Transporte ótimo: de Monge a Kolmogorov

Christian S. Rodrigues

IMECC - Unicamp
Campinas

Florianópolis - 14 de julho de 2016

Colóquio do Departamento de Matemática - UFSC

Sistemas Dinâmicos

Seja $f(x) = cos(x)$ e definamos $x_{j+1} = f(x_j)$ para $j \geq 0$.

Escolhendo a condição inicial $x_0 = 1$ obtemos:

$$x_1 = cos(x_0) = 0,5403$$
$$x_2 = cos(x_1) = 0,8576$$
$$x_3 = cos(x_2) = 0,6543$$
$$\vdots$$
$$x_{23} = cos(x_{22}) = 0,7390$$
$$x_{24} = cos(x_{23}) = 0,7391$$
$$x_{25} = cos(x_{24}) = 0,7391$$

Exemplo de sistema dinâmico

$$x_{j+1} = \underbrace{f \circ \cdots \circ f(x_0)}_{\text{j + 1 composições}}$$

Sistemas Dinâmicos

Seja $f(x) = cos(x)$ e definamos $x_{j+1} = f(x_j)$ para $j \geq 0$.
Escolhendo a condição inicial $x_0 = 1$ obtemos:

$$x_1 = cos(x_0) = 0,5403$$
$$x_2 = cos(x_1) = 0,8576$$
$$x_3 = cos(x_2) = 0,6543$$
$$\vdots$$
$$x_{23} = cos(x_{22}) = 0,7390$$
$$x_{24} = cos(x_{23}) = 0,7391$$
$$x_{25} = cos(x_{24}) = 0,7391$$

Exemplo de sistema dinâmico

$$x_{j+1} = \underbrace{f \circ \cdots \circ f(x_0)}_{\text{j + 1 composições}}$$

Sistemas Dinâmicos

Seja $f(x) = cos(x)$ e definamos $x_{j+1} = f(x_j)$ para $j \geq 0$.
Escolhendo a condição inicial $x_0 = 1$ obtemos:

$x_1 = cos(x_0) = 0,5403$
$x_2 = cos(x_1) = 0,8576$
$x_3 = cos(x_2) = 0,6543$

$\vdots$

$x_{23} = cos(x_{22}) = 0,7390$
$x_{24} = cos(x_{23}) = 0,7391$
$x_{25} = cos(x_{24}) = 0,7391$

Exemplo de sistema dinâmico

$$x_{j+1} = \underbrace{f \circ \cdots \circ f(x_0)}_{\text{j + 1 composições}}$$

Sistemas Dinâmicos

Seja $f(x) = cos(x)$ e definamos $x_{j+1} = f(x_j)$ para $j \geq 0$.
Escolhendo a condição inicial $x_0 = 1$ obtemos:

$x_1 = cos(x_0) = 0,5403$
$x_2 = cos(x_1) = 0,8576$
$x_3 = cos(x_2) = 0,6543$

$\vdots$

$x_{23} = cos(x_{22}) = 0,7390$
$x_{24} = cos(x_{23}) = 0,7391$
$x_{25} = cos(x_{24}) = 0,7391$

Exemplo de sistema dinâmico

$$x_{j+1} = \underbrace{f \circ \cdots \circ f(x_0)}_{\text{j + 1 composições}}$$

Sistemas Dinâmicos

Seja $f(x) = cos(x)$ e definamos $x_{j+1} = f(x_j)$ para $j \geq 0$.
Escolhendo a condição inicial $x_0 = 1$ obtemos:

$$x_1 = cos(x_0) = 0,5403$$
$$x_2 = cos(x_1) = 0,8576$$
$$x_3 = cos(x_2) = 0,6543$$
$$\vdots$$
$$x_{23} = cos(x_{22}) = 0,7390$$
$$x_{24} = cos(x_{23}) = 0,7391$$
$$x_{25} = cos(x_{24}) = 0,7391$$

Exemplo de sistema dinâmico

$$x_{j+1} = \underbrace{f \circ \cdots \circ f(x_0)}_{\text{j + 1 composições}}$$

Sistemas Dinâmicos

Seja $f(x) = cos(x)$ e definamos $x_{j+1} = f(x_j)$ para $j \geq 0$.
Escolhendo a condição inicial $x_0 = 1$ obtemos:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= cos(x_0) = 0,5403 \\
x_2 &= cos(x_1) = 0,8576 \\
x_3 &= cos(x_2) = 0,6543 \\
&\vdots \\
x_{23} &= cos(x_{22}) = 0,7390 \\
x_{24} &= cos(x_{23}) = 0,7391 \\
x_{25} &= cos(x_{24}) = 0,7391
\end{aligned}
$$

Exemplo de sistema dinâmico

$$x_{j+1} = \underbrace{f \circ \cdots \circ f(x_0)}_{\text{j + 1 composições}}$$

Sistemas Dinâmicos

Seja $f(x) = cos(x)$ e definamos $x_{j+1} = f(x_j)$ para $j \geq 0$.
Escolhendo a condição inicial $x_0 = 1$ obtemos:

$$x_1 = cos(x_0) = 0,5403$$
$$x_2 = cos(x_1) = 0,8576$$
$$x_3 = cos(x_2) = 0,6543$$
$$\vdots$$
$$x_{23} = cos(x_{22}) = 0,7390$$
$$x_{24} = cos(x_{23}) = 0,7391$$
$$x_{25} = cos(x_{24}) = 0,7391$$

Exemplo de sistema dinâmico

$$x_{j+1} = \underbrace{f \circ \cdots \circ f(x_0)}_{\text{j + 1 composições}}$$

Sistemas Dinâmicos

Seja $f(x) = cos(x)$ e definamos $x_{j+1} = f(x_j)$ para $j \geq 0$.
Escolhendo a condição inicial $x_0 = 1$ obtemos:

$$x_1 = cos(x_0) = 0,5403$$
$$x_2 = cos(x_1) = 0,8576$$
$$x_3 = cos(x_2) = 0,6543$$
$$\vdots$$
$$x_{23} = cos(x_{22}) = 0,7390$$
$$x_{24} = cos(x_{23}) = 0,7391$$
$$x_{25} = cos(x_{24}) = 0,7391$$

Exemplo de sistema dinâmico

$$x_{j+1} = \underbrace{f \circ \cdots \circ f(x_0)}_{\text{j + 1 composições}}$$

Sistemas Dinâmicos

Seja $f(x) = cos(x)$ e definamos $x_{j+1} = f(x_j)$ para $j \geq 0$.
Escolhendo a condição inicial $x_0 = 1$ obtemos:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= cos(x_0) = 0,5403 \\
x_2 &= cos(x_1) = 0,8576 \\
x_3 &= cos(x_2) = 0,6543 \\
&\vdots \\
x_{23} &= cos(x_{22}) = 0,7390 \\
x_{24} &= cos(x_{23}) = 0,7391 \\
x_{25} &= cos(x_{24}) = 0,7391
\end{aligned}
$$

Exemplo de sistema dinâmico

$$x_{j+1} = \underbrace{f \circ \cdots \circ f(x_0)}_{\text{j + 1 composições}}$$

Sistemas Dinâmicos

Seja $f : M \to M$ (tempo discreto) em algum espaço M.
Objetivos da teoria de Sistema Dinâmicos: para a “maioria” das condições iniciais

- descrever o comportamento dinâmico e
- analisar sua estabilidade quanto a perturbações.

Examplo: CAT map de Arnold

Obs.: verifique o link: https://www.jasondavies.com/catmap/
Considere o torus $\mathbb{T}^2$ dado pelo quociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.
Seja $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ dado por

$$f : (x, y) \to (2x + y, x + y) \text{ mod } 1.$$

Para quase todo $z \in \mathbb{T}^2$ e qualquer "observável" $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$, pode-se provar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(z)) = \int \varphi dm,$$

onde $m =$ medida de Lebesgue (volume) em $\mathbb{T}^2$.

Medida Física (SRB)

Medida Física: uma medida de probabilidade μ é *física* se para um conjunto $B(\mu)$ de $x \in M$ com medida de Lebesgue (volume) positiva

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu,$$

para toda função contínua $\varphi : M \to \mathbb{R}$.

- Significa que pontos em $B(\mu)$ geram órbitas típicas.

Cadeias de Markov

Seja $f : M \to M$ de classe C^r para $r \geq 0$ e um pequeno parâmetro de perturbação $\varepsilon > 0$.
Cadeia de Markov: uma família de medidas de probabilidades $\{p_\varepsilon(\,\cdot\,|x)\}$.

- Toda $p_\varepsilon(\,\cdot\,|x)$ tem suporte dentro de uma ε-vizinhança de $f(x)$.
- Órbita aleatória: $\{x_j\}$ onde cada x_{j+1} tem distribuição $p_\varepsilon(\,\cdot\,|x_j)$.
- Salta $x_j \mapsto f(x_j)$ e dispersa com distribuição $p_\varepsilon(\,\cdot\,|x_j)$.

Iteração de mapas aleatórios

Considere $f : M \to M$ de classe C^r para $r \geq 0$ e um pequeno parâmetro de perturbação $\varepsilon > 0$.
A órbita aleatória é dada

- Assumindo a existência de uma família de probabilidades $\{\nu_\varepsilon\}$ no espaço dos C^r-mapas
- Suporte de ν_ε está em uma ε-vizinhança f.
- A órbita aleatória é: $x_j = f_{\omega_j} \circ \cdots \circ f_{\omega_1}(x_0)$.

Medida Física para a dinâmica aleatória

Sob condições gerais, prova-se a existência de medida invariante única μ_ε para pequenos parâmetros de perturbação $\varepsilon > 0$.
Mostra-se ainda a existência de medida física:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f_\omega^j(x)) \to \int \varphi d\mu_\varepsilon$$

para quase toda órbita aleatória e toda $\varphi : M \to \mathbb{R}$.

Medida Física para a dinâmica aleatória

Sob condições gerais, prova-se a existência de medida invariante única μ_ε para pequenos parâmetros de perturbação $\varepsilon > 0$.
Mostra-se ainda a existência de medida física:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f_\omega^j(x)) \to \int \varphi d\mu_\varepsilon$$

para quase toda órbita aleatória e toda $\varphi : M \to \mathbb{R}$.

Estabilidade estocástica

O sistema (f, μ) é estocasticamente estável sob o esquema de perturbações $\{p_\varepsilon(\cdot\,|x)\}$ ou $\{\nu_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ se

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int \varphi d\mu_\varepsilon = \int \varphi d\mu \quad \text{para toda } \varphi : M \to \mathbb{R} \text{ contínua.}$$

- Diversas contribuições para o entendimento de estabilidade estocástica: Sinai, Kifer, L.-S. Young, Keller, Araújo, Alves, Benedicks, Viana, etc.
- Argumentos: assumem existência de probabilidade no espaço dos mapas, $\nu_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \delta_f$, controle de distorção, hyperbolic times, formalismo termodinâmico, etc.
- Questões: dependência nas distribuições de probabilidade das cadeias de Markov, relação com propriedades estruturais, sombreamento, etc.

Estabilidade estocástica

O sistema (f, μ) é estocasticamente estável sob o esquema de perturbações $\{p_\varepsilon(\cdot\,|x)\}$ ou $\{\nu_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ se

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int \varphi d\mu_\varepsilon = \int \varphi d\mu \quad \text{para toda } \varphi : M \to \mathbb{R} \text{ contínua.}$$

- Diversas contribuições para o entendimento de estabilidade estocástica: Sinai, Kifer, L.-S. Young, Keller, Araújo, Alves, Benedicks, Viana, etc.
- Argumentos: assumem existência de probabilidade no espaço dos mapas, $\nu_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \delta_f$, controle de distorção, hyperbolic times, formalismo termodinâmico, etc.
- Questões: dependência nas distribuições de probabilidade das cadeias de Markov, relação com propriedades estruturais, sombreamento, etc.

Estabilidade estocástica

O sistema (f, μ) é estocasticamente estável sob o esquema de perturbações $\{p_\varepsilon(\cdot\,|x)\}$ ou $\{\nu_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ se

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int \varphi d\mu_\varepsilon = \int \varphi d\mu \quad \text{para toda } \varphi : M \to \mathbb{R} \text{ contínua.}$$

- Diversas contribuições para o entendimento de estabilidade estocástica: Sinai, Kifer, L.-S. Young, Keller, Araújo, Alves, Benedicks, Viana, etc.
- Argumentos: assumem existência de probabilidade no espaço dos mapas, $\nu_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \delta_f$, controle de distorção, hyperbolic times, formalismo termodinâmico, etc.
- Questões: dependência nas distribuições de probabilidade das cadeias de Markov, relação com propriedades estruturais, sombreamento, etc.

Representação de cadeias de Markov

A sequência de mapas aleatórios é uma representação da cadeia de Markov se para todo Borel U

$$p_\varepsilon(U|x) = \nu_\varepsilon(\{f_\omega : f_\omega(x) \in U\}).$$

- Algumas contribuições: Blumenthal and Corson '70, Kifer '86, Quas '91, Araújo '00, Benedicks and Viana '06.
- Nós obtivemos resultados mais gerais em termos de transporte de medidas.

Representação de cadeias de Markov

A sequência de mapas aleatórios é uma representação da cadeia de Markov se para todo Borel U

$$p_\varepsilon(U|x) = \nu_\varepsilon(\{f_\omega : f_\omega(x) \in U\}).$$

- Algumas contribuições: Blumenthal and Corson '70, Kifer '86, Quas '91, Araújo '00, Benedicks and Viana '06.
- Nós obtivemos resultados mais gerais em termos de transporte de medidas.

Transporte ótimo

- Problema inicial (G. Monge, 1781): mover um monte de areia de um lugar ao outro a custo mínimo.
- Formulação moderna: dadas medidas de probabilidade μ e ν, encontre um mapa mensurável T, tal que

$$\min_{S_*\mu=\nu}\left\{\int_X c(x,S(x))d\mu(x)\right\},$$

onde $c : X \times Y \to [0,\infty]$ é uma função de *custo* dada e o mínimo é tomado sobre todos os mapas mensuráveis $S : X \to Y$, tais que $S_*\mu = \nu$.

Transporte ótimo

- Problema inicial (G. Monge, 1781): mover um monte de areia de um lugar ao outro a custo mínimo.
- Formulação moderna: dadas medidas de probabilidade μ e ν, encontre um mapa mensurável T, tal que

$$\min_{S_*\mu=\nu} \left\{ \int_X c(x, S(x)) d\mu(x) \right\},$$

onde $c : X \times Y \to [0, \infty]$ é uma função de *custo* dada e o mínimo é tomado sobre todos os mapas mensuráveis $S : X \to Y$, tais que $S_*\mu = \nu$.

A equação de Monge-Ampère

Alternativa: soluções fracas (Kantorovich): γ em $X \times Y$, com $\pi_{\mathcal{P}(X)*}\gamma = \mu$ e $\pi_{\mathcal{P}(Y)*}\gamma = \nu$,
Problema de minimização:

$$C(\mu, \nu) = \inf_{\gamma \in \mathcal{P}(X \times Y)} \int_{X \times Y} c(x, y) d\gamma(x, y),$$

$c : X \times Y \to [0, +\infty]$.
Resolvendo o problema de Kantorovich:

- Formulação dual em termos de funções "custo" convexas.
- Dualidade $\to$ existência de mapas de transporte ótimo na forma: $\sim \nabla u$

Equações de Jacobi: $S_* \mu = \nu \to$ Equação de Monge-Ampère.

Regularidade das soluções $u \Rightarrow$ regularidade dos mapas de transporte

A equação de Monge-Ampère

Alternativa: soluções fracas (Kantorovich): γ em $X \times Y$, com $\pi_{\mathcal{P}(X)*}\gamma = \mu$ e $\pi_{\mathcal{P}(Y)*}\gamma = \nu$,
Problema de minimização:

$$C(\mu, \nu) = \inf_{\gamma \in \mathcal{P}(X \times Y)} \int_{X \times Y} c(x, y) d\gamma(x, y),$$

$c : X \times Y \to [0, +\infty]$.
Resolvendo o problema de Kantorovich:

- Formulação dual em termos de funções "custo" convexas.
- Dualidade $\to$ existência de mapas de transporte ótimo na forma: $\sim \nabla u$

Equações de Jacobi: $S_* \mu = \nu \to$ Equação de Monge-Ampère.

Regularidade das soluções $u \Rightarrow$ regularidade dos mapas de transporte

A equação de Monge-Ampère

Alternativa: soluções fracas (Kantorovich): γ em $X \times Y$, com
$\pi_{\mathcal{P}(X)*}\gamma = \mu$ e $\pi_{\mathcal{P}(Y)*}\gamma = \nu$,
Problema de minimização:

$$C(\mu, \nu) = \inf_{\gamma \in \mathcal{P}(X \times Y)} \int_{X \times Y} c(x, y) d\gamma(x, y),$$

$c : X \times Y \to [0, +\infty]$.
Resolvendo o problema de Kantorovich:

- Formulação dual em termos de funções "custo" convexas.
- Dualidade $\to$ existência de mapas de transporte ótimo na forma: $\sim \nabla u$

Equações de Jacobi: $S_* \mu = \nu \to$ Equação de Monge-Ampère.

Regularidade das soluções $u \Rightarrow$ regularidade dos mapas de transporte

A equação de Monge-Ampère

Alternativa: soluções fracas (Kantorovich): γ em $X \times Y$, com $\pi_{\mathcal{P}(X)*}\gamma = \mu$ e $\pi_{\mathcal{P}(Y)*}\gamma = \nu$,
Problema de minimização:

$$C(\mu, \nu) = \inf_{\gamma \in \mathcal{P}(X \times Y)} \int_{X \times Y} c(x, y) d\gamma(x, y),$$

$c : X \times Y \to [0, +\infty]$.
Resolvendo o problema de Kantorovich:

- Formulação dual em termos de funções "custo" convexas.
- Dualidade $\to$ existência de mapas de transporte ótimo na forma: $\sim \nabla u$

Equações de Jacobi: $S_* \mu = \nu \to$ Equação de Monge-Ampère.

Regularidade das soluções $u \Rightarrow$ regularidade dos mapas de transporte

Representação de medidas

Considere uma família de probabilidades $\{\mu_x\}_{x\in X}$ em uma variedade Riemanniana M, parametrizada por uma variedade Riemanniana X
Uma representação de $\{\mu_x\}_{x\in X}$ é um mapa $T : X \times \Omega \to M$, tal que, para cada $x \in X$, vale

$$\mu_x = T(x, \cdot)_* \mathbb{P},$$

onde $(\Omega, \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade auxiliar, e $T(x, \cdot)_* \mathbb{P}$ a push forward de $\mathbb{P}$ por $T(x, \cdot)$.

Resultado principal

Teorema (Jost, Matveev, Portegies, Rodrigues - preprint 2016)

Considere $\{\mu_x\}_{x\in X}$ uma família de probabilidades em uma var. Riemanniana compacta, orientável e conexa M com bordo de classe C^{k+2} para $k \in \mathbb{N}$, parametrizada por uma var. Riemanniana X de classe C^k, com densidades $\rho \in C^k(X \times M) > 0$ no interior de M e decaimento perto do bordo apropriado. Então ela pode ser representada por mapas aleatórios $C^k(X, M)$.

Outros resultados: Jost, Kell, Rodrigues, *Calculus of Variations and PDE's* 2015

Obrigado pela atenção!