Compactificados equivariantes

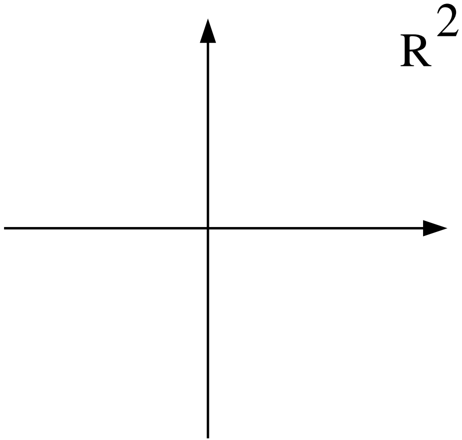
Vladimir Pestov

[1]University of Ottawa / Université d'Ottawa
Ottawa, Ontario, Canadá

[2]Universidade Federal de Santa Catarina
Florianópolis, SC, Brasil

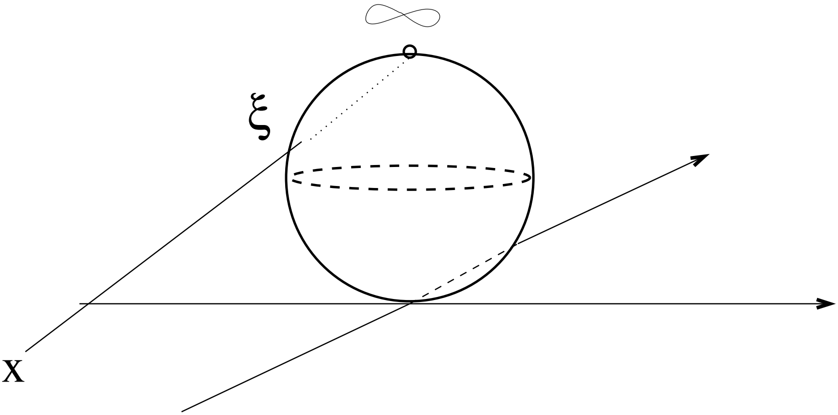
UFSC, Colóquio de Matemática,
30 do Setembro 2016

Exemplo motivador



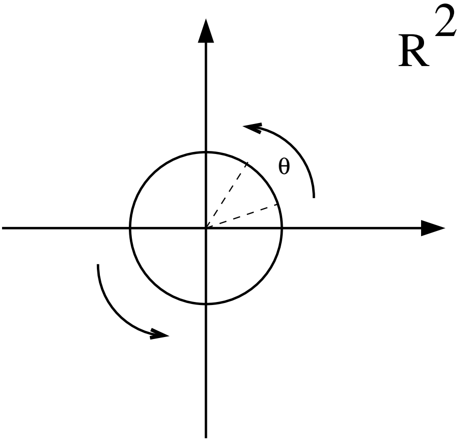
Pode-se *compactifar* (imergir num espaço compacto)?

Exemplo motivador



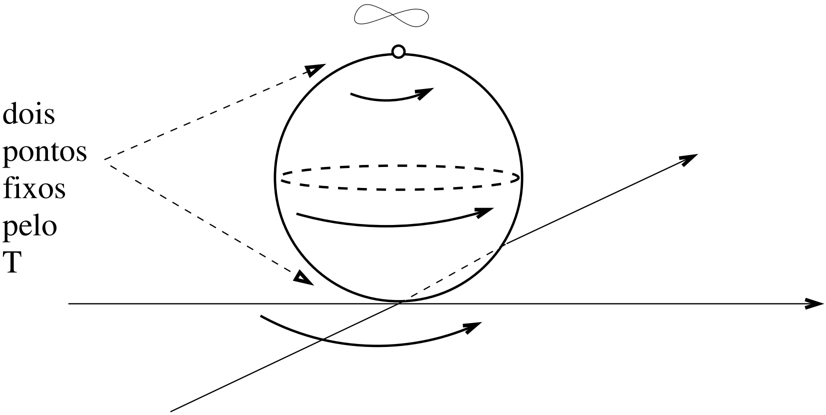
Compactificado pelo um ponto, ∞ (a esfera de Riemann)

Exemplo motivador



$\mathbb{R}^2$, munido da ação do grupo compacto $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ pelas rotações

Exemplo motivador



Compactificado pelo um ponto fixo, ∞. (Compactificado *equivariante*).

Espaços mtricos e topológicos

(X,d); a *topologia* consiste de todos os abertos:

$$V \text{ é aberto} \iff \forall x \in V \;\; \exists \varepsilon > 0, \;\; B_\varepsilon(x) \subseteq V.$$

$(X+$ topologia$)=$ um espaço topológico (esquecemos a métrica, d).

X é dito separável se existe um subconjunto enumerável denso,
$Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$, $\bar{Y} = X$

Quase todos os espaços aqui são metrizáveis, separáveis, completos (espaços *poloneses*).

Espaços métricos e topológicos

Exemplos

Espaço de Hilbert separável: ℓ^2

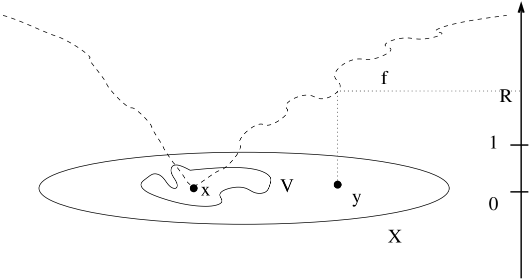
Todos as sequências de reais, $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, quadrado somáveis:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty.$$

O produto escalar: $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$. A métrica: $d(x,y) = \|x - y\|$, $\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$.

Axioma de Tychonoff $\left(T_{3\frac{1}{2}}\right)$

Um espaço topológico X é dito um espaço de Tychonoff, ou: satisfaz o axioma $T_{3\frac{1}{2}}$, se para cada $x \in X$ e cada vizinhança V de x, existe uma função contíinua $f\colon X \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 0$, e se $y \notin V$, $f(y) \geqslant 1$.

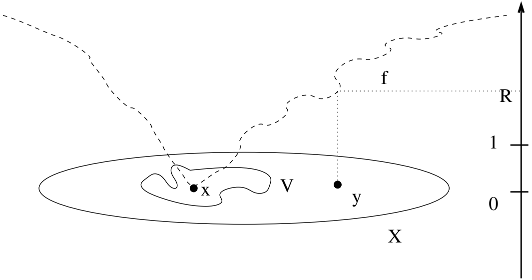


- Espaços métricos satisfazem o axioma $T_{3\frac{1}{2}}$.

$$f(y) = \frac{1}{\varepsilon} d(x, y)$$

Axioma de Tychonoff $\left(T_{3\frac{1}{2}}\right)$

Um espaço topológico X é dito um espaço de Tychonoff, ou: satisfaz o axioma $T_{3\frac{1}{2}}$, se para cada $x \in X$ e cada vizinhança V de x, existe uma função contíinua $f\colon X \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 0$, e se $y \notin V$, $f(y) \geqslant 1$.



- Espaços métricos satisfazem o axioma $T_{3\frac{1}{2}}$.

$$f(y) = \frac{1}{\varepsilon} d(x, y)$$

Espaços compactos
Noção

Um espaço métrico X é *compacto* se cada sequência (x_n) contém uma sub-sequência convergente: $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots \to x$.

Definição equivalente: se $\mathcal{F}$ é uma família de sub-conjuntos fechados cujos interseções *finitas* são não vazias, então $\cap\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Esta definição vale para espaços topológicos gerais.

Exercício: a bola fechada $B_1(0)$ no espaço ℓ^2 não é compacta.

$$e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n, \ldots$$

Espaços compactos

Noção

Um espaço métrico X é *compacto* se cada sequência (x_n) contém uma sub-sequência convergente: $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots \to x$.

Definição equivalente: se $\mathcal{F}$ é uma família de sub-conjuntos fechados cujos interseções *finitas* são não vazias, então $\cap\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Esta definição vale para espaços topológicos gerais.

Exercício: a bola fechada $B_1(0)$ no espaço ℓ^2 não é compacta.

$$e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n, \ldots$$

Espaços compactos

Exemplos

Espaços finitos; $[0,1]$; $\mathbb{S}^1$;
Exercício: Bola unitária fechada no espaço de Hilbert, munida da topologia *fraca*:

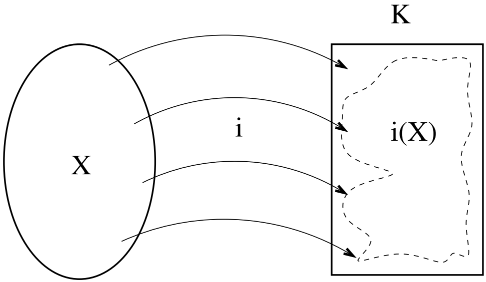
$$x_n \to x \iff \forall y,\ \langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle,$$

é compacta.

Compactificados

Noção

Sejam X um espaço topológico, K um espaço compacto, $i\colon X \to K$ uma aplicação contínua tal que $i(X)$ é denso em K (isso é, a adherência de $i(X)$ é K). Então, o par (K, i) é dito um *compactificado* de X.



Por abuso da língua, dizemos: K é um compactificado de X.

Compactificados

Exemplos

- $(0,1) \hookrightarrow [0,1]$, i é a imerção identidade.
- X é qualquer, $Y = \{*\}$ um espaço unitário, $i(x) = *$.

O compactificado dito *trivial.*

- Esfera unitária $\mathbb{S} = \{x \in \ell^2 \colon \|x\| = 1\}$,

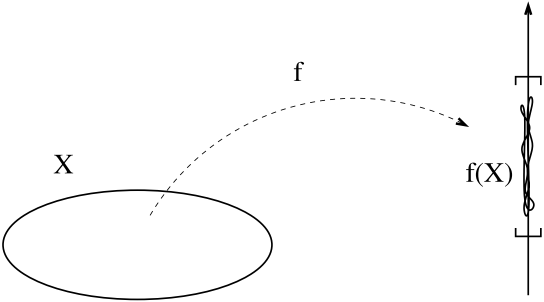
$$\mathbb{S} \hookrightarrow B_1(0), \text{ topologia fraca}$$

Exercício. A topologia da norma e a topologia fraca coincidem na esfera $\mathbb{S}$.

Compactificados e funções contínuas

Cada função contínua e *limitada* $f\colon X \to \mathbb{R}$ produz um compactificado do X:

$$K = \overline{f(X)}.$$

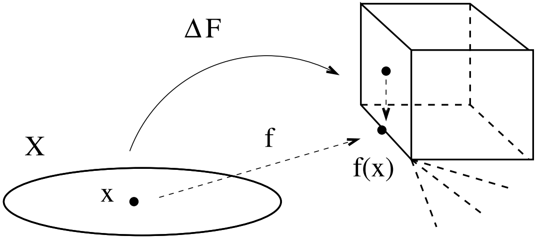


Compactificados e funções contínuas

Seja X um espaço topológico $T_{31/2}$ qualquer. Existe um compactificado $i\colon X \to K$ tal que i é uma imerção topológica: um homeomorfismo entre X e $i(X)$.

Notons $\mathcal{F}$ conjunto de funções contínuas $X \to [0,1]$.

$$X \ni x \mapsto (f(x))_{f\in\mathcal{F}} \in [0,1]^{\mathcal{F}}$$



Compactificado maximal (de Stone–Čech)

O cubo $[0,1]^{\mathcal{F}}$ é compacto (*teorema de Tychonoff*).

A adherência de X no cubo $[0,1]^{\mathcal{F}}$ é notada βX.

O compactificado *maximal*, ou *compactificado de Stone-Čech,* de X.

Cada função contínua e limitada $f\colon X\to\mathbb{R}$ prolonger-se sobre βX.

Se X é um espaço $T_{3\frac{1}{2}}$, então $i\colon X\to\beta X$ é uma imerção topológica, como um sub-espaço topológico.

Tipicamente, βX é um espaço compacto "muito grande". Por exemplo, $\beta\mathbb{N}$, $\beta\mathbb{R}$, e cetra, não são metrizáveis.

Grupos topológicos

G é um grupo $(\cdot, e, {}^{-1})$, munido de uma topologia $T_{3\frac{1}{2}}$, da maneira que as leis são contínuas:

$$G \times G \ni (g, h) \mapsto gh \in G, \quad G \ni g \mapsto g^{-1} \in G.$$

exemplos:

- $\mathbb{R}$, adição,
- $\mathbb{T} = \{x \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$, multiplicação,
- $\mathrm{Homeo}_+(0, 1)$, homeomorhismos crescentes do intervalo aberto, com a topologica pontual:
  $V(f) = \{g \colon |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon, \ i = 1, 2, \ldots, k\}$
- $O(\ell^2)$, rotações de ℓ^2, topologia pontual

Ações contínuas

Noção

O grupo topológico G age sobre o espaço X se a cada $g \in G$ corresponde um homeomorfismo $\tau_g \colon X \to X$ da maneira que

- $\tau_{gh} = \tau_h \circ \tau_h$, e
- a ação é contínua como aplicação $G \times X \to X$:

$$G \times X \ni (g, x) \mapsto \tau_g x \in X.$$

Habitualmente, denotaremos

$$\tau_g x = gx.$$

Grupos de transformações / dinâmica topológica abstrata / topologia equivariante.

Ações contínuas
Exemplos

- $\mathbb{T}$ age sobre $\mathbb{R}^2$ pelas rotações:

$$\theta \cdot (x, y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- Ação de $O(\ell^2)$ sobre ℓ^2 pelas rotações.
- Ação de $\mathrm{Homeo}_+(0,1)$ sobre $(0,1)$ pelos homeomorfismos.

Compactificados equivariantes

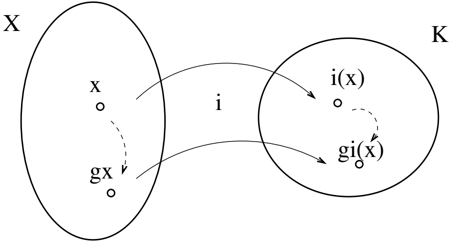
Noção

Seja um grupo topológico G age sobre um espaço X e um espaço compacto K:

$$G \circlearrowright X, \quad G \circlearrowright K.$$

Seja $i\colon X \to K$ uma aplicação contínua *equivariante:*

$$g \cdot i(x) = i(g \cdot x).$$



Se a imagem $i(X)$ é denso em K, dizemos que (K, i) é um *compactificado equivariante* de X.

Compactificados equivariantes

Exemplos

- O compactificado trivial, $X \to \{*\}$, é sempre equivariante.
- O grupo ortogonal $O(\ell^2)$ age sobre a esfera, $\mathbb{S}$, assim que sobre a bola unitária, $\mathbb{B}$, com a topologia fraca. A imerção canónica,

$$i \colon \mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{B},$$

e um compactificado equivariante da esfera.

Pergunta motivando

Existe sempre um compactificado equivariante tal que $i\colon X \hookrightarrow K$ é um homeomorfismo entre X e sua imagem, $i(X)$?

É preciso entender o "tamanho" do compactificado equivariante maximal de X. Notação: $\beta_G X$.

Por exemplo, pode ser que

$$\beta_G X = \beta X,$$

qualquer seja G?

Investigaremos para $\mathbb{T} \circlearrowright \mathbb{R}^2$. É verdade que $\beta_{\mathbb{T}}\mathbb{R}^2 = \beta\mathbb{R}^2$?

Funções τ-uniformes

Se G age sobre um compacto K, então G age sobre o espaço de Banach $C(K)$:

$$C(K) \ni f \mapsto {}^g f \in C(K), \ \ {}^g f(x) = f(g^{-1}x)$$

(um translado de f por g).

Esta ação é contínua, particularmente a *aplicação de órbita* é contínua:

$$G \ni g \mapsto {}^g f \in C(K).$$

Isso signífica:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists V \ni e, \ \ \forall x \in K, \forall g \in V, \ \ \ |f(x) - f(gx)| < \varepsilon.$$

Uma função f que satisfaz esta condição, é dita τ*-uniforme*.

Funções τ-uniformes

Se $G \curvearrowright X$, então uma $f\colon X \to \mathbb{R}$ limitada é τ-uniforme se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \ni e,\ \ \forall x \in K, \forall g \in V,\quad |f(x) - f(gx)| < \varepsilon.$$

Uma $f\colon X \to \mathbb{R}$ prolonge-se sobre $\beta_G X$ se e somente se f é τ-uniforme.

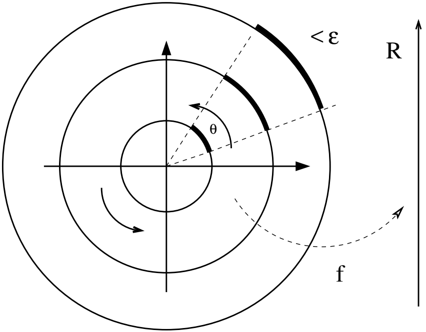
Relembramos: *cada* função contínua e limitada prolonge-se sobre βX.

Para mostrar que $\beta_{\mathbb{T}}\mathbb{R}^2$ é menor que $\beta\mathbb{R}^2$, basta monstrar uma função contínua limitada $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que não é τ-uniforme.

Funções τ-uniformes: caso $\mathbb{T} \circlearrowright \mathbb{R}^2$

Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \theta > 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall \phi,\ \ |\phi| < \theta \Rightarrow |f(x) - f(\phi x)| < \varepsilon.$$



Por exemplo, $f(x) = \cos x_1$ não é τ-uniforme. $\therefore\ \beta_{\mathbb{T}}\mathbb{R}^2 \neq \beta\mathbb{R}^2$.

Caso de grupos localmente compactos

R. Palais - grupos de Lie (1960); Jan de Vries - caso geral (1977)

Pergunta: Existe sempre um compactificado equivariante tal que $i\colon X \hookrightarrow K$ é um homeomorfismo entre X e sua imagem, $i(X)$?

teorema: Si G é localmente compacto, sim: X imerge-se, como um sub-espaço topológico e da maneira equivariante, em $\beta_G X$.

Por exemplo, todos os grupos compactos, todos os grupos de matrizes, ...

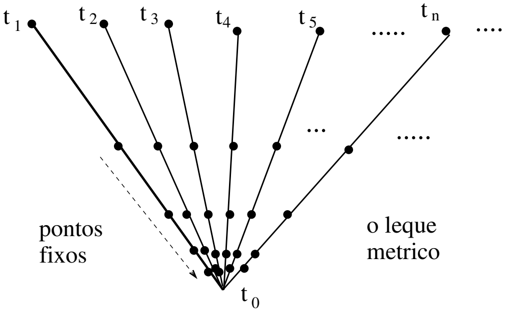
$\lhd$ Basta construir muitas funções τ-uniformes que separam os pontos e os conjuntos fechados – como no axioma $T_{3\frac{1}{2}}$. A técnica parecida ao lema de Titze-Urysohn. $\rhd$

A técnica destas funções é útil pelos sistemas dinâmicos topológicos – se o grupo agindo não for discreto.

Caso geral

Exemplo do Michael Megrelishvili (1988)

Um grupo polonês G agindo sobre um espaço polonês X de maneira que $i\colon X \to \beta_G X$ não é um homeomorfismo sobre a imagem.

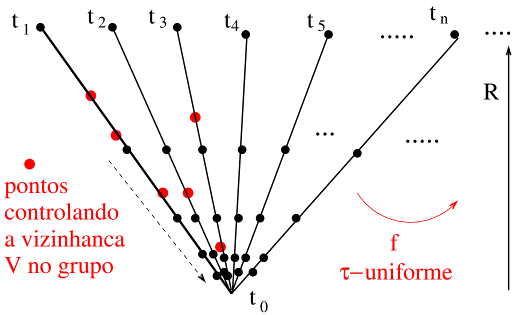


X é o leque métrico; $d(t_i, t_j) = 2$, $\forall i \neq j$;
G é o grupo de homeomorfismos consevando os pontos fixos, com a topologia de convergência simples (compacto-aberta)

Caso geral

Exemplo do Michael Megrelishvili (1988)

Um grupo polonês G agindo sobre um espaço polonês X de maneira que $i\colon X \to \beta_G X$ não é um homeomorfismo sobre a imagem.



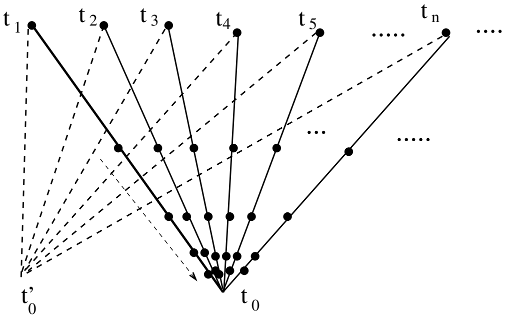
Qual quer seja $\varepsilon > 0$, sobre todos segmentos exceito um número finito, f tem uma oscilação $< \varepsilon$.

$\therefore$ em $\beta_G X$, temos $i(t_n) \to i(t_0)$. (em X, não).

Caso geral

Exemplo do Michael Megrelishvili (1988)

Um grupo polonês G agindo sobre um espaço polonês X de maneira que $i\colon X \to \beta_G X$ não é um homeomorfismo sobre a imagem.



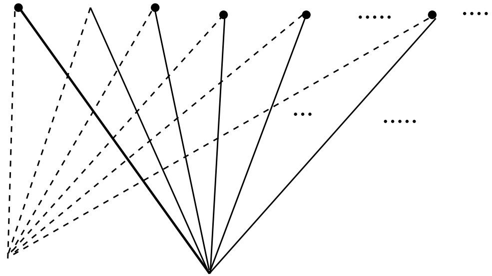
Em $\beta_G X$, temos $i(t_n) \to i(t_0)$ e $i(t_n) \to i(t'_0)$,
$\therefore i(t_0) = i(t'_0)$, i não é injetiva!

Caso geral

Meu exemplo (Dez. 2015)

Pergunta (Yu. Smirnov, meados de 1980): Existe um grupo topológico G agindo sobre um espaço X da maneira que $\beta_G X = \{ast\}$?

Sim. A construção recursiva.

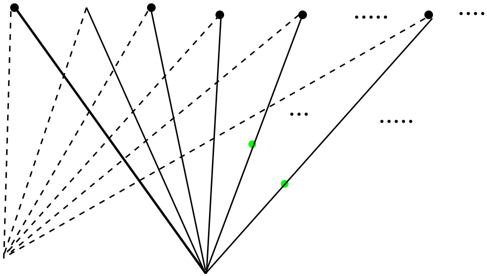


Caso geral

Meu exemplo (Dez. 2015)

Pergunta (Yu. Smirnov, meados de 1980): Existe um grupo topológico G agindo sobre um espaço X da maneira que $\beta_G X = \{ast\}$?

Sim. A construção recursiva.

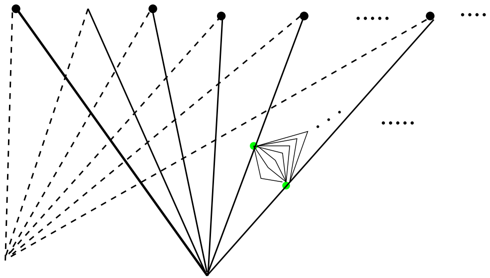


Caso geral

Meu exemplo (2016, arXiv:1601.03084)

Pergunta (Yu. Smirnov, meados de 1980): Existe um grupo topológico G agindo sobre um espaço X da maneira que $\beta_G X = \{ast\}$?

Sim. A construção recursiva.



Podemos obter um espaço $X \cong \mathbb{Q}$, e um grupo agindo polonês, G. Não tem compactificados equivariantes não triviais.

Uma pergunta aberta

Existe um exemplo “natural” de um grupo topológico G agindo sobre um espaço X da maneira que $\beta_G X = \{*\}$?

Pode ser um grupo de homeomorfismos de ℓ^2?