Equação do Tipo Placas com Inércia Rotacional Generalizada e Dissipação Fracionária

Jaqueline Luiza Horbach

Ruy Coimbra Charão

21 de Outubro de 2016

Colóquio do Departamento de Matemática - UFSC

Neste trabalho estou considerando o seguinte Problema de Cauchy para uma equação do tipo placas com um termo de inércia rotational generalizada e um termo de dissipação fracionário em $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) + (-\Delta)^{\delta} u_{tt}(t,x) + \alpha \Delta^2 u(t,x) - \Delta u(t,x) + (-\Delta)^{\theta} u_t(t,x) = 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \\ u_t(0,x) = u_1(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad t \in (0,\infty) \end{cases} \tag{1}$$

com a dimensão $n \geq 1$ e a constante $\alpha > 0$.

O operador $-\Delta$ é o Operador de Laplace positivo e as potências δ e θ são tais que

$$0 \leq \delta \leq 2 \qquad \text{e} \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{2+\delta}{2}.$$

Uma equação de placa é da forma

$$u_{tt}(t,x) + \alpha\Delta^2 u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0$$

A função $u(t,x)$ descreve o deslocamento transversal da placa no ponto x e um tempo t.

Equações de quarta ordem surgem em problema de mecânica dos sólidos (que estuda comportamento deformável dos sólidos).

Equação do tipo placas

$$u_{tt}(t,x) - \Delta u_{tt}(t,x) + \alpha\Delta^2 u(t,x) - \Delta u(t,x) - \Delta u_t(t,x) = 0$$

$-\Delta u_{tt}(t,x)$ representa os esfeitos de inércia rotacional da placa no ponto (t,x),

$-\Delta u_t(t,x)$ representa uma dissipação na placa no ponto (t,x).

Equação do tipo placas com potências fracionárias

$$u_{tt}(t,x) + (-\Delta)^{\delta} u_{tt}(t,x) + \alpha\Delta^{2} u(t,x) - \Delta u(t,x) + (-\Delta)^{\theta} u_t(t,x) = 0$$

$(-\Delta)^{\delta} u_{tt}(t,x)$ representa os esfeitos de inércia rotacional generalizada da placa no ponto (t,x),

$(-\Delta)^{\theta} u_t(t,x)$ representa uma dissipação fracionária na placa no ponto (t,x).

Definimos

$$(-\Delta)^{\delta} v(x) = \mathcal{F}^{-1}\Big(|\xi|^{2\delta}\mathcal{F}(v)(\xi)\Big)(x).$$

Trabalhos Anteriores

- Se $\delta = \alpha = 0$ e $\theta \in [0, 1]$ Ikehata-Natsume [DIE, 2012] obtiveram taxas de decaimento explicita para a energia total e para a norma L^2 da solução usando o Método da energia no Espaço de Fourier. Um melhoramento desse resultado foi dado por Charão-da Luz-Ikehata [JMAA, 2013] introduzindo um novo Método da energia no Espaço de Fourier .
- Para Equação de Placas podemos citar o trabalho de Ikehata-Soga [CPAA, 2015] que obtiveram uma expansão assintótica e taxa ótima para a norma L^2 da solução no caso $\delta = 0$ e $\theta = 1$.

Trabalhos Anteriores

- Podemos citar um trabalho de Charão-da Luz-Ikehata [JHDE, 2015], onde eles provaram taxas de decaimento quase ótimas para a energia total e para a norma L^2 da solução de uma equação de evolução abstrato de segunda ordem

$$A_1 u_{tt}(t,x) + A_2 u_t(t,x) + A_3 u(t,x) = 0.$$

Objetivo Principal

- Existência e unicidade de solução;
- Taxas de decaimento para a norma da energia e para a norma L^2 da solução;
- Expansão assintótica e taxas ótimas.

Formalmente, multiplicando a equação em (1) por $u_t(t,x)$ e integrando em $\mathbb{R}^n$

encontramos a seguinte igualdade

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_t\|^2 + \|(-\Delta)^{\delta/2}u_t\|^2 + \alpha\|\Delta u\|^2 + \|\bigtriangledown u\|^2\right) + \|(-\Delta)^{\theta/2}u_t\|^2 = 0,$$

para todo $t > 0$.

Existência e Unicidade de Solução

Definimos a energia total do sistema (1) por

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \|(-\Delta)^{\delta/2}u_t\|^2 + \alpha\|\Delta u\|^2 + \| \nabla u\|^2\right), \tag{2}$$

temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E(t) + \|(-\Delta)^{\theta/2}u_t\|^2 = 0, \tag{3}$$

para todo $t > 0$.

Observamos que $E(t)$ é decrescente no tempo.

Definimos então o seguinte Espaço da Energia

$$X = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n). \tag{4}$$

Para $s \in \mathbb{R}$, definimos o Espaço de Hilbert

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \Big/ (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Definimos também sobre $H^s(\mathbb{R}^n)$ com $s \neq 2$

$$\|u\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2s}) \, |\hat{u}|^2 \, d\xi \quad \text{(Norma)}$$

$$(u, v)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2s}) \, \hat{u} \, \bar{\hat{v}} \, d\xi \quad \text{(Produto Interno)}$$

e quando $s = 2$ definimos para $H^2(\mathbb{R}^n)$

$$\|u\|_{H^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2 + \alpha|\xi|^4) \, |\hat{u}|^2 \, d\xi \quad \text{(Norma)}$$

$$(u, v)_{H^2} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2 + \alpha|\xi|^4) \, \hat{u} \, \bar{\hat{v}} \, d\xi \quad \text{(Produto Interno)}$$

Caso $\delta \leq 2$ o espaço X definido acima é bom.

Caso $\delta > 2$ teríamos que $u_t \in H^{\delta}(\mathbb{R}^n) \subset H^2(\mathbb{R}^n)$, ou seja, u_t seria mais regular que u.

Termo Dissipativo:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E(t) + \|(-\Delta)^{\theta/2}u_t\|^2 = 0,$$

1) Caso $0 \leq \theta < \delta$ e $0 \leq \delta \leq 2$;

2) Caso $0 \leq \delta \leq \theta$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$.

Teorema 1 (Existência e Unicidade de Solução)

Sejam $n \geq 1$, $0 \leq \delta \leq 2$ *e* $0 \leq \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$. *Se*

$$u_0 \in H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \quad e \quad u_1 \in H^2(\mathbb{R}^n)$$

então o Problema de Cauchy (1) tem uma única solução u na seguinte classe

$$u \in C^2\left([0,\infty); H^{\delta}(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^1\left([0,\infty); H^2(\mathbb{R}^n)\right) \cap C\left([0,\infty); H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)\right).$$

Definição 1 (Semigrupo)

Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X.

Diz-se que uma aplicação

$$S : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$$

é um semigrupo de operadores lineares limitados em X se:

i) $S(0) = I$, *onde I é o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$;*

ii) $S(t+s) = S(t)\,S(s), \qquad \forall\; t, s \in \mathbb{R}^+.$

Diz-se que o semigrupo S é de classe C_0 se

iii) $\lim\limits_{t \to 0^+} \|(S(t) - I)\,x\|_X = 0, \qquad \forall\; x \in X.$

Definição 2 (gerador infinitesimal do semigrupo)

O operador $B : D(B) \to X$ *definido por*

$$D(B) = \left\{ \; x \in X \;\; / \;\; \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} \, x \quad \textit{existe} \; \right\}$$

e

$$B(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} \, x, \qquad \forall \; x \in D(B)$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo S.

Teorema 2

Se B é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 em um espaço de Banach X e J é o operador linear e limitado então $B + J$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 em X.

Definição 3 (Operador Dissipativo)

Seja H um espaço de Hilbert. Diz-se que o operador linear $B : D(B) \subset H \to H$ é dissipativo se,

$$Re\langle Bx, x\rangle \leq 0, \qquad \forall\ x \in D(B).$$

Teorema 3 (Lumer-Phillips)

Se B é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em um espaço de Banach X então:

i) *B é dissipativo;*

ii) $Im(\lambda I - B) = X, \quad \lambda > 0 \qquad (Im(\lambda I - B) =$ *imagem de* $\lambda I - B)$.

Reciprocamente, se

i) *$D(B)$ é denso em X;*

ii) *B é dissipativo;*

iii) *$Im(\lambda_0 I - B) = X$ para algum $\lambda_0 > 0$, então B é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0.*

Seja X um espaço de Banach e B um operador linear de X. Considere o problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = (B+J)U(t) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{5}$$

onde $U_0 \in X$ e $t > 0$.

Teorema 4

Se B é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 e J é o operador linear e limitado em X então, para cada $U_0 \in D(B)$ o problema (5) tem uma única solução forte

$$U(t) = S(t)U_0 \in C\left(\mathbb{R}^+, D(B)\right),$$

onde S é o semigrupo gerado por B.

Construção dos Operadores B e J

De modo formal, vamos encontrar os operadores B_2 e J_2. Considerando $v = u_t$ e substituindo na equação

$$(I + (-\Delta)^{\delta})u_{tt} + (\alpha\Delta^2 - \Delta)u + (-\Delta)^{\theta} u_t = 0$$

temos que

$$\begin{aligned} v_t = u_{tt} = & - \left(I + (-\Delta)^{\delta}\right)^{-1}\left(\alpha\Delta^2 - \Delta + I\right)u \\ & - \left(I + (-\Delta)^{\delta}\right)^{-1}\left(I + (-\Delta)^{\theta}\right)^{-1} v \\ & + \left(I + (-\Delta)^{\delta}\right)^{-1}(u + v). \end{aligned}$$

Definimos os operadores A_2 e A_θ por

$$A_2 : D(A_2) = H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \to H^\delta(\mathbb{R}^n) \qquad \left(0 \leq \delta \leq 2\right)$$

$$A_2 = \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1}\left(\alpha\Delta^2 - \Delta + I\right)$$

$$\widehat{A_2 u} = \frac{1 + |\xi|^2 + \alpha|\xi|^4}{1 + |\xi|^{2\delta}}\hat{u}$$

$$A_\theta : D(A_\theta) = H^{2\theta-\delta}(\mathbb{R}^n) \to H^\delta(\mathbb{R}^n) \qquad \left(0 \leq \delta \leq \theta\right)$$

$$A_\theta = \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1}\left(I + (-\Delta)^\theta\right)$$

$$\widehat{A_\theta v} = \frac{1 + |\xi|^{2\theta}}{1 + |\xi|^{2\delta}}\hat{v}$$

Escrevendo o Problema de Cauchy (1) na forma matricial temos

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U = B_2 U + J_2 U \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

onde $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X$, $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in X$, $B_2 : H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n) \to X$ é o operador dado por

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_2 & -A_\theta \end{pmatrix}$$

e o operador $J_2 : X \to X$ é dado por

$$J_2 U = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1}(u+v) \end{pmatrix}.$$

B_2 é Gerador de um Semigrupo

Pelo Teorema de Lummer-Phillips temos que mostrar que

i) $H^{4-\delta}(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$ é denso em $X = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$;

ii) B_2 é dissipativo, ou seja, $Re(B_2 U, U)_X \leq 0$;

iii) $Im(I - B_2) = X$ para $\lambda_0 = 1$;

iv) J_2 linear e limitado.

Taxas de Decaimento

Teorema 5

Seja $n \geq 1$*. Se* $\dfrac{1}{2} < \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$, $0 \leq \delta \leq \theta$ *e os dados iniciais*

$$u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \ e \ u_1 \in H^\delta(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$$

então, para todo $t > 0$*, tem-se que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (I + (-\Delta)^\delta)|u_t|^2 + (\alpha\Delta^2 - \Delta)|u|^2 dx \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2 \right)$$

$$+ Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t} \left(\|u_0\|_{H^2}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2 \right).$$

Taxas de Decaimento

Teorema 6

Seja $n \geq 3$. *Se* $\dfrac{1}{2} < \theta \leq \dfrac{2+\delta}{2}$, $0 \leq \delta \leq \theta$ *e os dados iniciais*

$$u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \text{ e } u_1 \in H^\delta(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$$

então, para todo $t > 0$, *tem-se que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx \leq C t^{-\frac{n-2}{2\theta}} \|u_1\|_{L^1}^2 + C t^{-\frac{n}{2\theta}} \|u_0\|_{L^1}^2 + C e^{-\frac{\varepsilon}{10} t} \left(\|u_0\|_{H^2}^2 + \|u_1\|_{H^\delta}^2 \right).$$

Taxas de Decaimento

Teorema 7

Seja $n \geq 1$. *Se* $\frac{1}{2} < \theta < \frac{2+\delta}{2}$, $0 \leq \delta \leq \theta$ *e os dados iniciais*

$$u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \quad e \quad u_1 \in H^\delta(\mathbb{R}^n) \cap \dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^n)$$

então, para todo $t > 0$, *tem-se que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx \leq Ct^{-\frac{n}{2\theta}} \left(\|u_1\|^2_{\dot{W}^{-1,1}} + \|u_0\|^2_{L^1} \right) + Ce^{-\frac{\varepsilon}{10}t} \left(\|u_0\|^2_{H^2} + \|u_1\|^2_{H^\delta} \right)$$

com $\dot{W}^{-1,1}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \,:\, \exists f \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ com } u = (-\Delta)^{1/2} f \right\} = (-\Delta)^{1/2} L^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 8

Seja $\frac{1}{2} < \theta < \min\left\{\frac{3}{2}, \delta + \frac{1}{2}\right\}$, $0 < \delta \leq \theta$, $\kappa \in (0, \min\{1, \delta\})$ *e*

$$[u_0, u_1] \in \left(H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)\right) \times \left(H^\delta(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n)\right).$$

Então a solução $\hat{u}(t, \xi)$ *do problema de Cauchy no espaço de Fourier satisfaz*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \hat{u}(t,\xi) - P_1 e^{-a(\xi)t} \frac{\sin(|\xi| t)}{|\xi|} - P_0 e^{-a(\xi)t} \cos(|\xi| t) \right|^2 d\xi$$

$$\leq C\left(\|u_1\|^2_{H^\delta} + \|u_0\|^2_{H^2} + \|u_1\|^2_1 + \|u_0\|^2_1\right) e^{-kt}$$

$$+ C\left(\|u_0\|^2_1 + \|u_1\|^2_1 + \|u_1\|^2_{1,\kappa}\right) t^{-\frac{n-2+\varepsilon_0}{2\theta}},$$

para todo $t \geq 1$, *com* C *e* k *constantes positivas e*

$$L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^\kappa) |f(x)| dx < \infty \right\}.$$

Taxas de Decaimento Ótimas

Teorema 9

Seja $n \geq 3$, $P_1 \neq 0$ *com* $\frac{1}{2} < \theta < \min\left\{\frac{3}{2}, \delta + \frac{1}{2}\right\}$, $0 < \delta \leq \theta$, $\kappa \in (0, \min\{1, \delta\})$, *e*

$$[u_0, u_1] \in \Big(H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)\Big) \times \Big(H^\delta(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{1,\kappa}(\mathbb{R}^n)\Big).$$

Então, existe constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ *e* $t_0 > 0$ *tal que para todo* $t \geq t_0$ *vale que*

$$C_1|P_1|t^{-\frac{n-2}{4\theta}} \leq \|u(t,\cdot)\| \leq C_2 t^{-\frac{n-2}{4\theta}},$$

com $u(t,x)$ *a única solução do Problema de Cauchy (1).*

R. Coimbra Charão, C. R. da Luz and R. Ikehata, *Sharp decay rates for wave equations with a fractional damping via new method in the Fourier space*, J. Math. Anal. Appl. **408** (2013), no. 1, 247-255.

C. R. da Luz, R. Ikehata and R. C. Charão, *Decay estimates for abstract evolution equations of second order*, Journal of Differential Equations,**259** (2015), 5017-5039.

R. Ikehata and M. Natsume, *Energy decay estimates for wave equations with a fractional damping*, Differential Integral Eqns **25** (2012), no. 9–10, 939-956.

R. Ikehata and M. Soga *Asymptotic profiles for a strongly damped plate equations with lower order perturbation*, Communications on pure and Applied Analysis **14** (2015), no. 5.

Obrigada!