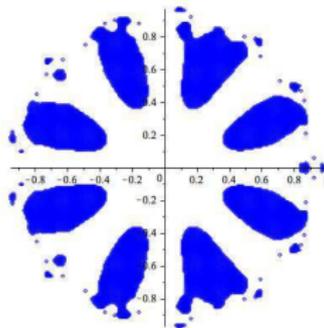
02) $p_1 = 1, p_2 = 0,999, p_3 = 1, p_4 = 0,625, p_5 = 0,588, p_6 = 0,625, p_7 = 0,666, p_8 = 0,714, p_9 = 0,769, p_{10} = 0,833, p_{11} = 0,909, p_i = 1, \text{ for all } i \in \{12, \dots, 17\}.$

03) $p_1 = 1, p_2 = 0,999, p_3 = 1, p_4 = 0,588, p_5 = 0,588, p_6 = 0,625, p_7 = 0,666, p_8 = 0,714, p_9 = 0,769, p_{10} = 0,833, p_{11} = 0,909, p_i = 1, \text{ for all } i \in \{12, \dots, 17\}.$

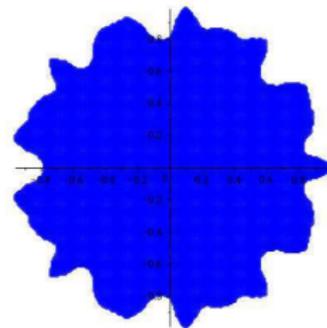
Conjunto $E := \{\lambda \in \mathbb{C} : (q_{F_n})_{n \geq 0} \text{ é limitada}\}$



04)



05)



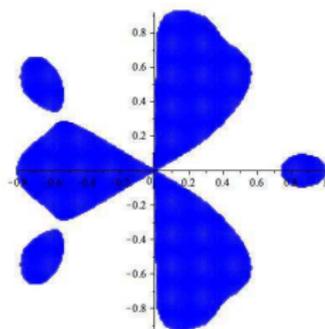
06)

Figura: 04) $p_1 = 1, p_2 = 0,999, p_3 = 1, p_4 = 0,625, p_5 = 0,714, p_6 = 0,403637066, p_7 = 0,833, p_8 = 0,833, p_9 = 909, p_i = 1, \text{ for all } i \in \{10, \dots, 17\}$.

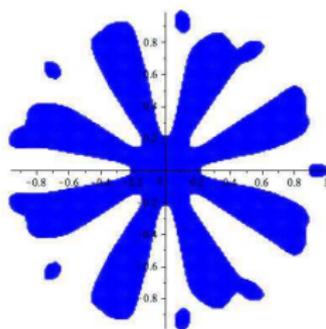
05) $p_1 = 1, p_2 = 0,999, p_3 = 1, p_4 = 0,625, p_5 = 0,714, p_6 = 0,403, p_7 = 0,833, p_8 = 0,833, p_9 = 909, p_i = 1, \text{ for all } i \in \{10, \dots, 17\}$.

06) $p_1 = 1, p_2 = 0,999, p_3 = 1, p_4 = 0,588, p_5 = 0,769, p_6 = 0,833, p_7 = 0,909, p_8 = 0,833, p_i = 1, \text{ for all } i \in \{9, \dots, 17\}$.

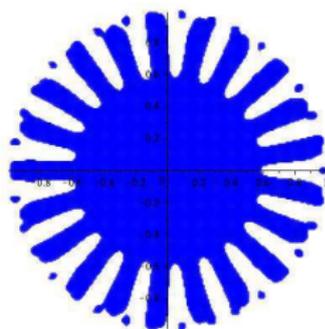
Conjunto $E := \{\lambda \in \mathbb{C} : (q_{F_n})_{n \geq 0} \text{ é limitada}\}$



07)



08)



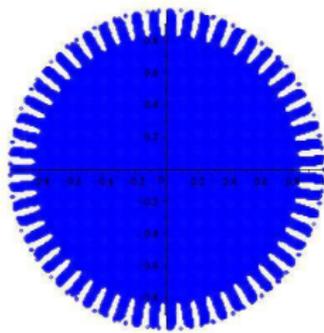
09)

Figura: 07) $p_1 = 1, p_2 = 0, 999, p_3 = 0, 5, p_i = 1, \text{ for all } i \in \{4, \dots, 17\}$.

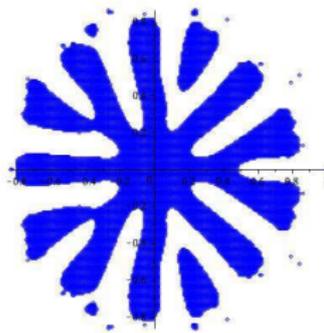
08) $p_1 = 1, p_2 = 0, 999, p_3 = 1, p_4 = 0, 5, p_i = 1, \text{ for all } i \in \{5, \dots, 17\}$.

09) $p_1 = 1, p_2 = 0, 999, p_3 = 1, p_4 = 1, p_5 = 0, 5, p_i = 1, \text{ for all } i \in \{6, \dots, 17\}$.

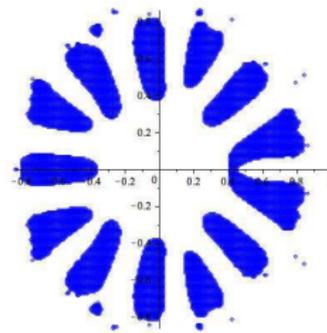
Conjunto $E := \{\lambda \in \mathbb{C} : (q_{F_n})_{n \geq 0} \text{ é limitada}\}$



10)



11)



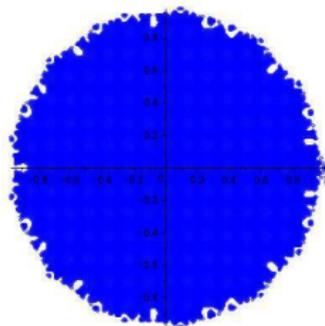
12)

Figura: 10) $p_1 = 1, p_2 = 0,999, p_3 = 1, p_4 = 1, p_5 = 1, p_6 = 0,5, p_i = 1$, for all $i \in \{7, \dots, 17\}$.

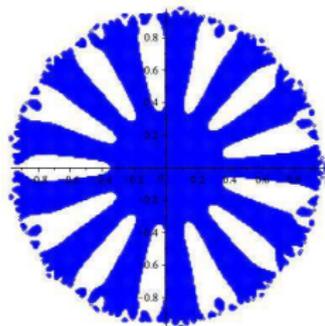
11) $p_1 = 1, p_2 = 0,999, p_3 = 1, p_4 = 0,625, p_5 = 0,284864, p_6 = 0,625, p_7 = 0,714, p_8 = 0,769, p_9 = 0,833, p_{10} = 0,909, p_i = 1$, for all $i \in \{11, \dots, 17\}$.

12) $p_1 = 1, p_2 = 0,999, p_3 = 1, p_4 = 0,625, p_5 = 0,284859, p_6 = 0,625, p_7 = 0,714, p_8 = 0,769, p_9 = 0,833, p_{10} = 0,909, p_i = 1$, for all $i \in \{11, \dots, 17\}$.

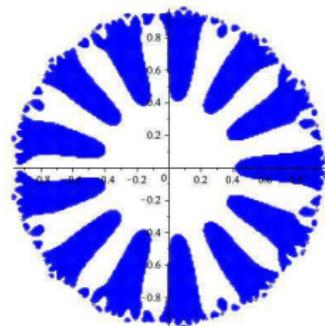
Conjunto $E := \{\lambda \in \mathbb{C} : (q_{F_n})_{n \geq 0} \text{ é limitada}\}$



13)



14)



15)

Figura: 13) $p_1 = 1, p_2 = 0,999, p_3 = 1, p_4 = 0,833, p_5 = 0,769, p_6 = 0,833, p_7 = 0,465, p_8 = 0,833, p_9 = 909, p_i = 1, \text{ for all } i \in \{10, \dots, 17\}.$

14) $p_1 = 1, p_2 = 0,999, p_3 = 1, p_4 = 0,833, p_5 = 0,769, p_6 = 0,833, p_7 = 0,46041639, p_8 = 0,833, p_9 = 909, p_i = 1, \text{ for all } i \in \{10, \dots, 17\}.$

15) $p_1 = 1, p_2 = 0,999, p_3 = 1, p_4 = 0,833, p_5 = 0,769, p_6 = 0,833, p_7 = 0,46041617, p_8 = 0,833, p_9 = 909, p_i = 1, \text{ for all } i \in \{10, \dots, 17\}.$

Teorema

A cadeia de Markov é transiente se, e somente se, $\prod_{i=1}^{+\infty} p_i > 0$. Se

$\prod_{i=1}^{+\infty} p_i = 0$ e $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = +\infty$ então a cadeia de Markov é nula
recorrente.

Definição

Dada uma cadeia de Markov irreduzível, dizemos que um estado i é recorrente se, e somente se, começando no estado i , o processo retorna infinitas vezes ao estado i com probabilidade 1, ou seja, um estado i é recorrente se, e somente se, $f_{i,i}^ = 1$, onde*

$$f_{i,i}^* = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{i,i}^n \text{ e } f_{i,i}^n = P\{X_n = i, X_{n-1} \neq i, \dots, X_1 \neq i | X_0 = i\}.$$

Assim definimos um estado i como sendo transiente se, e somente se, $f_{i,i}^ < 1$.*

Teorema

A cadeia de Markov é transiente se, e somente se, $\prod_{i=1}^{+\infty} p_i > 0$. Se

$\prod_{i=1}^{+\infty} p_i = 0$ e $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = +\infty$ então a cadeia de Markov é nula recorrente.

Proposição: A cadeia de Markov é transiente se, e somente se, existe $v \in l^\infty(\mathbb{N})$, $0 < v_i \leq 1$, $\forall i \geq 1$, tal que $\tilde{S}v = v$.

Ideia da prova: Seja \tilde{S} a matriz do operador S , retirando-se uma linha e uma coluna.

Propriedade probabilística

Ao retirarmos a primeira linha e a primeira coluna de S , temos que

$\tilde{S}v = v$ se, e somente se, $v_i = \beta_i v_1, \forall i \geq 2$, onde $\beta_2 = \frac{1}{p_2}$,

$\beta_i = \frac{1}{p_2 \cdots p_{n+1}^2}$, se $F_{2n} \leq i < F_{2n+1}$, e $\beta_i = \frac{1}{p_2 \cdots p_{n+1}^2 p_{n+2}}$, se

$F_{2n+1} \leq i < F_{2n+2}, \forall n \geq 1$. Assim, segue da proposição anterior

que a cadeia de Markov é transiente se, e somente se, $\prod_{i=1}^{+\infty} p_i > 0$.

Definição: $\mu \in l^1(\mathbb{N})$ é uma medida invariante em relação à S , se e somente se, $\mu S = \mu$.

Proposição

Seja $\mu \in l^\infty(\mathbb{N})$, $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots)$. Então $\mu S = \mu$ se, e somente se, $\mu_n = \beta_n \mu_0$, para todo $n \geq 1$, onde $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = p_2$ e, para cada $n \geq 2$, temos

- 1) $\beta_{F_n+k} = \beta_{F_n} \beta_k$, para cada $k \in \{1, \dots, F_{n-1} - 1\}$;
- 2) $\beta_{F_n} = p_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1}$;
- 3) $\beta_{F_{n-1}} = p_2 p_3 \dots p_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$.

Se $\prod_{i=1}^{+\infty} p_i = 0$ então a cadeia de Markov é recorrente. Além disso, se $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = +\infty$, segue pela proposição que não existe medida invariante para S . Logo a cadeia de Markov é nula recorrente.

Teorema

Existe sequência de probabilidades $\bar{p} = (p_i)_{i \geq 1}$ tal que satisfaz a cadeia de Markov ser recorrente positiva. Em particular, se

$\sum_{i=2}^{+\infty} p_i F_{2i-1} < +\infty$ então a cadeia de Markov é recorrente positiva.

Teorema

Existe sequência de probabilidades $\bar{p} = (p_i)_{i \geq 1}$ tal que satisfaz a cadeia de Markov ser recorrente positiva. Em particular, se

$\sum_{i=2}^{+\infty} p_i F_{2i-1} < +\infty$ então a cadeia de Markov é recorrente positiva.

Definição

Sejam i um estado recorrente e $R_i = \min\{n \geq 1 : X_n = i\}$. A duração média entre visitas ao estado i é dada por

$$m_i = E[R_i | X_0 = i] = \sum_{n=1}^{+\infty} n f_{i,i}^n.$$

O estado i é recorrente positivo se, e somente se, $m_i < \infty$, e é nulo recorrente se, e somente se, $m_i = \infty$.

Definição

Um diagrama de Bratteli é um grafo diretamente infinito (V, E) onde o conjunto dos vértices V e o conjunto das arestas E podem ser particionados em conjuntos finitos $V = V(0) \cup V(1) \cup V(2) \cup \dots$ and $E = E(1) \cup E(2) \cup \dots$, com as seguintes propriedades:

(i) $V(0) = \{v(0)\}$ é um conjunto de um único ponto,

(ii) $r(E(n)) \subset V(n)$ e $s(E(n)) \subset V(n-1)$, para todo $n \geq 1$,

onde $r : E \rightarrow V$ é chamada de aplicação alcance e $s : E \rightarrow V$ de aplicação fonte. Além disso, $s^{-1}(v) \neq \emptyset$ para todo $v \in V$ e $r^{-1}(v) \neq \emptyset$ para todo $v \in V \setminus V(0)$.

Diagramas de Bratteli

Se $\#V(n-1) = t(n-1)$ e $\#V(n) = t(n)$, então $E(n)$ determina uma matriz $M = M(n)_{t(n) \times t(n-1)}$, onde (M_{ij}) determina o número de arestas que partem do vértice $v_i(n-1)$ e chegam no vértice $v_j(n)$.

Exemplo:

Nível Matriz de incidência

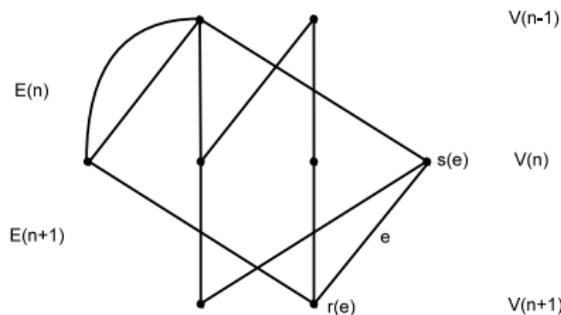
n-1

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

n

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

n+1



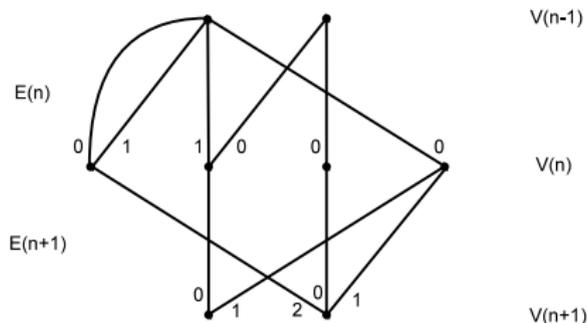
Definição

Um diagrama de Bratteli ordenado (V, E, \geq) é um diagrama de Bratteli (V, E) munido com uma ordem parcial \geq em E tais que duas arestas e, e' em E são comparáveis se, e somente se, $r(e) = r(e')$.

Diagramas de Bratteli

Definição

Um diagrama de Bratteli ordenado (V, E, \geq) é um diagrama de Bratteli (V, E) munido com uma ordem parcial \geq em E tais que duas arestas e, e' em E são comparáveis se, e somente se, $r(e) = r(e')$.



Diagramas de Bratteli

Se (V, E, \geq) é um diagrama de Bratteli ordenado e $k < l$ em \mathbb{Z}^+ , então podemos induzir uma ordem no conjunto $E(k+1) \circ E(k+2) \circ \dots \circ E(l)$ de caminhos de $V(k)$ até $V(l)$, da seguinte maneira:

$$(e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_l) > (f_{k+1}, f_{k+2}, \dots, f_l)$$

se, e somente se, para algum $i \in \{k+1, \dots, l\}$, tivermos $e_j = f_j$ para $i < j \leq l$ e $e_i > f_i$.

Teorema

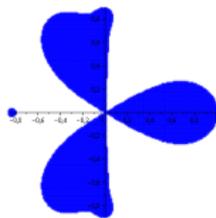
Seja S o operador de transição associado ao diagrama de Bratteli estocástico B cuja sua matriz associada é $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Então, em $l^\infty(\mathbb{N})$, temos que o conjunto dos autovalores $\sigma_{pt}(S)$ de S , satisfaz

$$\sigma_{pt}(S) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : (g_n(\lambda, \lambda))_{n \geq 0} \text{ é limitado}\},$$

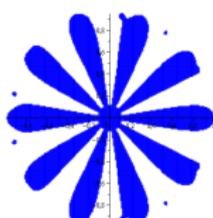
onde $g_n(x, y) = f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_0(x, y)$ e $f_n : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ são aplicações definidas por $f_0(x, y) = \left(\frac{x - (1-p_1)}{p_1}, \frac{y - (1-p_1)}{p_1} \right)$ e $f_n(x, y) = \left(\frac{1}{p_n} x^a y^b - \frac{1-p_n}{p_n}, \frac{1}{p_n} x^c y^d - \frac{1-p_n}{p_n} \right)$, para todo $n \geq 1$.

Diagramas de Bratteli estocásticos

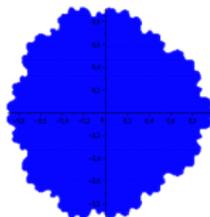
Exemplo: $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$



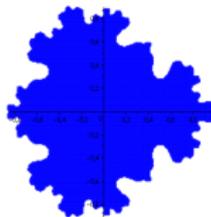
$p_1=0.5$ and $p_i=1$, for all $i \geq 2$.



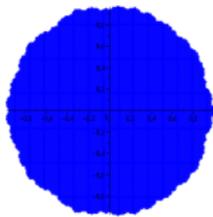
$p_1=1$, $p_2=0.5$ and $p_i=1$, for all $i \geq 3$.



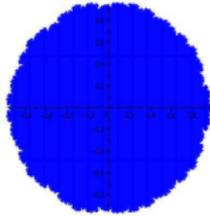
$p_1=0.833$, $p_2=0.714$, $p_3=0.555$ and $p_i=1$, for all $i \geq 4$.



$p_1=0.714$, $p_2=0.625$, $p_3=0.555$ and $p_i=1$, for all $i \geq 4$.



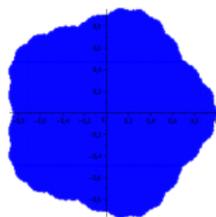
$p_1=1$, $p_2=0.833$, $p_3=0.714$, $p_4=0.625$ and $p_i=1$, for all $i \geq 5$.



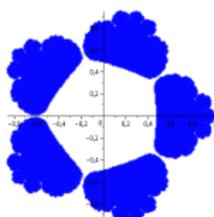
$p_1=1$, $p_2=0.833$, $p_3=0.714$, $p_4=0.625$, $p_5=0.555$ and $p_i=1$, for all $i \geq 6$.

Diagramas de Bratteli estocásticos

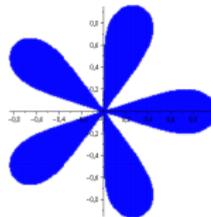
Exemplo: $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$



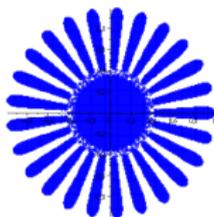
$p_i=0.769$, for all $i \geq 1$.



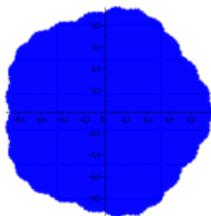
$p_i=0.666$, for all $i \geq 1$.



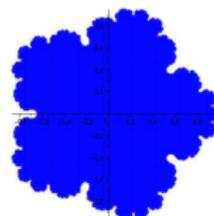
$p_1=0.5$ and $p_i=1$, for all $i \geq 2$.



$p_1=1$, $p_2=0.5$ and $p_i=1$, for all $i \geq 3$.



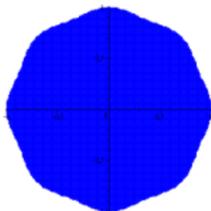
$p_1=0.833$, $p_2=0.769$, $p_3=0.714$, $p_4=0.666$
and $p_i=1$, for all $i \geq 5$.



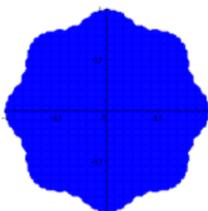
$p_1=0.714$, $p_2=0.666$, $p_3=0.625$, $p_4=0.588$
and $p_i=1$, for all $i \geq 5$.

Diagramas de Bratteli estocásticos

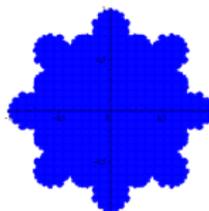
Exemplo: $M = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$



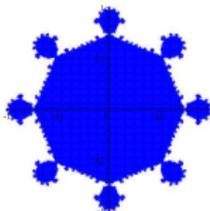
$p_i=0.833$, for all $i \geq 1$.



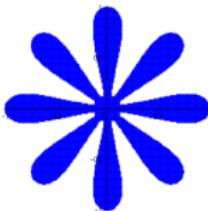
$p_i=0.714$, for all $i \geq 1$.



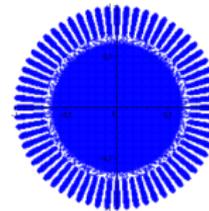
$p_i=0.588$, for all $i \geq 1$.



$p_i=0.526$, for all $i \geq 1$.



$p_1=0.5$ and $p_i=1$, for all $i \geq 2$.



$p_1=1$, $p_2=0.5$ and $p_i=1$, for all $i \geq 3$.

OBRIGADO!