

# O que é um misturador (blender)

como usar e onde encontrar

Lorenzo J. Díaz

PUC-Rio

UFSC

11 novembro 16



Descrever (??): todos, “muitos”, “bastantes”, alguns,...

---

All, most, our system (M. Shub):

- What can be said about dynamical systems? The best things that can be said concern **all** systems.
  - When we can not make statements about all systems we may content ourselves with **most** systems.
  - We expect that properties that hold for most systems hold for a specific system under consideration, but we cannot be sure until we have proven it.
- 

Descrever **conjuntos grandes de sistemas** (a maioria ?!)  
(topológico, probabilístico genericidade).

## Dicotomias (Conjeturas de Palis e variações) :

- Dinâmicas simples (Morse-Smale, finitos estados interessantes) versus fenômenos homoclínicos . Pujals-Sambarino, Bonatti-Gan-Wen, Crovisier.
- Hiperbolicidade versus ciclos Pujals-Sambarino, Bonatti-D .
- hiperbolicidad versus medidas ergódicas não hiperbólicas.  
Bochi, Bonatti, D, Gorodetski

progressos na topologia  $C^1$ .

## Caos, a ferradura de Smale, hiperbolicidade

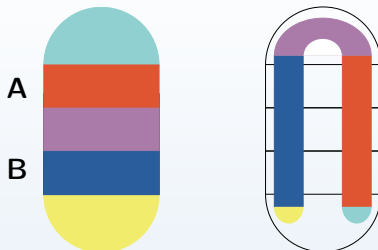
---

Smale disse um dia “o caos não existe” (!?): I was delighted with a conjecture which had a consequence: “chaos does not exist”. This euphoria was soon shattered

Carta de Levinson com um contra-exemplo!! (sobre trabalhos de Cartwright-Littlewood em modelagem de ondas de radio): O “caos podia existir”.

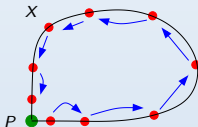
**Ferradura:** Geometrização das equações de Cartwright-Littlewood.

## A ferradura de Smale



direções de **contração** e **expansão** **uniforme**

fenômenos homoclínicos: trajetória que no futuro (iterações positivas) e no passado (negativas) converge a um “equilíbrio”.



# Caos e determinismo

Paradigma das leis da probabilidade: lançamento de uma moeda

Processo totalmente determinístico (condições do lançamento...).

- O experimento é representado por uma seqüência de **A** (cara) e **B** (coroa):

**A A B A B....**

- Os itinerários (órbitas) de uma ferradura também podem ser representados (dinâmica simbólica):
  - **A** iterado na região vermelha,
  - **B** iterado na região azul.

As a consequence of the theory of chaos, the world now knows that the philosophy of determinism has become untenable on every level. The coinflipping syndrome is pervasive. (Smale)

# Hiperbolicidade

---

Dois modelos de hiperbolicidade uniforme:

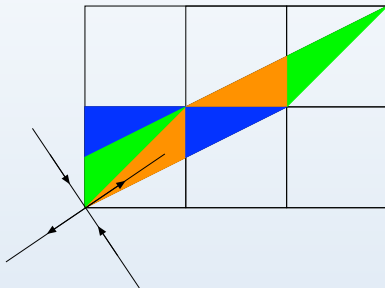
- 1 Ferraduras de Smale (semi-local) (pontos críticos "fora" da dinâmica)
- 2 Sistemas de Anosov (global) (não-crítico).

conjuntos transitivos "indescomponibilidade" dinâmica. existem órbitas densas.



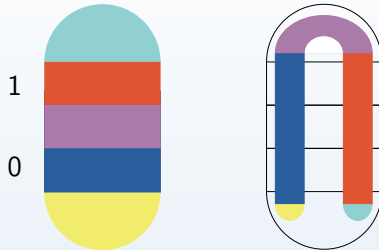
## Sistemas de Anosov

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_A: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$$



direções de contração e expansão **uniforme** (as auto-direções de  $A$ ).

## Ferraduras de Smale



$$\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}.$$

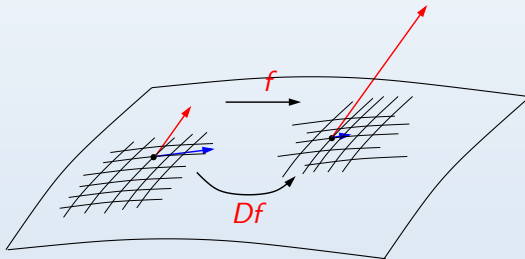
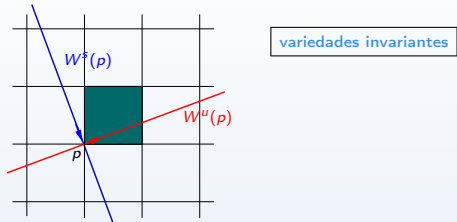
direções de **contração** e **expansão** uniforme

a região crítica está na bacia de atração de um poço.

dinâmica simbólica:  $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ ,

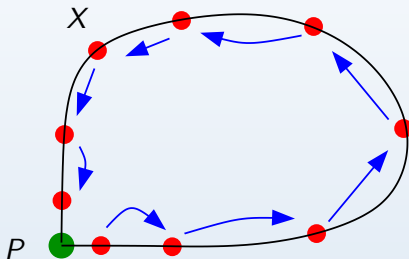
$$\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2, \quad \sigma(x_i) = x(y_i) \quad y_i = x_{i+1}.$$

# Hiperbolicidade em quadrinhos



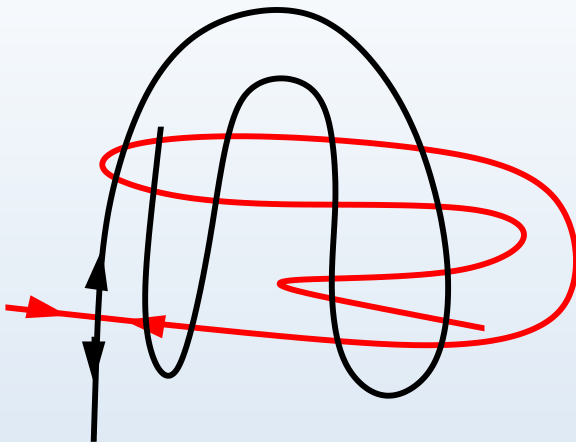
## Fenômenos homoclínicos

---



## Fenômenos homoclínicos

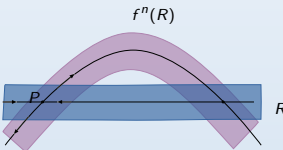
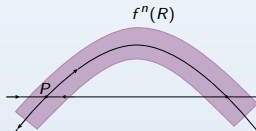
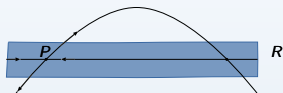
---



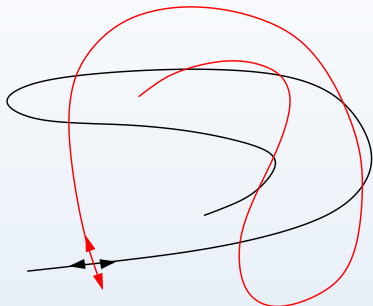
# Fenômenos homoclínicos

## Criação de ferraduras (Birkhoff, Smale)

interseções transversais entre variedades invariantes (estável e instável)



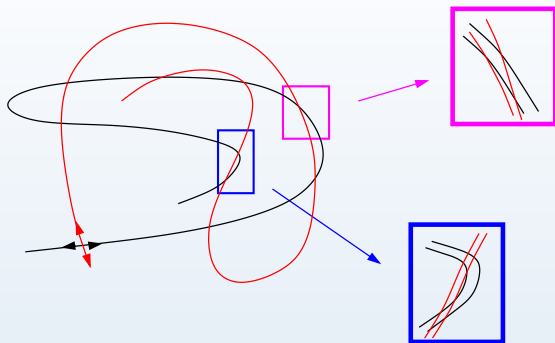
## Fenômenos homoclínicos



**Problema central:** entender a geometria das variedades estáveis e instáveis e suas interseções transversalidade, ângulos.

- **Anosov:** as variedades são densas em  $\mathbb{T}^2$ .
- **Ferraduras:** as variedades são Cantor  $\times$  intervalo.

# Fenômenos homoclínicos



**Problema central:** entender a geometria das variedades estáveis e instáveis e suas interseções transversalidade, ângulos.

- **Anosov:** as variedades são densas em  $\mathbb{T}^2$ .
- **Ferraduras:** as variedades são Cantor  $\times$  intervalo.



## A perplexidade homoclínica de Poincaré

---

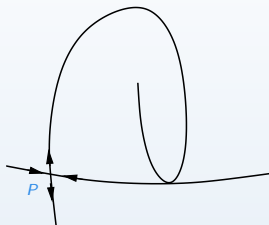
Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique.

Ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à maille infiniment serrées... chacune de ces deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle même de manière infiniment complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau.

On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer.

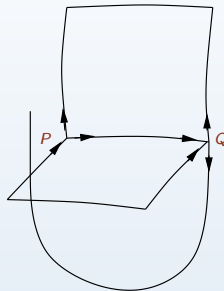
Rien de plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et de les problèmes de la Dynamique...

# Ciclos



tangência homoclínica

ciclo heterodimensional



**Genericidade Kupka-Smale:** as variedades invariantes de pontos periódicos se interceptam em posição geral (disjuntas ou transversais).

**Ciclos robustos:** devem envolver conjuntos “grandes” (ferraduras espessas e misturadores).

## Além da hiperbolicidade

A hiperbolicidade é um fenômeno muito menos freqüente do que se esperava nos anos sessenta. Necessidade de entender dinâmicas não hiperbólicas.

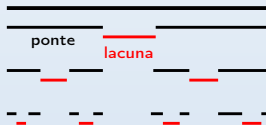
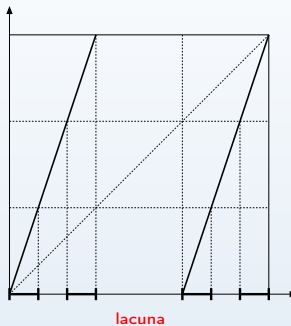
Dinâmicas **persistentemente não hiperbólicas**:

- Infinitude de poços. Dinâmicas persistentemente críticas.
- Atrator de Lorenz. **Hiperbolicidade singular.**
- Atrator de Hénon. **Hiperbolicidade não-uniforme.** (teoria de Pesin).
- Dinâmicas parcialmente hiperbólicas.

Necessidade de considerar **hiperbolicidades fracas.**

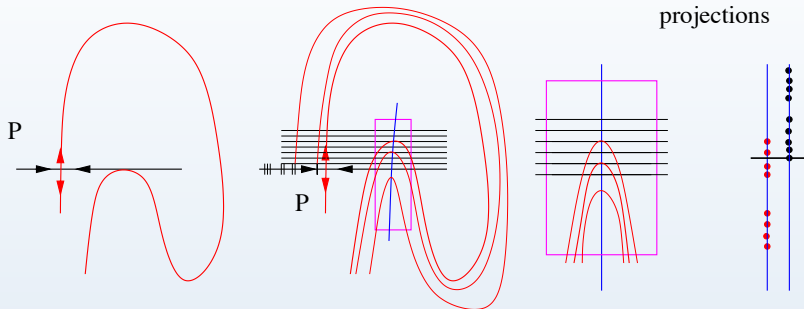
**Princípio geral (Pugh-Shub):** A little hyperbolicity goes a long way!

# Conjuntos de Cantor dinamicamente definidos:



construção do conjunto de Cantor

# Tangências robustas (Newhouse)



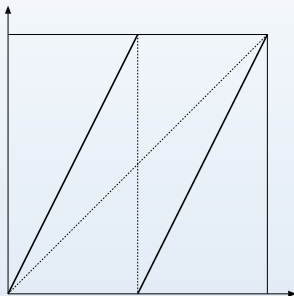
chave: Espessura de conjuntos de Cantor

$$\tau(K) \simeq \frac{\text{ponte}}{\text{lacuna}}$$

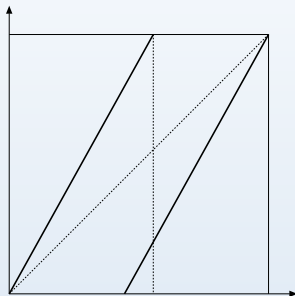
**Lema da Lacuna:** Se  $K_1, K_2$  encavalados e  $\tau(K_1) \cdot \tau(K_2) > 1$ , então  $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ .

e a lacuna desaparece....

## Transformação do Padeiro (sem e com superposição)



sem lacuna  
sem superposição



com superposição

## Transformação do Padeiro bidimensional



sem lacuna

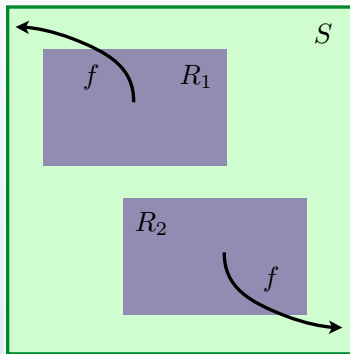
sem superposição



sem lacuna

sem superposição

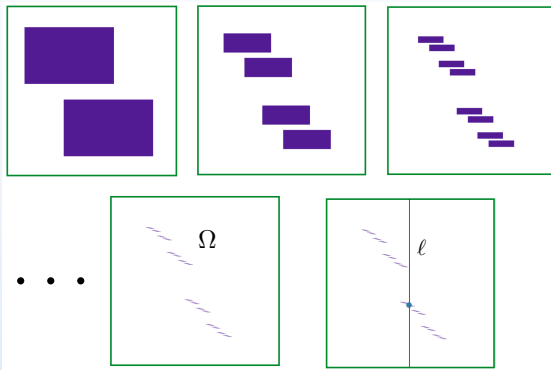
versão bidimensional



figuras de *What is a blender?* (Notices AMS) [Bonatti-Crovisier-D-Wilkinson]



## O conjunto invariante e a propriedade de superposição

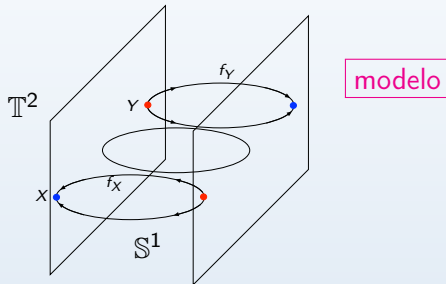


propriedade de superposição

- interseções não transversais são persistentes (?!).
- endomorfismos.

## Anosov ou ferraduras $\times$ rotações (neutro)

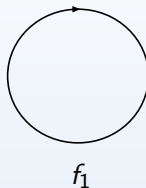
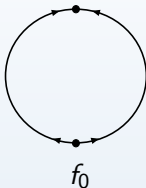
- método *a priori* não robusto.
- a direção paralela aos círculos é *neutra*.



- sem perda de transitividade.
- pontos sela de índices 1 e 2 convivem no mesmo conjunto transitivo [pioneiros: Abraham-Smale, Simon, 70] [Bonatti-D, Gorodetski-Ilyashenko 90's]

$f_0: S^1 \rightarrow S^1$  polo norte - polo sur,

$f_1 : S^1 \rightarrow S^1$  rotação irracional (ou quase)



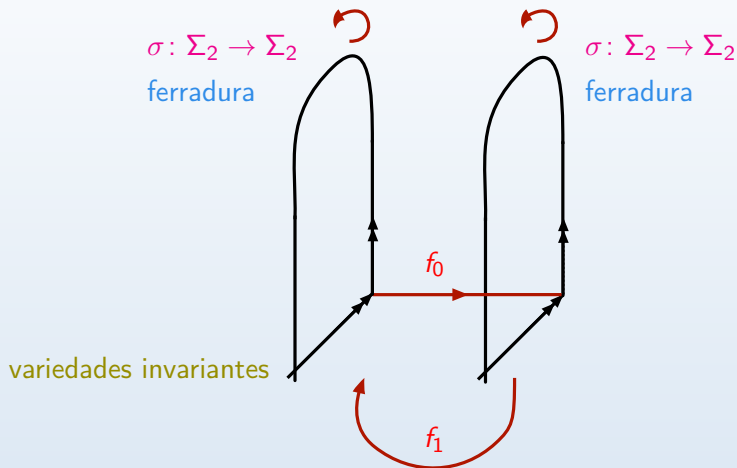
$$F: \Sigma_2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \Sigma_2 \times \mathbb{S}^1, \quad (\alpha, x) \mapsto (\sigma(\alpha), f_{\alpha_0}(x))$$

chave **minimalidade** do IFS gerado por  $f_0, f_1$  (todo ponto tem órbita densa  $S^1$ )

$$F: \mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^1, \quad (X, x) \mapsto (A(X), f_X(x))$$

princípio: misturar ferraduras de diferentes índices

representação ingênua e errada



- ads

- 2

“Difeomorfizando” o endomorfismo: dimensão extra

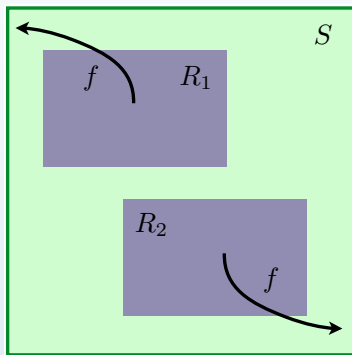


figura de *What is a blender?* [Bonatti-Crovisier-D-Wilkinson]

“Difeomorfizando” o endomorfismo: **dimensão extra**

ferraduras tortas en dimensión três

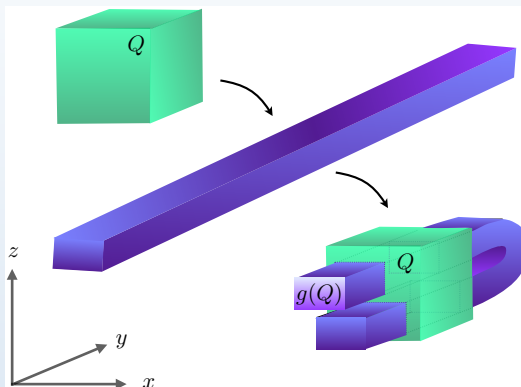
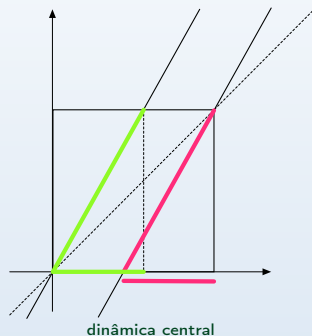
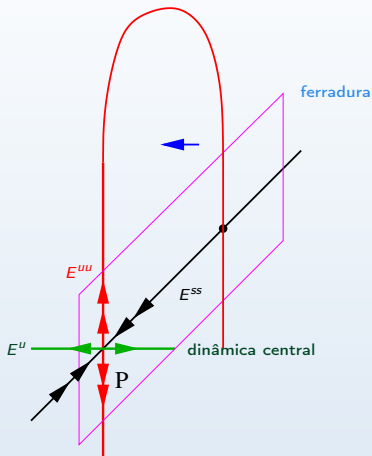


figura de *What is a blender?* (Notices AMS) [Bonatti-Crovisier-D-Wilkinson]

## “Misturador” protótipo:





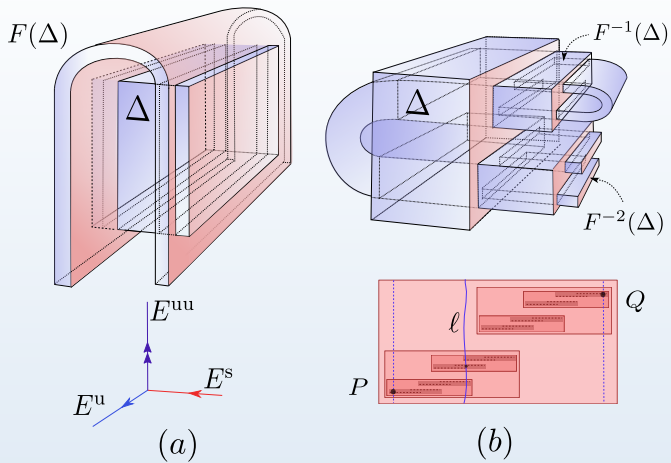


figura de S. Pérez Tese de Doutorado

# “Misturadores”: como, quando, onde

interseções não transversais são persistentes (?!).

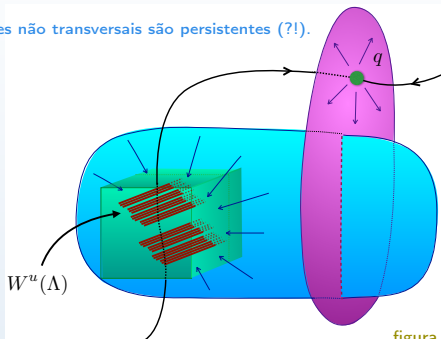


figura de *What is a blender?*

- **Blenders e transitividade robusta** [Bonatti-D, 06]
- **Blenders e ciclos robustos, Blenders e tangências robustas** [Bonatti-D, 06, 08]
- **Blenders dinâmicos** [Bochi, Bonatti-D, 16]
- **Outros blenders e Difusão de Arnold** [Nassiri-Pujals, 10]
- **Mais blenders** [Barrientos-Raibekas-Ki, 14], **superblenders** [Avila, Crovisier, Wilkinson, 17], **parablenders** [Berger 15], [Berger, Crovisier, Pujals 16].

## Misturador dinâmico:

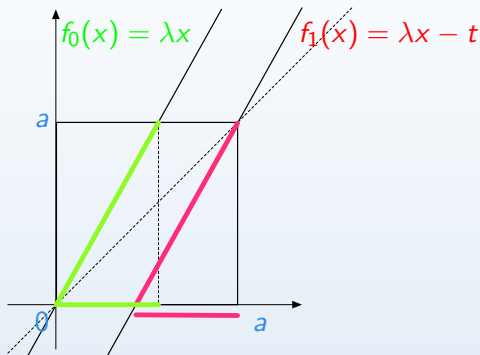
$f$  difeomorfismo,  $\Lambda$  um conjunto compacto  $f(\Lambda) = \Lambda$

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\overline{U}), \quad U \text{ vizinhança de } \Lambda.$$

- hiperbólico dimensão expansora bidimensional e transitivo
- campo de cones  $\mathcal{C}^{uu}$  invariante de dimensão um,
- existe uma família aberta  $f$ -invariante de discos de dimensão um  $\mathfrak{D}$  contida em  $U$  e tangente a  $\mathcal{C}^{uu}$ :

(\*) para todo  $D \in \mathfrak{D}$  existe  $D' \in \mathfrak{D}$  com  $D' \subset f(D)$ .

## Propriedade (\*):



$$\forall x \in [0, a] \quad \{f_0(x), f_1(x)\} \cap [0, a] \neq \emptyset.$$

importante:  $\lambda \in (1, 2)$  ( $\lambda = 2$  padeiro)