Ações de grupos infinitos em esferas de homotopia de dimensão par

Sérgio Tadao Martins

26 de agosto de 2016

Ações de grupos

Uma ação (à esquerda) de um grupo G em um conjunto X é uma função

$$\begin{aligned} \phi : G \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

tal que $1 \cdot x = x$ para todo $x \in X$ e

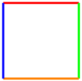
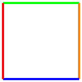
$$(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$$

para todos $g, h \in G$ e para todo $x \in X$.

Ações de grupos

Exemplo: o grupo cíclico $\mathbb{Z}_4$ age no quadrado.

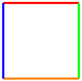
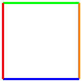
$$\mathbb{Z}_4 = \{1, t, t^2, t^3\}$$

$t \cdot$  $=$ 

Ações de grupos

Exemplo: o grupo cíclico $\mathbb{Z}_4$ age no quadrado.

$$\mathbb{Z}_4 = \{1, t, t^2, t^3\}$$

$t \quad \cdot$  $=$ 

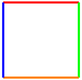
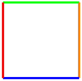
Outro exemplo: o grupo de permutações S_n age no conjunto $X = \{1, 2, \ldots, n\}$.

$$\sigma \cdot i = \sigma(i)$$

Ações de grupos

Exemplo: o grupo cíclico $\mathbb{Z}_4$ age no quadrado.

$$\mathbb{Z}_4 = \{1, t, t^2, t^3\}$$

$t \quad \cdot$  $=$ 

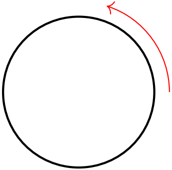
Outro exemplo: o grupo de permutações S_n age no conjunto $X = \{1, 2, \ldots, n\}$.

$$\sigma \cdot i = \sigma(i)$$ 

Definição: uma ação é *livre* se $g \neq 1$ implica $g \cdot x \neq x$ para todo $x \in X$

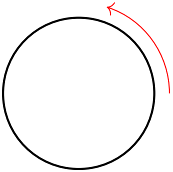
Ações de grupos em esferas

O grupo cíclico $\mathbb{Z}_n = \langle t \mid t^n = 1 \rangle$ age livremente no círculo S^1: o gerador t realiza uma rotação de ângulo $2\pi/n$ no sentido anti-horário:



Ações de grupos em esferas

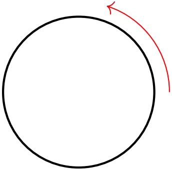
O grupo cíclico $\mathbb{Z}_n = \langle t \mid t^n = 1 \rangle$ age livremente no círculo S^1: o gerador t realiza uma rotação de ângulo $2\pi/n$ no sentido anti-horário:



Existem outros grupos finitos que agem livremente em S^1?

Ações de grupos em esferas

O grupo cíclico $\mathbb{Z}_n = \langle t \mid t^n = 1 \rangle$ age livremente no círculo S^1: o gerador t realiza uma rotação de ângulo $2\pi/n$ no sentido anti-horário:



Existem outros grupos finitos que agem livremente em S^1?

Resposta: Não. Um grupo finito que age livremente em S^1 tem cohomologia periódica de período 2, e os grupos cíclicos finitos são os únicos que possuem cohomologia com período 2. 

Cohomologia de grupos

Dado um grupo G, podemos construir um anel, denotado $\mathbb{Z}G$ e chamado de *anel de grupo* de G sobre $\mathbb{Z}$, da seguinte forma: seus elementos são somas formais

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g$$

em que $\alpha_g \in \mathbb{Z}$ e apenas um número finito dos α_g's é não nulo.

As operações em $\mathbb{Z}G$ são definidas por

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g + \sum_{g \in G} \beta_g g = \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g$$

e

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) \left(\sum_{h \in G} \beta_h h \right) = \sum_{g,h \in G} (\alpha_g \beta_h)(gh).$$

Cohomologia de grupos

A cohomologia de G com coeficientes no $\mathbb{Z}G$-módulo M é definida assim: primeiro, tome uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$:

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \xrightarrow{d_n} \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Em seguida, aplique o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\_\_, M)$ e tome a cohomologia do complexo de cadeia resultante:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_0, M) \xrightarrow{d_1^*} \cdots \xrightarrow{d_n^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_n, M) \xrightarrow{d_{n+1}^*} \cdots$$

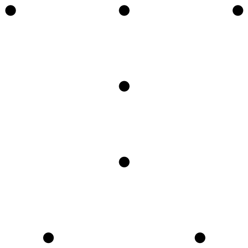
$$H^n(G; M) = \frac{\ker d_{n+1}^*}{\operatorname{im} d_n^*}.$$

Cohomologia de CW-complexos

Um *CW-complexo* X é um espaço topológico construído indutivamente.

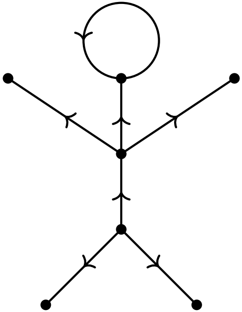
Cohomologia de CW-complexos

Primeiro, começamos com 0-células, isto é, um conjunto de pontos. Este é o 0-esqueleto de X, denotado X^0.



Cohomologia de CW-complexos

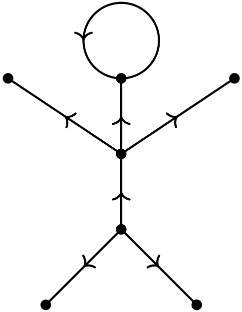
Depois, adicionamos 1-células, isto é, arestas cujos extremos pertencem ao 0-esqueleto de X. O espaço resultante é o 1-esqueleto de X, denotado X^1.



Cohomologia de CW-complexos

Formalmente, a adição de cada 1-célula e^1 é especificada por uma função

$$\varphi_{e^1} : S^0 = \{-1, 1\} \to X^0.$$

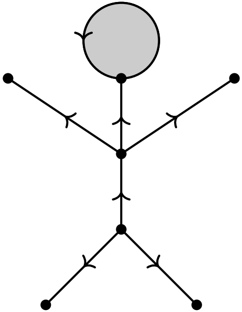


Cohomologia de CW-complexos

Depois adicionamos as 2-células, cada uma delas especificada por uma função

$$\varphi\colon S^1 \to X^1,$$

e assim por diante.



Cohomologia de CW-complexos

A construção do CW-complexo X leva à construção de um complexo de cadeia $C_*(X)$:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C_{n+1}(X) \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[rr, bend right, "d_n d_{n+1}=0"'] & C_n(X) \arrow[r, "d_n"] & C_{n-1}(X) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C_0(X) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Hom}(C_0(X),\mathbb{Z}) \xrightarrow{d_1^*} \cdots \xrightarrow{d_n^*} \mathrm{Hom}(C_n(X),\mathbb{Z}) \xrightarrow{d_{n+1}^*} \cdots$$

Os *grupos de cohomologia* de X são então definidos por

$$H^n(X) = \frac{\ker d_{n+1}^*}{\mathrm{im}\, d_n^*}.$$

Cohomologia de CW-complexos

Exemplo: a esfera S^n possui uma estrutura celular que consiste de 1 vértice e uma n-célula. Seu complexo celular é

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

logo

$$H^i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } i = 0 \text{ ou } i = n; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Juntando as coisas

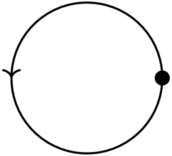
O CW-complexo X é um G-complexo se G age em X de modo celular, isto é, se $g\sigma$ é uma célula de X para toda célula σ de X.

Exemplo: ação de $\mathbb{Z}_3 = \{1, t, t^2\}$ em S^1

Juntando as coisas

O CW-complexo X é um G-complexo se G age em X de modo celular, isto é, se $g\sigma$ é uma célula de X para toda célula σ de X.

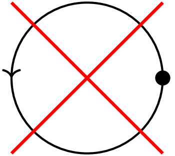
Exemplo: ação de $\mathbb{Z}_3 = \{1, t, t^2\}$ em S^1

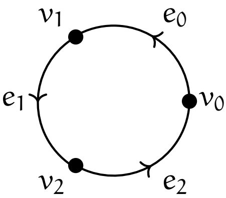


Juntando as coisas

O CW-complexo X é um G-complexo se G age em X de modo celular, isto é, se $g\sigma$ é uma célula de X para toda célula σ de X.

Exemplo: ação de $\mathbb{Z}_3 = \{1, t, t^2\}$ em S^1

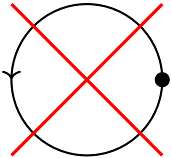


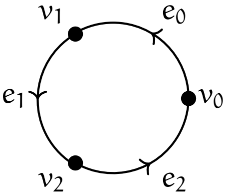


Juntando as coisas

O CW-complexo X é um G-complexo se G age em X de modo celular, isto é, se $g\sigma$ é uma célula de X para toda célula σ de X.

Exemplo: ação de $\mathbb{Z}_3 = \{1, t, t^2\}$ em S^1





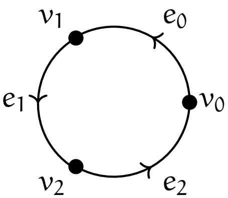
$$C_0(S^1) = \{a_0v_0 + a_1v_1 + a_2v_2 \mid a_i \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^3$$
$$C_1(S^1) = \{a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 \mid a_i \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^3$$

$C_0(S^1)$ e $C_1(S^1)$ são $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_3]$-módulos:

$$t \cdot v_i = v_{(i+1 \bmod 3)}, \qquad t \cdot e_i = e_{(i+1 \bmod 3)}$$

Juntando as coisas

$$\begin{array}{rcl} 0 \longrightarrow C_1(S^1) & \xrightarrow{d_1} & C_0(S^1) \longrightarrow 0 \\ e_0 & \longmapsto & v_1 - v_0 \\ e_1 & \longmapsto & v_2 - v_1 \\ e_2 & \longmapsto & v_0 - v_2 \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc} a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 & & (a_2 - a_0)v_0 + (a_0 - a_1)v_1 + (a_1 - a_2)v_2 \\ \| & & \| \\ (a_0 + a_1t + a_2t^2)e_0 & \xmapsto{d_1} & [(a_2 - a_0) + (a_0 - a_1)t + (a_1 - a_2)t^2]v_0 \end{array}$$

Juntando as coisas

Como $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_3]$-módulos, $C_1(S^1) \cong C_0(S^1) \cong \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_3]$.

$$(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) \xmapsto{d_1} (a_2 - a_0) + (a_0 - a_1)t + (a_1 - a_2)t^2$$

$$\ker(d_1) = \{a(1 + t + t^2)\} \cong \mathbb{Z}$$
$$\operatorname{im}(d_1) = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0 + a_1 + a_2 = 0\}$$

Seja $\varepsilon \colon \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_3] \to \mathbb{Z}$ dada por $\varepsilon(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_0 + a_1 + a_2$.
A sequência

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{1+t+t^2} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_3] \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_3] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é exata.

Juntando as coisas

Eis uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_3]$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_3] \arrow[r, "t-1"] & \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_3] \arrow[rr, "1+t+t^2"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_3] \arrow[r, "t-1"] & \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_3] \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \\
& & & \mathbb{Z} \arrow[ur, "1+t+t^2"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

Esta resolução possui período igual a 2, logo a cohomologia de $\mathbb{Z}_3$ é periódica de período 2.

Teorema (Swan)

- *Se um grupo finito* G *age livremente sobre* S^{2n-1}, *então* G *possui cohomologia periódica de período* $2n$.
- *Se um grupo finito* G *possui cohomologia periódica de período* q, *então* G *age livremente em um espaço com o mesmo tipo de homotopia de* S^{dq-1}, *para algum inteiro positivo* d.

Sequências espectrais

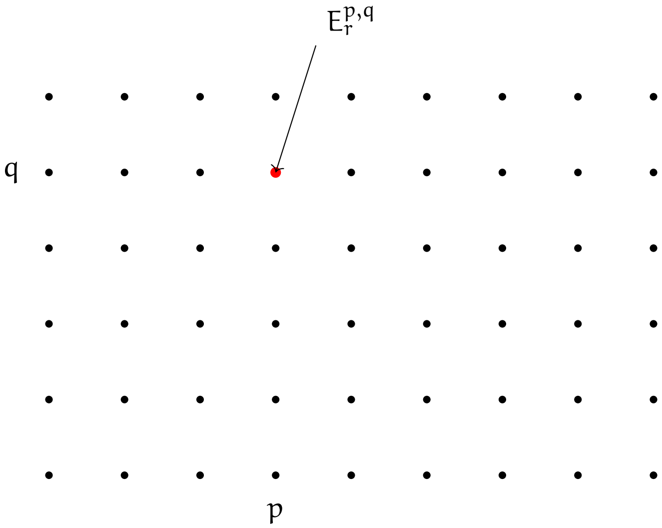
Uma sequência espectral (de primeiro quadrante) é uma coleção de objetos algébricos (grupos abelianos, espaços vetoriais, R-módulos) $E_r^{p,q}$ para $r \geq 1$ e $p, q \in \mathbb{N}$ e morfismos de bigrau $(r, 1-r)$

$$d_r \colon E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$$

tais que $d_r \circ d_r = 0$ e

$$E_{r+1}^{p,q} = \frac{\ker d_r \colon E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}}{\operatorname{im} d_r \colon E_r^{p-r,q+r-1} \to E_r^{p,q}}$$

Sequências espectrais



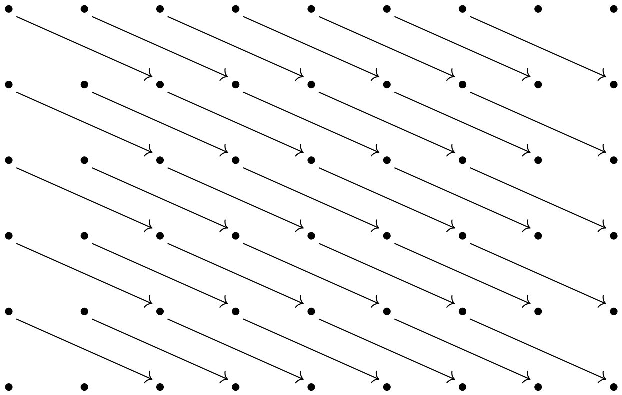
Sequências espectrais

$$E_1^{*,*}$$

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$

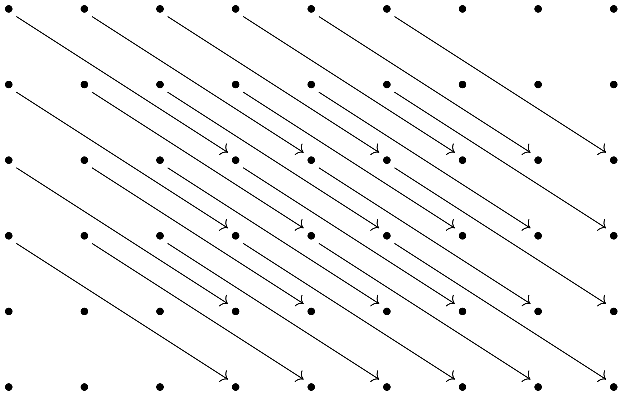
Sequências espectrais

$E_2^{*,*}$

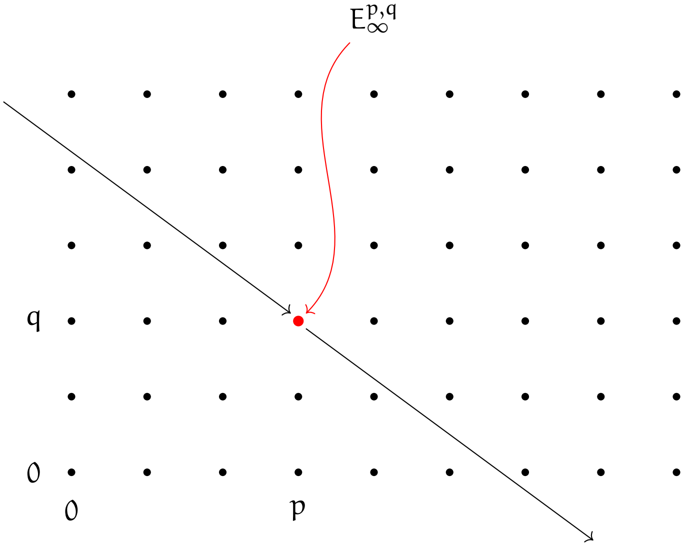


Sequências espectrais

$$E_3^{*,*}$$



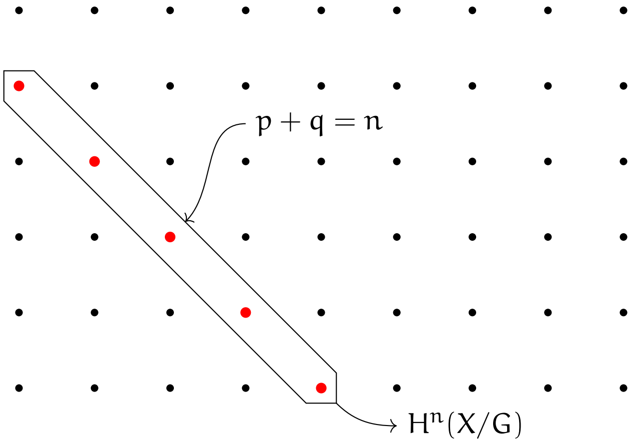
Sequências espectrais



Sequência Espectral de Cartan-Leray

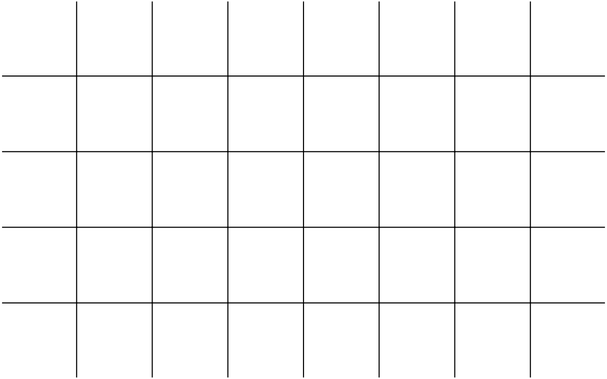
Se X é um G-complexo livre, existe uma sequência espectral tal que

$$E_2^{p,q} = H^p(G; H^q(X)) \Rightarrow H^{p+q}(X/G).$$



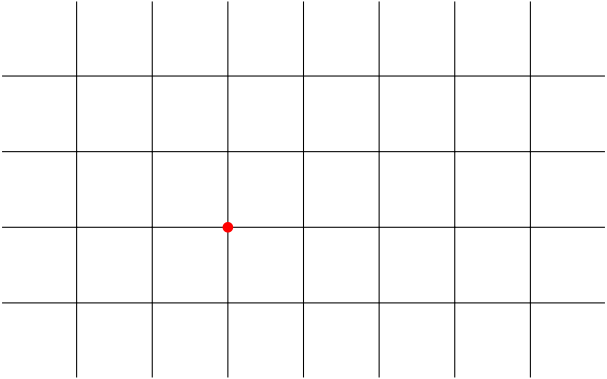
Sequência Espectral de Cartan-Leray

Exemplo: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ age livremente no plano $\mathbb{R}^2$:



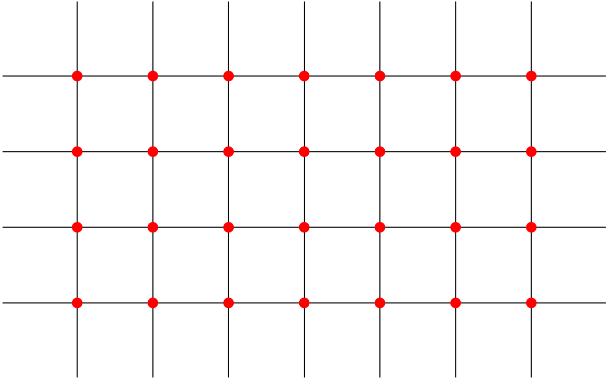
Sequência Espectral de Cartan-Leray

Exemplo: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ age livremente no plano $\mathbb{R}^2$:



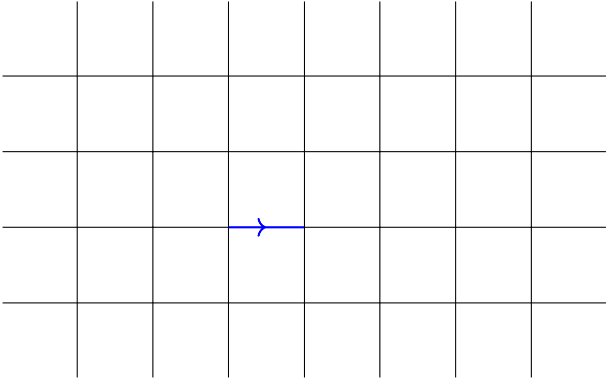
Sequência Espectral de Cartan-Leray

Exemplo: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ age livremente no plano $\mathbb{R}^2$:



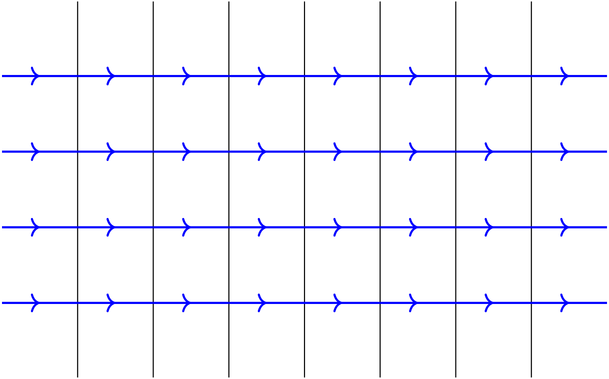
Sequência Espectral de Cartan-Leray

Exemplo: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ age livremente no plano $\mathbb{R}^2$:



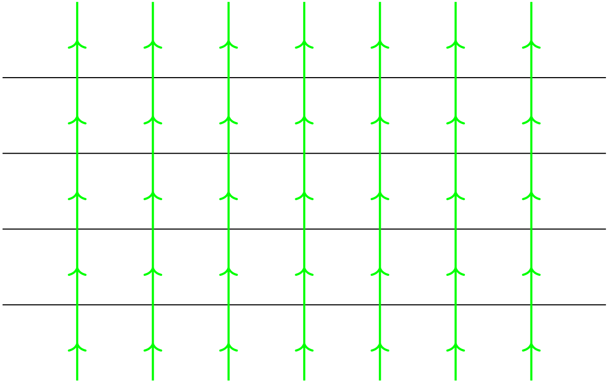
Sequência Espectral de Cartan-Leray

Exemplo: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ age livremente no plano $\mathbb{R}^2$:



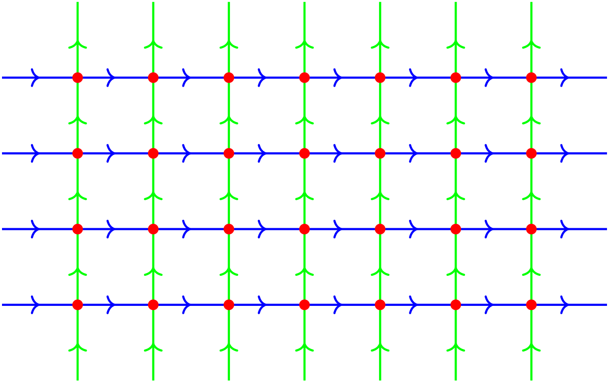
Sequência Espectral de Cartan-Leray

Exemplo: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ age livremente no plano $\mathbb{R}^2$:



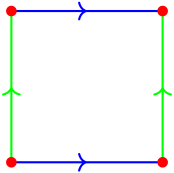
Sequência Espectral de Cartan-Leray

Exemplo: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ age livremente no plano $\mathbb{R}^2$:



Sequência Espectral de Cartan-Leray

Exemplo: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ age livremente no plano $\mathbb{R}^2$:



$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; H^q(\mathbb{R}^2)) \Rightarrow H^{p+q}(T)$$

Grupos finitos agindo em S^{2n}

Como a esfera S^{2n} só possui cohomologia não nula nas dimensões 0 e $2n$, o termo E_2 da sequência espectral de Cartan-Leray só possui duas linhas não nulas, nas alturas 0 e $2n$, se G é um grupo finito que age livremente em S^{2n}.

$$E_2^{p,q} = H^p(G; H^q(S^{2n})) \Rightarrow H^{p+q}(S^{2n}/G)$$

Temos $H^0(S^{2n}) = H^{2n}(S^{2n}) = \mathbb{Z}$. Quais são as possíveis estruturas de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo?

$$\begin{aligned} \omega\colon G &\to \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}) = \{1, -1\} \cong \mathbb{Z}_2 \\ g &\mapsto \pm 1 \end{aligned}$$

Grupos finitos agindo em S^{2n}

Seja $g \in G$ um elemento de ordem k: $\langle g \rangle = \mathbb{Z}_k$. Se G age livremente em S^{2n}, $\mathbb{Z}_k$ também age.

- Se k é ímpar, $\mathbb{Z}$ só possui a estrutura de $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_k]$-módulo trivial ($\omega\colon \mathbb{Z}_k \to \mathbb{Z}_2$)
- Se k é par, $\mathbb{Z}$ pode possuir uma estrutura não trivial como $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_k]$-módulo ($g \cdot 1 = -1$), que denotaremos $\tilde{\mathbb{Z}}$.

$$\cdots \xrightarrow{g-1} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_k] \xrightarrow{1+g+\cdots+g^{k-1}} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_k] \xrightarrow{g-1} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_k] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$$

Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_k]}(\_\_, \mathbb{Z})$:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{k} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{k} \cdots$$

Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_k]}(\_\_, \tilde{\mathbb{Z}})$:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{-2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{-2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \cdots$$

Grupos finitos agindo em S^{2n}

$$H^i(\mathbb{Z}_k;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } i = 0 \\ 0, & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ \mathbb{Z}_k, & \text{se } i \geq 2 \text{ é par} \end{cases} \qquad H^i(\mathbb{Z}_k;\tilde{\mathbb{Z}}) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \text{ é par} \\ \mathbb{Z}_2, & \text{se } i \text{ é ímpar} \end{cases}$$

suponha $H^{2n}(S^{2n})$ trivial: $E_2 = E_\infty$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[drrr] & 0 \arrow[drrr] & \mathbb{Z}_k \arrow[drrr] & 0 \arrow[drrr] & \mathbb{Z}_k \arrow[drrr] & 0 \arrow[drrr] & \mathbb{Z}_k & 0 & \mathbb{Z}_k & \cdots \\
\mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z}_k & 0 & \mathbb{Z}_k & 0 & \mathbb{Z}_k & 0 & \mathbb{Z}_k & \cdots
\end{tikzcd}$$

Grupos finitos agindo em S^{2n}

$$H^i(\mathbb{Z}_k;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } i = 0 \\ 0, & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ \mathbb{Z}_k, & \text{se } i \geq 2 \text{ é par} \end{cases} \qquad H^i(\mathbb{Z}_k;\tilde{\mathbb{Z}}) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \text{ é par} \\ \mathbb{Z}_2, & \text{se } i \text{ é ímpar} \end{cases}$$

então $H^{2n}(S^{2n})$ não é trivial:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[drrr] & \mathbb{Z}_2 \arrow[drrr] & 0 \arrow[drrr] & \mathbb{Z}_2 \arrow[drrr] & 0 \arrow[drrr] & \mathbb{Z}_2 \arrow[drrr] & 0 & \mathbb{Z}_2 & 0 & \cdots \\
\mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z}_k & 0 & \mathbb{Z}_k & 0 & \mathbb{Z}_k & 0 & \mathbb{Z}_k & \cdots
\end{tikzcd}$$

Grupos finitos agindo em S^{2n}

$$H^i(\mathbb{Z}_k;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } i = 0 \\ 0, & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ \mathbb{Z}_k, & \text{se } i \geq 2 \text{ é par} \end{cases} \qquad H^i(\mathbb{Z}_k;\tilde{\mathbb{Z}}) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \text{ é par} \\ \mathbb{Z}_2, & \text{se } i \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$$G \cong \mathbb{Z}_2$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[drrr] & \mathbb{Z}_2 \arrow[drrr] & 0 \arrow[drrr] & \mathbb{Z}_2 \arrow[drrr] & 0 \arrow[drrr] & \mathbb{Z}_2 \arrow[drrr] & 0 & \mathbb{Z}_2 & 0 & \cdots \\
\mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z}_k & 0 & \mathbb{Z}_k & 0 & \mathbb{Z}_k & 0 & \mathbb{Z}_k & \cdots
\end{tikzcd}$$

Grupos infinitos

Teorema (Adem, Smith)

Um grupo discreto G age livremente sobre $S^n \times \mathbb{R}^m$ para certos $m, n > 0$ se, e somente se, G é enumerável e possui cohomologia periódica.

Um grupo infinito G possui cohomologia periódica se existe um inteiro positivo q e uma classe $\alpha \in H^q(G; \mathbb{Z})$ tal que

$$\alpha \smile \_\_ : H^i(G; M) \to H^{i+q}(G; M)$$

é um isomorfismo para todo i suficientemente grande e todo $\mathbb{Z}G$-módulo M.

Grupos infinitos

- Uma n-*esfera de homotopia* $\Sigma(n)$ é um CW-complexo de dimensão finita e mesmo tipo de homotopia de S^n.
- Uma ação livre de G em $\Sigma(n)$ induz um homomorfismo $G \to \mathrm{Aut}(H^n(\Sigma(n);\mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}_2$.

Teorema

Seja $G \times \Sigma(2n) \to \Sigma(2n)$ *uma ação livre, celular e propriamente descontínua de* G *em* $\Sigma(2n)$.

- *Se* G *é finito e não trivial, então* $G \cong \mathbb{Z}_2$. *Além disso, a ação* $\mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(H^{2n}(\Sigma(2n);\mathbb{Z})$ *é não trivial.*
- *Se* G *é infinito, então* G *é livre de torção ou* $G \cong G_0 \rtimes \mathbb{Z}_2$ *para algum* G_0 *livre de torção.*

Grupos infinitos

Demonstração:
Se G é infinito e não é livre de torção, então

$$\psi \colon G \to \mathrm{Aut}(H^{2n}(\Sigma(2n);\mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}_2$$

é sobrejetor e $G_0 = \ker(\psi)$ é livre de torção. Finalmente, a extensão

$$1 \longrightarrow G_0 \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1$$

cinde, logo $G = G_0 \rtimes \mathbb{Z}_2$.

Grupos infinitos

- Dado um grupo G e um morfismo $\varphi\colon G \to \mathbb{Z}_2$, dizemos que o par (G, φ) é *realizável* em uma n-esfera de homotopia se G age em alguma $\Sigma(n)$ de modo que a ação induzida na cohomologia top de $\Sigma(n)$ é φ.
- Quais pares são realizáveis em esferas de homotopia de dimensão par?

Teorema

Se $\mathrm{cd}(G) < \infty$, *o par* (G, φ) *é realizável em uma* $2n$*-esfera de homotopia para todo* n *inteiro positivo (e qualquer* φ*).*

Demonstração: Existe um espaço $K(G, 1)$ que é um CW-complexo de dimensão finita. Tome $\Sigma(2n) = \tilde{K}(G, 1) \times S^{2n}$, $\varphi\colon G \to \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ arbitrário e defina

$$g(x, y) = (gx, \varphi(g)y).$$

Grupos infinitos

Lema (Básico)

Se o par (G, φ) *é realizável em* $\Sigma(2n)$ *para* $G = G_0 \rtimes_\theta \mathbb{Z}_2$, *então* $\theta(t)(g) = g^{-1}$ *implica* $\varphi(g, 1) = 1$.

Demonstração: Um elemento de $G \setminus \{1\}$ tem ordem finita (e igual a 2) se, e somente se, é da forma (g, t) com $\theta(t)(g) = g^{-1}$. Os elementos (g, t) e $(1, t)$ possuem ordem 2, logo $\varphi(g, 1) = 1$.

A condição geométrica

Seja G_0 tal que $\mathrm{cd}(G_0) < \infty$ e considere o grupo $G = G_0 \rtimes_\theta \mathbb{Z}_2$. Suponha que existe um complexo $K(G_0, 1)$ e um homeomorfismo $h\colon K(G_0,1) \to K(G_0,1)$ tal que $\mathrm{fix}(h) \neq \emptyset$, $h^2 = \mathrm{id}$ e $\theta(t) = h_\#$ com respeito a algum ponto fixo de h.

Teorema

Sejam $G = G_0 \rtimes_\theta \mathbb{Z}_2$ *e* $K(G_0,1)$ *como acima. Dada qualquer* $\varphi\colon G \to \mathbb{Z}_2$ *tal que* $\varphi(1,t) = -1$*, então* (G,φ) *é realizável (em alguma* $\Sigma(2n)$ *para todo* n*) se, e somente se, o Lema Básico é satisfeito.*

A condição geométrica

- Se F é um grupo livre ($\mathrm{cd}(F) = 1$) e $G = F \rtimes_\theta \mathbb{Z}_2$, então $\theta(t) \in \mathrm{Aut}(F)$ pode ser realizada geometricamente por alguma $h \colon K(F, 1) \to K(F, 1)$.
- Se A é um grupo abeliano livre de posto finito e $G = A \rtimes_\theta \mathbb{Z}_2$, então $\theta(t) \in \mathrm{Aut}(A)$ pode ser realizada geometricamente.
- Se G_0 é o grupo fundamental de uma superfície ($\mathrm{cd}(G_0) = 2$) e $G = G_0 \rtimes_\theta \mathbb{Z}_2$, é verdade que toda $\theta(t) \in \mathrm{Aut}(G_0)$ pode ser realizada geometricamente por alguma $h \colon K(G_0, 1) \to K(G_0, 1)$?