

Uma visita à Dinâmica Simplética

Naiara Vergian de Paulo Costa

UFSC-Blumenau

Colóquio do Departamento de Matemática - UFSC

04 de novembro de 2016

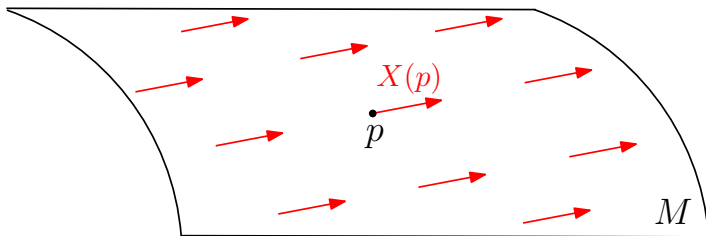
Aplicações

- **Geografia:** crescimento demográfico
- **Biologia:** densidade populacional de espécies
- **Economia:** comportamento do mercado financeiro
- **Astronomia:** trajetórias de corpos celestes

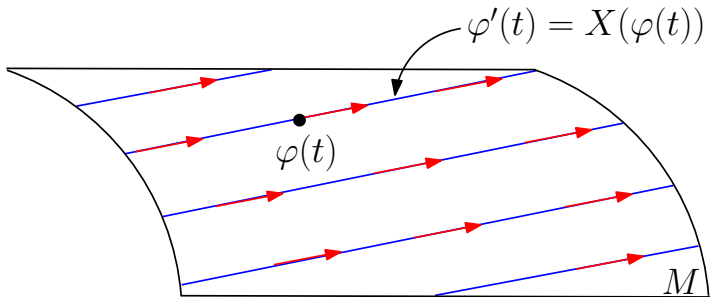


- M : variedade diferenciável
- X : campo vetorial suave sobre M

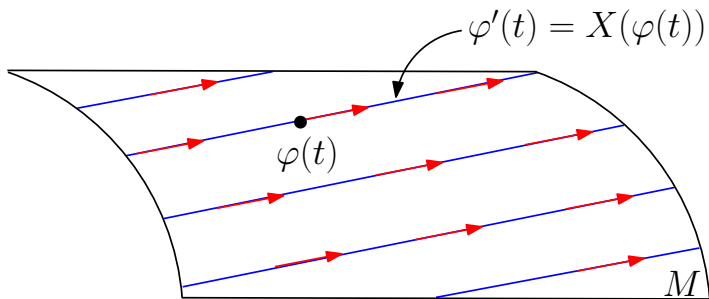
$$X : p \mapsto X(p) \in T_pM$$



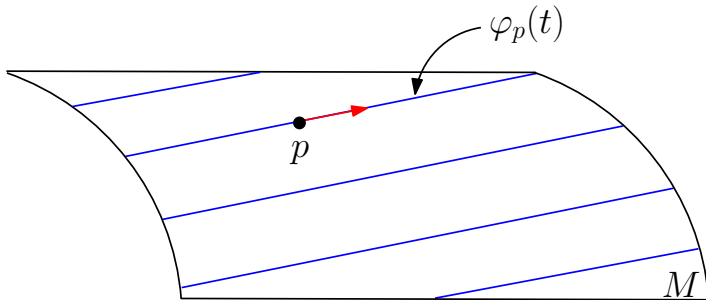
- M : variedade diferenciável
- X : campo vetorial suave sobre M



- M : variedade diferenciável
- X : campo vetorial suave sobre M



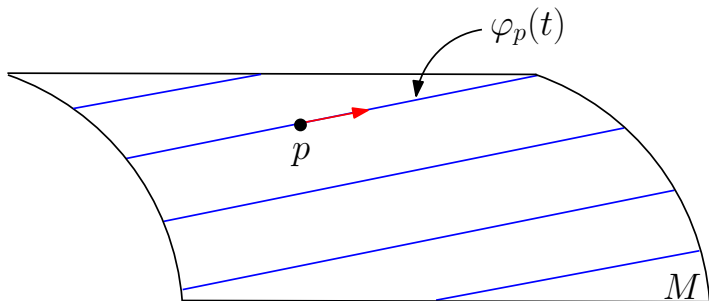
$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow M$ são as **curvas integrais**



- Fluxo associado a X :

$$\varphi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$$

$$\varphi(p, t) = \varphi_p(t)$$



$$\varphi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$$

- Fluxo associado a X :

$$\varphi(p, t) = \varphi_p(t)$$

- Órbita de X pelo ponto p : $\mathcal{O}_p = \{\varphi_p(t), t \in \mathbb{R}\}$

- Ponto de equilíbrio: $\mathcal{O}_p = \{p\} \iff X(p) = 0$

Definição (Variedade simplética (M, ω))

- M uma variedade diferenciável
- ω uma 2-forma sobre M :

$\omega_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear e anti-simétrica

Definição (Variedade simplética (M, ω))

- M uma variedade diferenciável
- ω uma 2-forma sobre M :

$\omega_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear e anti-simétrica

ω é uma *forma simplética* sobre M se:

- ω é não-degenerada: $\ker \omega = \{0\}$
- ω é fechada: $d\omega = 0$

Exemplos de variedades simpléticas

- \mathbb{R}^{2n} com coordenadas $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$$

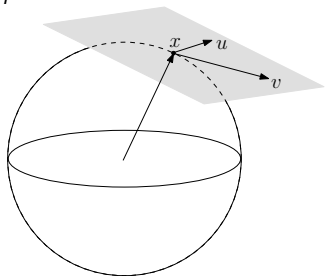
Exemplos de variedades simpléticas

- \mathbb{R}^{2n} com coordenadas $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$$

- Esfera S^2 : $x \in S^2$, $u, v \in T_x S^2$

$$\omega_x(u, v) = \langle x, u \times v \rangle$$



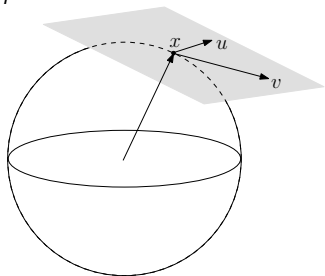
Exemplos de variedades simpléticas

- \mathbb{R}^{2n} com coordenadas $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$$

- Esfera S^2 : $x \in S^2$, $u, v \in T_x S^2$

$$\omega_x(u, v) = \langle x, u \times v \rangle$$



- Fibrado cotangente T^*W com coordenadas locais $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$

$$\omega_{\text{can}} = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\xi_i$$

Propriedades das variedades simpléticas

Seja (M, ω) uma variedade simplética.

- $\dim(M) = 2n$ é par
- ω^n é forma de volume em M

Seja (M, ω) uma variedade simplética.

- $\dim(M) = 2n$ é par
- ω^n é forma de volume em M
- **Teorema de Darboux:** Quaisquer duas variedades simpléticas de mesma dimensão são localmente equivalentes no sentido simplético.

Seja (M, ω) uma variedade simplética.

- $\dim(M) = 2n$ é par
- ω^n é forma de volume em M
- **Teorema de Darboux:** Quaisquer duas variedades simpléticas de mesma dimensão são localmente equivalentes no sentido simplético.
- Nem toda variedade de dimensão par admite uma estrutura simplética:

S^{2n} , $n > 1$, não é uma variedade simplética

Definição (Sistema Hamiltoniano (M, ω, H))

- (M, ω) variedade simplética
- $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ função suave

X_H é um *campo Hamiltoniano* em M se:

$$i_{X_H}\omega = dH$$

Definição (Sistema Hamiltoniano (M, ω, H))

- (M, ω) variedade simplética
- $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ função suave

X_H é um *campo Hamiltoniano* em M se:

$$i_{X_H}\omega = dH$$

Fluxo Hamiltoniano: fluxo φ_H associado a X_H

Função Hamiltoniana: $H : M \rightarrow \mathbb{R}$

Definição (Sistema Hamiltoniano (M, ω, H))

- (M, ω) variedade simplética
- $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ função suave

X_H é um *campo Hamiltoniano* em M se:

$$i_{X_H}\omega = dH$$

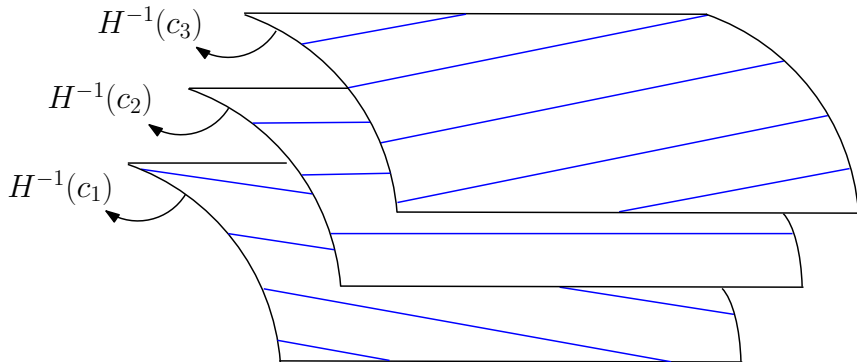
Fluxo Hamiltoniano: fluxo φ_H associado a X_H

Função Hamiltoniana: $H : M \rightarrow \mathbb{R}$

- Os pontos de equilíbrio de φ_H são os pontos críticos de H .

Fluxos Hamiltonianos

- O fluxo Hamiltoniano preserva os níveis de energia $H^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$.



Sistemas Hamiltonianos em $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$

Considere \mathbb{R}^{2n} com coordenadas $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ munido de

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$$

Seja $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave.

- Campo Hamiltoniano:

$$X_H = J_0 \nabla H = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_q H \\ D_p H \end{pmatrix}$$

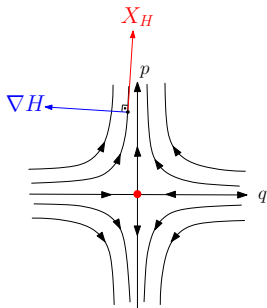
- Equações de Hamilton:
$$\begin{cases} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n$$

Exemplos em $(\mathbb{R}^2, \omega_0 = dq \wedge dp)$

- $H(q, p) = -qp$

$$\dot{q} = -q$$

$$\dot{p} = p$$

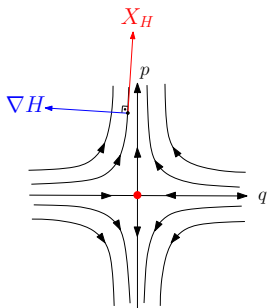


Exemplos em $(\mathbb{R}^2, \omega_0 = dq \wedge dp)$

- $H(q, p) = -qp$

$$\dot{q} = -q$$

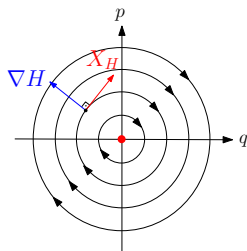
$$\dot{p} = p$$



- $H(q, p) = \frac{q^2 + p^2}{2}$

$$\dot{q} = p$$

$$\dot{p} = -q$$



Exemplo na esfera S^2

Considere a esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ com coordenadas

$(\theta, h) : \theta \in (0, 2\pi)$ ângulo e $h \in (-1, 1)$ altura ,

munida da forma simplética $\omega = d\theta \wedge dh$.

- *Função Hamiltoniana*: função altura $H(\theta, h) = h$
- *Campo Hamiltoniano*: $X_H = \partial_\theta$.

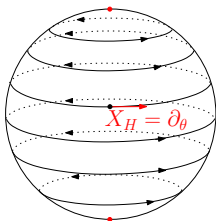


Figura: Fluxo Hamiltoniano da função altura em S^2

Daqui em diante...

Considere \mathbb{R}^4 com coordenadas (q_1, q_2, p_1, p_2) munido de

$$\omega_0 = dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2$$

e $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hamiltoniana.

Sistema Hamiltoniano em \mathbb{R}^4 :

$$\begin{cases} \dot{q}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \dot{q}_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_2} \\ \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial q_2} \end{cases}$$

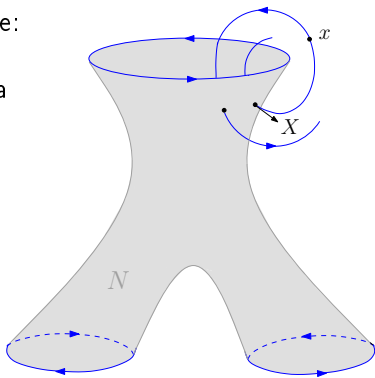
Os níveis de energia regulares de H são
hipersuperfícies de dimensão 3.

Seções globais

- M uma variedade de dimensão 3 e X um campo vetorial em M
- N uma superfície compacta mergulhada em M

N é uma *seção global para o fluxo* de X se:

- cada componente de bordo de N é uma órbita periódica de X
- X é transversal a $\dot{N} = N \setminus \partial N$
- toda órbita passando por $x \in M \setminus \partial N$ intersecta \dot{N} em tempos positivos e negativos

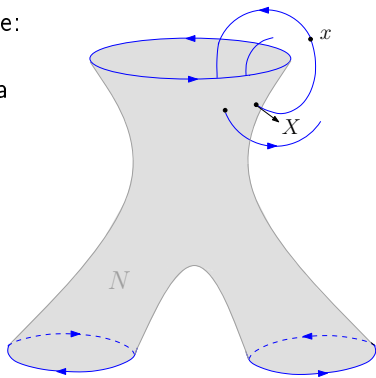


Seções globais

- M uma variedade de dimensão 3 e X um campo vetorial em M
- N uma superfície compacta mergulhada em M

N é uma *seção global para o fluxo* de X se:

- cada componente de bordo de N é uma órbita periódica de X
- X é transversal a $\dot{N} = N \setminus \partial N$
- toda órbita passando por $x \in M \setminus \partial N$ intersecta \dot{N} em tempos positivos e negativos



Aplicação de primeiro retorno $\tau : \dot{N} \rightarrow \dot{N}$

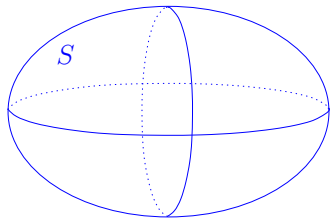
Pontos periódicos de τ correspondem a órbitas periódicas de X

Hipersuperfície estritamente convexa

- \mathbb{R}^4 munido da forma simplética $\omega_0 = dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2$
- $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ função Hamiltoniana
- $S = H^{-1}(c)$ nível de energia regular de H

S é *estritamente convexo* se:

- S é difeomorfo a S^3
- S tem curvatura positiva



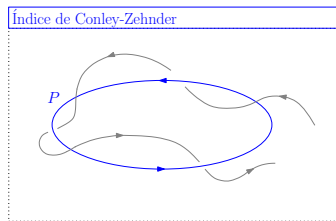
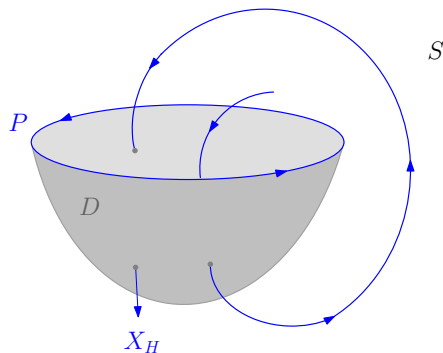
$$S = H^{-1}(1) \subset \mathbb{R}^4$$

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{q_1^2}{a_1^2} + \frac{q_2^2}{a_2^2} + \frac{p_1^2}{b_1^2} + \frac{p_2^2}{b_2^2}$$

Seções globais do tipo disco

Teorema (Hofer - Wysocki - Zehnder, 1998)

Se $S = H^{-1}(c)$ é uma *hipersuperfície estritamente convexa* de \mathbb{R}^4 então S admite uma órbita periódica P com índice de Conley-Zehnder 3 que é bordo de uma *seção global do tipo disco* D .



Seções globais do tipo disco: consequências dinâmicas

Toda órbita periódica distinta de P está **enlaçada** com P .

Seções globais do tipo disco: consequências dinâmicas

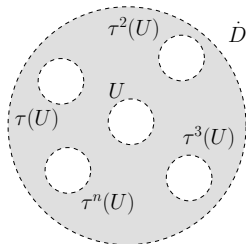
Toda órbita periódica distinta de P está **enlaçada** com P .

- Aplicação de retorno $\tau : \dot{D} \rightarrow \dot{D}$ é um difeomorfismo que preserva área

Seções globais do tipo disco: consequências dinâmicas

Toda órbita periódica distinta de P está **enlaçada** com P .

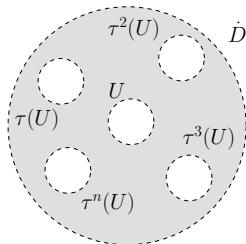
- Aplicação de retorno $\tau : \dot{D} \rightarrow \dot{D}$ é um difeomorfismo que preserva área
- Teorema da translação de Brouwer $\Rightarrow \tau$ admite um ponto fixo



Seções globais do tipo disco: consequências dinâmicas

Toda órbita periódica distinta de P está **enlaçada** com P .

- Aplicação de retorno $\tau : \dot{D} \rightarrow \dot{D}$ é um difeomorfismo que preserva área
- Teorema da translação de Brouwer $\Rightarrow \tau$ admite um ponto fixo

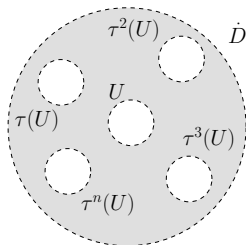


- Teorema de Franks $\Rightarrow \tau : \dot{D} \setminus \{p\} \rightarrow \dot{D} \setminus \{p\}$ admite 0 ou ∞ pontos periódicos

Seções globais do tipo disco: consequências dinâmicas

Toda órbita periódica distinta de P está **enlaçada** com P .

- Aplicação de retorno $\tau : \dot{D} \rightarrow \dot{D}$ é um difeomorfismo que preserva área
- Teorema da translação de Brouwer $\Rightarrow \tau$ admite um ponto fixo



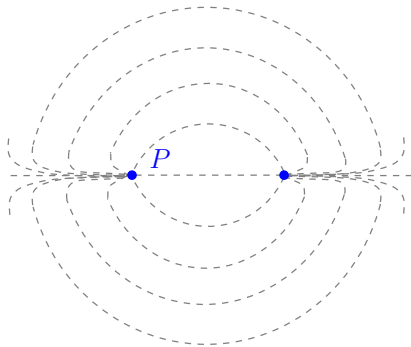
- Teorema de Franks $\Rightarrow \tau : \dot{D} \setminus \{p\} \rightarrow \dot{D} \setminus \{p\}$ admite 0 ou ∞ pontos periódicos

O fluxo Hamiltoniano tem **duas ou infinitas órbitas periódicas** em S .

Decomposição em livro aberto

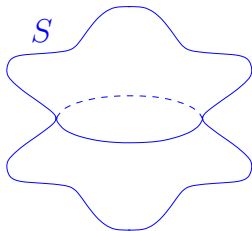
Teorema (Hofer - Wysocki - Zehnder, 1998)

S admite uma *decomposição em livro aberto*.



Cada página é uma *seção global do tipo disco* para o fluxo em S .

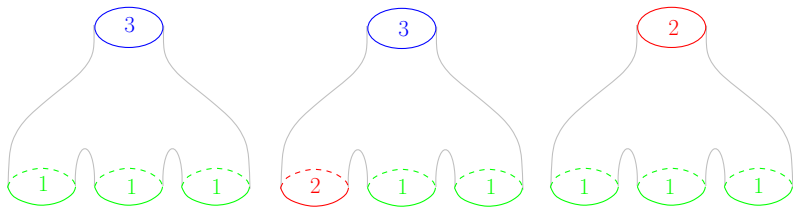
- Em geral, tais seções globais e tais decomposições podem não existir.



- Mas ainda podemos encontrar um sistema global de seções transversais ao fluxo.

Sistema de seções transversais

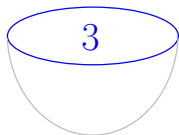
- Conjunto singular: órbitas periódicas com $CZ \in \{1, 2, 3\}$
- Possíveis folhas regulares:



Cada folha regular é transversal ao campo Hamiltoniano.

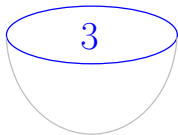
Casos particulares de folhas regulares

Caso dinamicamente convexo
($CZ \geq 3$)

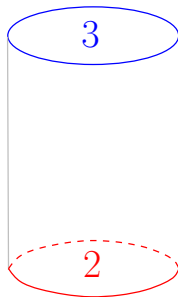
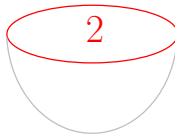
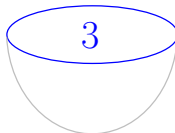


Casos particulares de folhas regulares

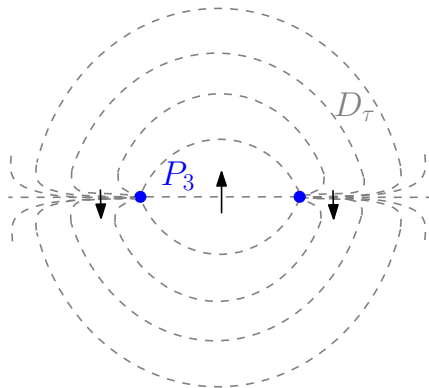
Caso dinamicamente convexo
($CZ \geq 3$)



Caso fracamente convexo
($CZ \geq 2$)

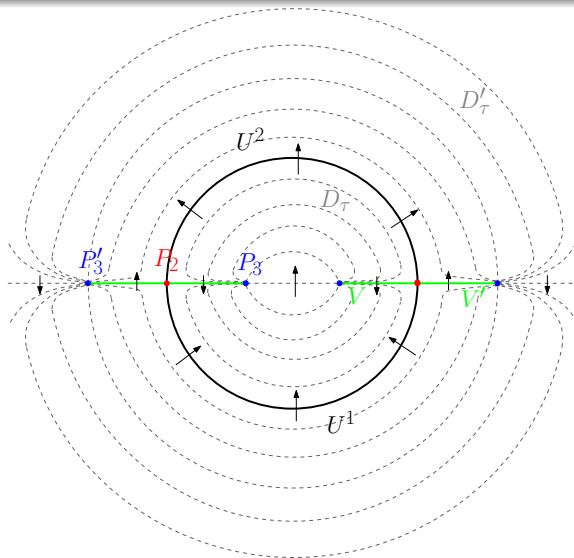


Exemplos de sistemas de seções transversais



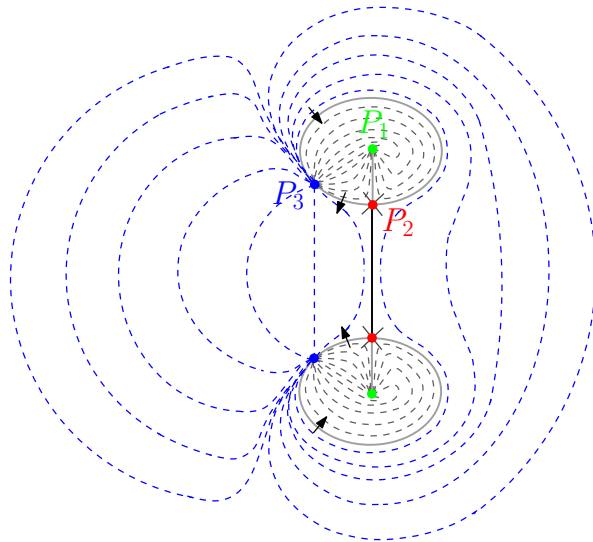
Decomposição em livro aberto

Exemplos de sistemas de seções transversais



Folheação 3 – 2 – 3

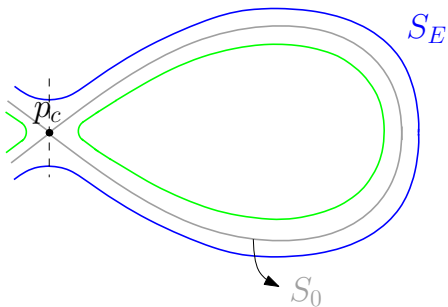
Exemplos de sistemas de seções transversais



Folheação 3 – 2 – 1

Sistemas de seções transversais próximos a níveis críticos

- $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ função Hamiltoniana
- $0 \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de H
- $S_0 \subset H^{-1}(0)$ é um *conjunto singular estritamente convexo*:

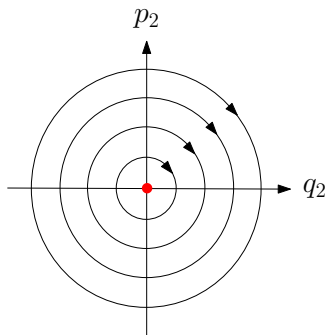
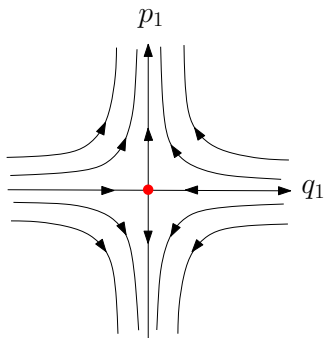


- S_0 é homeomorfo a S^3
- S_0 admite uma única singularidade $p_c \in \mathbb{R}^4$
- $\dot{S}_0 := S_0 \setminus \{p_c\}$ tem curvatura positiva

- p_c é um *ponto de equilíbrio do tipo sela-centro*

Comportamento do fluxo Hamiltoniano em torno de p_c

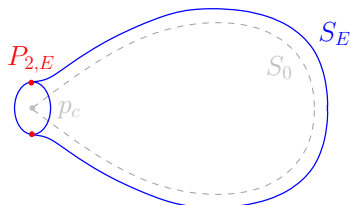
Assumimos que $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função **real-analítica**.



Órbitas periódicas: $P_{2,E} = \{q_1 = p_1 = 0\} \cap H^{-1}(E)$

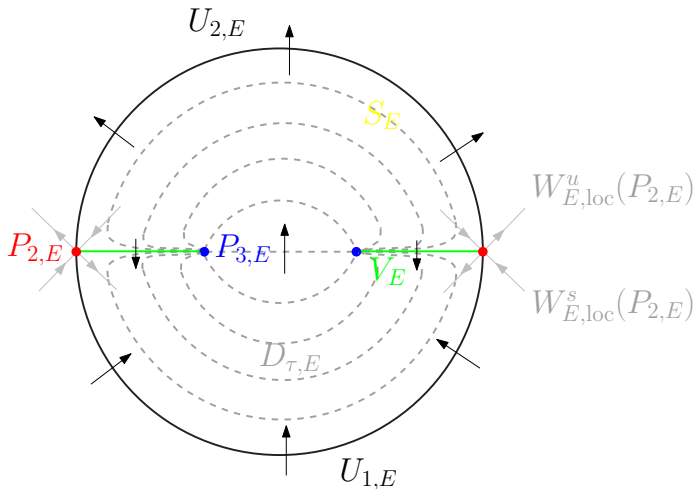
Teorema (de Paulo - Salomão)

- $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hamiltoniana real-analítica
- H admite um *equilíbrio do tipo sela-centro* $p_c \in H^{-1}(0)$
- p_c pertence a um *conjunto singular estritamente convexo* $S_0 \subset H^{-1}(0)$.



Então, para todo $E > 0$ suficientemente pequeno, $S_E \subset H^{-1}(E)$ admite uma *folheação 2 – 3*.

Folheação 2 – 3 em S_E : consequências dinâmicas



Para todo $E > 0$ suficientemente pequeno, $S_E \subset H^{-1}(E)$ contém infinitas órbitas periódicas e infinitas órbitas homoclínicas a $P_{2,E}$.

Exemplo: Hamiltoniano de Hénon-Heiles

Seja $H_b : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_b(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{q_1^2 + q_2^2}{2} + bq_1^2q_2 - \frac{q_2^3}{3}, \quad 0 < b \leq 1.$$

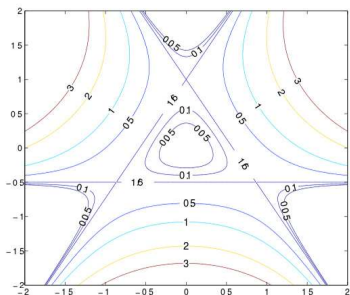
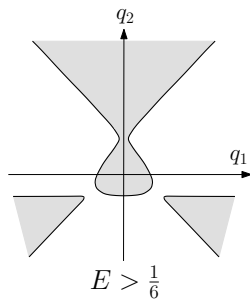
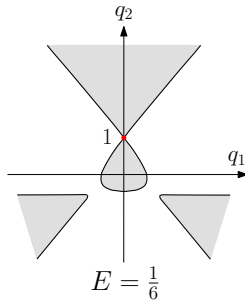
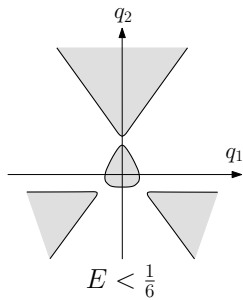
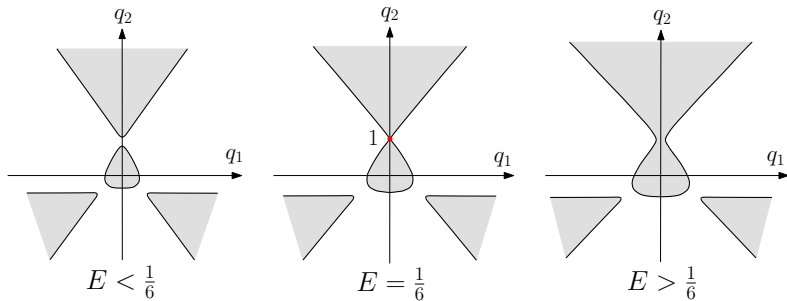


Figura: Curvas de nível do potencial de Hénon-Heiles ($b = 1$).

Dinâmica de H_b para $0 < b < 1$



Dinâmica de H_b para $0 < b < 1$



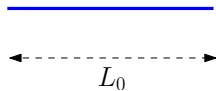
- Para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $H_b^{-1}\left(\frac{1}{6} + \varepsilon\right)$ contém uma 3-bola $S_{b,E}$ que admite uma folheação 2 – 3
- $S_{b,E}$ contém infinitas órbitas periódicas e infinitas órbitas homoclínicas a $P_{2,b,E}$

Exemplo: Nanobeam

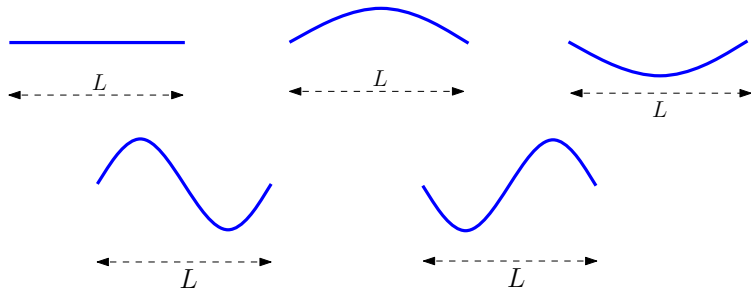
Consideramos uma “haste” (silício, carbono) com

- comprimento L_0
- largura w
- espessura d

$$L_0 \gg w > d$$



Sob compressão longitudinal:



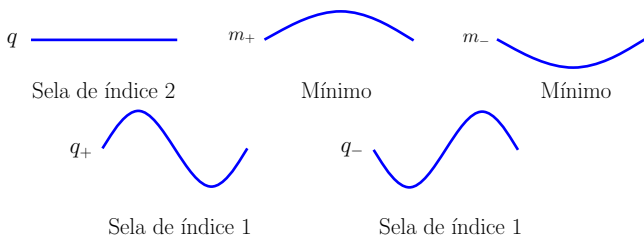
Descrição Hamiltoniana e pontos de equilíbrio

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \alpha q_1^2 + 4\beta q_2^2 + \frac{q_1^2 + 4q_2^2}{2}$$

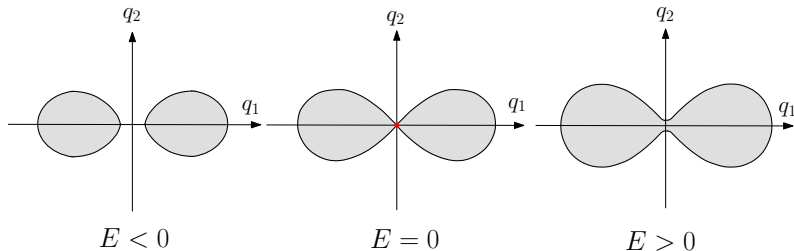
- $\alpha > 0$ e $\beta > 0$: o sistema não admite sela-centros
- $\alpha < 0$ e $\beta > 0$: três equilíbrios, um deles sela-centro



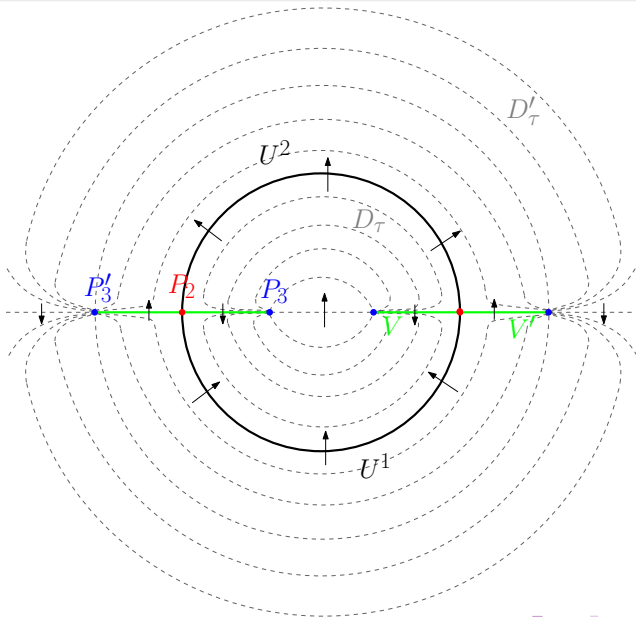
- $\alpha < 0$ e $\beta < 0$: cinco equilíbrios, dois deles sela-centros



Caso $\alpha < 0$ e $\beta > 0$



- Para cada $E > 0$ suficientemente pequeno, $H^{-1}(E)$ contém 3-bolas S_E e S'_E tais que $W_E = S_E \cup S'_E$ admite uma folheação $3 - 2 - 3$
- S_E e S'_E contêm infinitas órbitas periódicas e infinitas órbitas homoclínicas a $P_{2,E}$



Obrigada!