Grupos shift enumeráveis

Marcelo Sobottka
UFSC-Brazil

Este é um trabalho conjunto com Prof. Daniel Gonçalves (UFSC) e Dr. Charles Starling (uOttawa).

Colóquio do Departamento de Matemática - UFSC

- Seja A um conjunto enumerável com a topologia discreta
- O **full shift** sobre A é o conjunto

$$A^{\mathbb{S}} := \{(x_i)_{i\in\mathbb{S}} : \ x_i \in A \quad \forall i \in \mathbb{S}\},$$

  onde $\mathbb{S} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{S} = \mathbb{Z}$
- Considere em $A^{\mathbb{S}}$ a topologia dos **cilindros**:

$$[a_0a_1\ldots a_n]_j := \{x \in \Lambda : \ x_{j+i} = a_i \ 0 \le i \le n\}$$

- **Shift map:**

$$\begin{aligned} \sigma \ : \ & A^{\mathbb{S}} \to A^{\mathbb{S}} \\ & (x_i)_{i\in\mathbb{S}} \mapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{S}} \end{aligned}$$

- um **espaço shift** sobre A é qualquer conjunto $\Lambda \subset A^{\mathbb{S}}$ fechado e σ-invariante.

- Seja A um conjunto enumerável com a topologia discreta
- O **full shift** sobre A é o conjunto

$$A^{\mathbb{S}} := \{(x_i)_{i\in\mathbb{S}} : \ x_i \in A \quad \forall i \in \mathbb{S}\},$$

onde $\mathbb{S} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{S} = \mathbb{Z}$

- Considere em $A^{\mathbb{S}}$ a topologia dos **cilindros**:

$$[a_0 a_1 \dots a_n]_j := \{x \in \Lambda : \ x_{j+i} = a_i \ 0 \leq i \leq n\}$$

- **Shift map:**

$$\begin{aligned} \sigma \quad : \quad & A^{\mathbb{S}} \to A^{\mathbb{S}} \\ & (x_i)_{i\in\mathbb{S}} \mapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{S}} \end{aligned}$$

- um **espaço shift** sobre A é qualquer conjunto $\Lambda \subset A^{\mathbb{S}}$ fechado e σ-invariante.

- Seja A um conjunto enumerável com a topologia discreta
- O **full shift** sobre A é o conjunto

$$A^{\mathbb{S}} := \{(x_i)_{i\in\mathbb{S}} : \ x_i \in A \quad \forall i \in \mathbb{S}\},$$

onde $\mathbb{S} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{S} = \mathbb{Z}$

- Considere em $A^{\mathbb{S}}$ a topologia dos **cilindros**:

$$[a_0 a_1 \dots a_n]_j := \{x \in \Lambda : \ x_{j+i} = a_i \ 0 \le i \le n\}$$

- **Shift map:**

$$\begin{aligned} \sigma \ : \ & A^{\mathbb{S}} \to A^{\mathbb{S}} \\ & (x_i)_{i\in\mathbb{S}} \mapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{S}} \end{aligned}$$

- um **espaço shift** sobre A é qualquer conjunto $\Lambda \subset A^{\mathbb{S}}$ fechado e σ-invariante.

- Seja A um conjunto enumerável com a topologia discreta
- O **full shift** sobre A é o conjunto

$$A^{\mathbb{S}} := \{(x_i)_{i\in\mathbb{S}} : \ x_i \in A \quad \forall i \in \mathbb{S}\},$$

  onde $\mathbb{S} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{S} = \mathbb{Z}$
- Considere em $A^{\mathbb{S}}$ a topologia dos **cilindros**:

$$[a_0 a_1 \dots a_n]_j := \{x \in \Lambda : \ x_{j+i} = a_i \ 0 \le i \le n\}$$

- **Shift map:**

$$\begin{aligned} \sigma \quad : \quad & A^{\mathbb{S}} \to A^{\mathbb{S}} \\ & (x_i)_{i\in\mathbb{S}} \mapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{S}} \end{aligned}$$

- um **espaço shift** sobre A é qualquer conjunto $\Lambda \subset A^{\mathbb{S}}$ fechado e σ-invariante.

- Seja A um conjunto enumerável com a topologia discreta
- O **full shift** sobre A é o conjunto

$$A^{\mathbb{S}} := \{(x_i)_{i\in\mathbb{S}} : \ x_i \in A \quad \forall i \in \mathbb{S}\},$$

  onde $\mathbb{S} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{S} = \mathbb{Z}$
- Considere em $A^{\mathbb{S}}$ a topologia dos **cilindros**:

$$[a_0 a_1 \dots a_n]_j := \{x \in \Lambda : \ x_{j+i} = a_i \; 0 \leq i \leq n\}$$

- **Shift map:**

$$\begin{aligned} \sigma \quad : \quad & A^{\mathbb{S}} \to A^{\mathbb{S}} \\ & (x_i)_{i\in\mathbb{S}} \mapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{S}} \end{aligned}$$

- um **espaço shift** sobre A é qualquer conjunto $\Lambda \subset A^{\mathbb{S}}$ fechado e σ-invariante.

- Seja A um conjunto enumerável com a topologia discreta
- O **full shift** sobre A é o conjunto

$$A^{\mathbb{S}} := \{(x_i)_{i\in\mathbb{S}} : \ x_i \in A \quad \forall i \in \mathbb{S}\},$$

onde $\mathbb{S} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{S} = \mathbb{Z}$

- Considere em $A^{\mathbb{S}}$ a topologia dos **cilindros**:

$$[a_0 a_1 \dots a_n]_j := \{x \in \Lambda : \ x_{j+i} = a_i \ 0 \le i \le n\}$$

- **Shift map:**

$$\begin{aligned} \sigma \quad : \quad & A^{\mathbb{S}} \to A^{\mathbb{S}} \\ & (x_i)_{i\in\mathbb{S}} \mapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{S}} \end{aligned}$$

- um **espaço shift** sobre A é qualquer conjunto $\Lambda \subset A^{\mathbb{S}}$ fechado e σ-invariante.

- Para cada $n \geq 1$, seja

$$B_n(\Lambda) := \{(a_1 \dots a_n) : \exists x \in \Lambda,\ i \in \mathbb{S},\ x_{i+j-1} = a_j\ \forall j = 1, \dots, n\};$$

- a **linguagem** de Λ é

$$B(\Lambda) := \bigcup_{n \geq 1} B_n(\Lambda);$$

- denotaremos o conjunto das letras usadas em Λ por $L_\Lambda := B_1(\Lambda)$;
- dado $a \in B(A^{\mathbb{S}})$, o *k*-**ésimo follower set** de a em Λ é o conjunto

$$\mathcal{F}_k(\Lambda, a) := \{b \in B_k(\Lambda) :\ ab \in B(\Lambda)\};$$

- Analogamente se define $\mathcal{P}_k(\Lambda, a)$, o *k*-**ésimo predecessor set** de a em Λ.

- Para cada $n \geq 1$, seja

$$B_n(\Lambda) := \{(a_1 \dots a_n) : \exists x \in \Lambda,\ i \in \mathbb{S},\ x_{i+j-1} = a_j\ \forall j = 1, \dots, n\};$$

- a **linguagem** de Λ é

$$B(\Lambda) := \bigcup_{n \geq 1} B_n(\Lambda);$$

- denotaremos o conjunto das letras usadas em Λ por $L_\Lambda := B_1(\Lambda)$;
- dado $a \in B(A^{\mathbb{S}})$, o k**-ésimo follower set** de a em Λ é o conjunto

$$\mathcal{F}_k(\Lambda, a) := \{b \in B_k(\Lambda) : \ ab \in B(\Lambda)\};$$

- Analogamente se define $\mathcal{P}_k(\Lambda, a)$, o k**-ésimo predecessor set** de a em Λ.

- Para cada $n \geq 1$, seja

$$B_n(\Lambda) := \{(a_1 \dots a_n) : \ \exists x \in \Lambda, \ i \in \mathbb{S}, \ x_{i+j-1} = a_j \ \forall j = 1, \dots, n\};$$

- a **linguagem** de Λ é

$$B(\Lambda) := \bigcup_{n \geq 1} B_n(\Lambda);$$

- denotaremos o conjunto das letras usadas em Λ por $L_\Lambda := B_1(\Lambda)$;
- dado $a \in B(A^{\mathbb{S}})$, o k**-ésimo follower set** de a em Λ é o conjunto

$$\mathcal{F}_k(\Lambda, a) := \{b \in B_k(\Lambda) : \ ab \in B(\Lambda)\};$$

- Analogamente se define $\mathcal{P}_k(\Lambda, a)$, o k**-ésimo predecessor set** de a em Λ.

- Para cada $n \geq 1$, seja

  $$B_n(\Lambda) := \{(a_1 \dots a_n) : \exists x \in \Lambda,\ i \in \mathbb{S},\ x_{i+j-1} = a_j\ \forall j = 1, \dots, n\};$$

- a **linguagem** de Λ é

  $$B(\Lambda) := \bigcup_{n \geq 1} B_n(\Lambda);$$

- denotaremos o conjunto das letras usadas em Λ por $L_\Lambda := B_1(\Lambda)$;
- dado $a \in B(A^{\mathbb{S}})$, o ***k*-ésimo follower set** de a em Λ é o conjunto

  $$\mathcal{F}_k(\Lambda, a) := \{b \in B_k(\Lambda) :\ ab \in B(\Lambda)\};$$

- Analogamente se define $\mathcal{P}_k(\Lambda, a)$, o ***k*-ésimo predecessor set** de a em Λ.

- Para cada $n \geq 1$, seja

$$B_n(\Lambda) := \{(a_1 \dots a_n) : \exists x \in \Lambda,\ i \in \mathbb{S},\ x_{i+j-1} = a_j\ \forall j = 1, \dots, n\};$$

- a **linguagem** de Λ é

$$B(\Lambda) := \bigcup_{n \geq 1} B_n(\Lambda);$$

- denotaremos o conjunto das letras usadas em Λ por $L_\Lambda := B_1(\Lambda)$;
- dado $a \in B(A^{\mathbb{S}})$, o ***k*-ésimo follower set** de a em Λ é o conjunto

$$\mathcal{F}_k(\Lambda, a) := \{b \in B_k(\Lambda) : \ ab \in B(\Lambda)\};$$

- Analogamente se define $\mathcal{P}_k(\Lambda, a)$, o ***k*-ésimo predecessor set** de a em Λ.

- Dizemos que um grupo $(\Lambda, *)$ é um **grupo shift**, se Λ é espaço *shift* e $*$ é contínua e σ é automorfismo para $*$;
- Se $(\Lambda, *)$ é grupo *shift*, se e só se $*$ é um *siilding block code* de $\Lambda \times \Lambda$ em Λ, isto é, se e só se existe $\ell, r \geq 0$ tal que para todo $j \in \mathbb{S}$

$$
\begin{array}{cccccccc}
\mathbf{x} & = & (& \cdots & , & x_{j-\ell}, \ldots, x_j \ldots, x_{j+r} & , & \cdots &) \\
\mathbf{y} & = & (& \cdots & , & y_{j-\ell}, \ldots, y_j \ldots, y_{j+r} & , & \cdots &) \\
 & & & & & \downarrow & & & \\
\mathbf{x} * \mathbf{y} & = & (& \cdots & , & (\mathbf{x} * \mathbf{y})_j & , & \cdots &)
\end{array}
$$

- Dizemos que um grupo $(\Lambda, *)$ é um **grupo shift**, se Λ é espaço *shift* e $*$ é contínua e σ é automorfismo para $*$;
- Se $(\Lambda, *)$ é grupo *shift*, se e só se $*$ é um *siilding block code* de $\Lambda \times \Lambda$ em Λ, isto é, se e só se existe $\ell, r \geq 0$ tal que para todo $j \in \mathbb{S}$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{x} & = & (& \cdots & , & x_{j-\ell}, \ldots, x_j \ldots, x_{j+r} & , & \cdots &) \\
\mathbf{y} & = & (& \cdots & , & y_{j-\ell}, \ldots, y_j \ldots, y_{j+r} & , & \cdots &) \\
 & & & & & \downarrow & & & \\
\mathbf{x} * \mathbf{y} & = & (& \cdots & , & (\mathbf{x} * \mathbf{y})_j & , & \cdots &)
\end{array}
$$

- Dizemos que um grupo $(\Lambda, *)$ é um **grupo shift**, se Λ é espaço *shift* e $*$ é contínua e σ é automorfismo para $*$;
- Se $(\Lambda, *)$ é grupo *shift*, se e só se $*$ é um *siilding block code* de $\Lambda \times \Lambda$ em Λ, isto é, se e só se existe $\ell, r \geq 0$ tal que para todo $j \in \mathbb{S}$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{x} & = & (& \cdots & , & x_{j-\ell}, \ldots, x_j \ldots, x_{j+r} & , & \cdots &) \\
\mathbf{y} & = & (& \cdots & , & y_{j-\ell}, \ldots, y_j \ldots, y_{j+r} & , & \cdots &) \\
 & & & & & \downarrow & & & \\
\mathbf{x} * \mathbf{y} & = & (& \cdots & , & (\mathbf{x} * \mathbf{y})_j & , & \cdots &)
\end{array}$$

- Dizemos que um grupo $(\Lambda, *)$ é um **grupo shift**, se Λ é espaço *shift* e $*$ é contínua e σ é automorfismo para $*$;
- Se $(\Lambda, *)$ é grupo *shift*, se e só se $*$ é um *siilding block code* de $\Lambda \times \Lambda$ em Λ, isto é, se e só se existe $\ell, r \geq 0$ tal que para todo $j \in \mathbb{S}$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{x} & = & (& \cdots & , & x_{j-\ell}, \ldots, x_j \ldots, x_{j+r} & , & \cdots &) \\
\mathbf{y} & = & (& \cdots & , & y_{j-\ell}, \ldots, y_j \ldots, y_{j+r} & , & \cdots &) \\
 & & & & & \downarrow & & & \\
\mathbf{x} * \mathbf{y} & = & (& \cdots & , & (\mathbf{x} * \mathbf{y})_j & , & \cdots &)
\end{array}$$

Quando Λ é espaço *shift* sobre um alfabeto finito e $(\Lambda, *)$ é grupo *shift*, Kitchens [2] provou que:

- existe um grupo finito $(B, \cdot)$ e um espaço *shift* $\Gamma \subset B^{\mathbb{S}}$ tal que, $(\Gamma, \bullet)$ grupo *shift* com a operação $\bullet$ dada para todo $(x_i)_{i\in\mathbb{S}}, (y_i)_{i\in\mathbb{S}} \in \Gamma$ por

$$(x_i)_{i\in\mathbb{S}} \bullet (y_i)_{i\in\mathbb{S}} = (x_i \cdot y_i)_{i\in\mathbb{S}},$$

  e $(\Lambda, *)$ é isomorfo a $(\Gamma, \bullet)$.
- $(\Lambda, *)$ é isomorfo a um grupo *shift* $(\Omega, \star)$, onde Ω é o produto Cartesiano de um *full shift* com um espaço *shift* finito.

Quando Λ é espaço *shift* sobre um alfabeto finito e $(\Lambda, *)$ é grupo *shift*, Kitchens [2] provou que:

- existe um grupo finito $(B, \cdot)$ e um espaço *shift* $\Gamma \subset B^{\mathbb{S}}$ tal que, $(\Gamma, \bullet)$ grupo *shift* com a operação $\bullet$ dada para todo $(x_i)_{i\in\mathbb{S}}, (y_i)_{i\in\mathbb{S}} \in \Gamma$ por

$$(x_i)_{i\in\mathbb{S}} \bullet (y_i)_{i\in\mathbb{S}} = (x_i \cdot y_i)_{i\in\mathbb{S}},$$

  e $(\Lambda, *)$ é isomorfo a $(\Gamma, \bullet)$.
- $(\Lambda, *)$ é isomorfo a um grupo *shift* $(\Omega, \star)$, onde Ω é o produto Cartesiano de um *full shift* com um espaço *shift* finito.

Quando Λ é espaço *shift* sobre um alfabeto finito e $(\Lambda, *)$ é grupo *shift*, Kitchens [2] provou que:

- existe um grupo finito $(B, \cdot)$ e um espaço *shift* $\Gamma \subset B^{\mathbb{S}}$ tal que, $(\Gamma, \bullet)$ grupo *shift* com a operação $\bullet$ dada para todo $(x_i)_{i\in\mathbb{S}}, (y_i)_{i\in\mathbb{S}} \in \Gamma$ por

$$(x_i)_{i\in\mathbb{S}} \bullet (y_i)_{i\in\mathbb{S}} = (x_i \cdot y_i)_{i\in\mathbb{S}},$$

  e $(\Lambda, *)$ é isomorfo a $(\Gamma, \bullet)$.
- $(\Lambda, *)$ é isomorfo a um grupo *shift* $(\Omega, \star)$, onde Ω é o produto Cartesiano de um *full shift* com um espaço *shift* finito.

Exemplo 1:

- $G = \mathbb{Z}$ com a soma usual;
- $\Lambda := \{(x_i)_{i\in\mathbb{S}} \in G^{\mathbb{S}} : \ (x_i - x_{i+2}) \in 2\mathbb{Z}, \ \forall i \in \mathbb{S}\}$;
- seja $\bullet$ a operação componente a componente induzida pela soma em G;
- $(\Lambda, \bullet)$ é um grupo *shift*.
- Denotando por $E := 2\mathbb{Z}$ e $O := 1 + E$, para cada $k \geq 1$ e $n \geq 2$, dado $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathfrak{B}_n(\Lambda)$ temos

$$\mathcal{F}_k(\Lambda, a) = \begin{cases} E^k, & \text{if} \quad a_{n-1} \text{ e } a_n \text{ são pares,} \\ O^k, & \text{if} \quad a_{n-1} \text{ e } a_n \text{ são ímpares,} \\ \underbrace{E \times O \times \ldots,}_{k \text{ produto Cartesiana alternado}} & \text{se} \quad a_{n-1} \text{ é par e } a_n \text{ é ímpar,} \\ \underbrace{O \times E \times \ldots,}_{k \text{ produto Cartesiana alternado}} & \text{se} \quad a_{n-1} \text{ é ímpar e } a_n \text{ é par.} \end{cases}$$

Exemplo 1:

- $G = \mathbb{Z}$ com a soma usual;
- $\Lambda := \{(x_i)_{i\in\mathbb{S}} \in G^{\mathbb{S}} : \ (x_i - x_{i+2}) \in 2\mathbb{Z}, \ \forall i \in \mathbb{S}\}$;
- seja $\bullet$ a operação componente a componente induzida pela soma em G;
- $(\Lambda, \bullet)$ é um grupo *shift*.
- Denotando por $E := 2\mathbb{Z}$ e $O := 1 + E$, para cada $k \geq 1$ e $n \geq 2$, dado $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{B}_n(\Lambda)$ temos

$$\mathcal{F}_k(\Lambda, a) = \begin{cases} E^k, & \text{if} \quad a_{n-1} \text{ e } a_n \text{ são pares,} \\ O^k, & \text{if} \quad a_{n-1} \text{ e } a_n \text{ são ímpares,} \\ \underbrace{E \times O \times \dots,}_{k \text{ produto Cartesiana alternado}} & \text{se} \quad a_{n-1} \text{ é par e } a_n \text{ é ímpar,} \\ \underbrace{O \times E \times \dots,}_{k \text{ produto Cartesiana alternado}} & \text{se} \quad a_{n-1} \text{ é ímpar e } a_n \text{ é par.} \end{cases}$$

Exemplo 1:

- $G = \mathbb{Z}$ com a soma usual;
- $\Lambda := \{(x_i)_{i\in\mathbb{S}} \in G^{\mathbb{S}} : \ (x_i - x_{i+2}) \in 2\mathbb{Z}, \ \forall i \in \mathbb{S}\}$;
- seja $\bullet$ a operação componente a componente induzida pela soma em G;
- $(\Lambda, \bullet)$ é um grupo *shift*.
- Denotando por $E := 2\mathbb{Z}$ e $O := 1 + E$, para cada $k \geq 1$ e $n \geq 2$, dado $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathfrak{B}_n(\Lambda)$ temos

$$\mathcal{F}_k(\Lambda, a) = \begin{cases} E^k, & \text{if} \quad a_{n-1} \text{ e } a_n \text{ são pares,} \\ O^k, & \text{if} \quad a_{n-1} \text{ e } a_n \text{ são ímpares,} \\ \underbrace{E \times O \times \ldots,}_{k \text{ produto Cartesiano alternado}} & \text{se} \quad a_{n-1} \text{ é par e } a_n \text{ é ímpar,} \\ \underbrace{O \times E \times \ldots,}_{k \text{ produto Cartesiano alternado}} & \text{se} \quad a_{n-1} \text{ é ímpar e } a_n \text{ é par.} \end{cases}$$

Exemplo 1:

- $G = \mathbb{Z}$ com a soma usual;
- $\Lambda := \{(x_i)_{i\in\mathbb{S}} \in G^{\mathbb{S}} : \ (x_i - x_{i+2}) \in 2\mathbb{Z}, \ \forall i \in \mathbb{S}\}$;
- seja $\bullet$ a operação componente a componente induzida pela soma em G;
- $(\Lambda, \bullet)$ é um grupo *shift*.
- Denotando por $E := 2\mathbb{Z}$ e $O := 1 + E$, para cada $k \geq 1$ e $n \geq 2$, dado $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathfrak{B}_n(\Lambda)$ temos

$$\mathcal{F}_k(\Lambda, a) = \begin{cases} E^k, & \text{if} \quad a_{n-1} \text{ e } a_n \text{ são pares,} \\ O^k, & \text{if} \quad a_{n-1} \text{ e } a_n \text{ são ímpares,} \\ \underbrace{E \times O \times \ldots,}_{k \text{ produto Cartesiana alternado}} & \text{se} \quad a_{n-1} \text{ é par e } a_n \text{ é ímpar,} \\ \underbrace{O \times E \times \ldots,}_{k \text{ produto Cartesiana alternado}} & \text{se} \quad a_{n-1} \text{ é ímpar e} a_n \text{ é par.} \end{cases}$$

Exemplo 1:

- $G = \mathbb{Z}$ com a soma usual;
- $\Lambda := \{(x_i)_{i\in\mathbb{S}} \in G^{\mathbb{S}} :\ (x_i - x_{i+2}) \in 2\mathbb{Z},\ \forall i \in \mathbb{S}\}$;
- seja $\bullet$ a operação componente a componente induzida pela soma em G;
- $(\Lambda, \bullet)$ é um grupo *shift*.
- Denotando por $E := 2\mathbb{Z}$ e $O := 1 + E$, para cada $k \geq 1$ e $n \geq 2$, dado $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{B}_n(\Lambda)$ temos

$$\mathcal{F}_k(\Lambda, a) = \begin{cases} E^k, & \text{if} \quad a_{n-1} \text{ e } a_n \text{ são pares,} \\ O^k, & \text{if} \quad a_{n-1} \text{ e } a_n \text{ são ímpares,} \\ \underbrace{E \times O \times \dots,}_{k \text{ produto Cartesiana alternado}} & \text{se} \quad a_{n-1} \text{ é par e } a_n \text{ é ímpar,} \\ \underbrace{O \times E \times \dots,}_{k \text{ produto Cartesiana alternado}} & \text{se} \quad a_{n-1} \text{ é ímpar e} a_n \text{ é par.} \end{cases}$$

Exemplo 1:

- $G = \mathbb{Z}$ com a soma usual;
- $\Lambda := \{(x_i)_{i\in\mathbb{S}} \in G^{\mathbb{S}} : \ (x_i - x_{i+2}) \in 2\mathbb{Z}, \ \forall i \in \mathbb{S}\}$;
- seja $\bullet$ a operação componente a componente induzida pela soma em G;
- $(\Lambda, \bullet)$ é um grupo *shift*.
- Denotando por $E := 2\mathbb{Z}$ e $O := 1 + E$, para cada $k \geq 1$ e $n \geq 2$, dado $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{B}_n(\Lambda)$ temos

$$\mathcal{F}_k(\Lambda, a) = \begin{cases} E^k, & \text{if} \quad a_{n-1} \text{ e } a_n \text{ são pares,} \\ O^k, & \text{if} \quad a_{n-1} \text{ e } a_n \text{ são ímpares,} \\ \underbrace{E \times O \times \dots,}_{k \text{ produto Cartesiana alternado}} & \text{se} \quad a_{n-1} \text{ é par e } a_n \text{ é ímpar,} \\ \underbrace{O \times E \times \dots,}_{k \text{ produto Cartesiana alternado}} & \text{se} \quad a_{n-1} \text{ é ímpar e} a_n \text{ é par.} \end{cases}$$

Exemplo 1:

- $G = \mathbb{Z}$ com a soma usual;
- $\Lambda := \{(x_i)_{i\in\mathbb{S}} \in G^{\mathbb{S}} : \ (x_i - x_{i+2}) \in 2\mathbb{Z},\ \forall i \in \mathbb{S}\}$;
- seja $\bullet$ a operação componente a componente induzida pela soma em G;
- $(\Lambda, \bullet)$ é um grupo *shift*.
- Denotando por $E := 2\mathbb{Z}$ e $O := 1 + E$, para cada $k \geq 1$ e $n \geq 2$, dado $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathfrak{B}_n(\Lambda)$ temos

$$\mathcal{F}_k(\Lambda, a) = \begin{cases} E^k, & \text{if} \quad a_{n-1} \text{ e } a_n \text{ são pares,} \\ O^k, & \text{if} \quad a_{n-1} \text{ e } a_n \text{ são ímpares,} \\ \underbrace{E \times O \times \ldots,}_{k \ \textit{produto Cartesiana alternado}} & \text{se} \quad a_{n-1} \text{ é par e } a_n \text{ é ímpar,} \\ \underbrace{O \times E \times \ldots,}_{k \ \textit{produto Cartesiana alternado}} & \text{se} \quad a_{n-1} \text{ é ímpar e} a_n \text{ é par.} \end{cases}$$

Exemplo 2:

- Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $G_i := \mathbb{Z}_{2^i}$;
- para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $\gamma_i : G_i \to G_{i+1}$ o homomorfismo dado por $\gamma_i(g) := 2g$;
- seja G o limite direto associado a $\{G_i, \gamma_i\}$, isto é, o conjunto das classes de equivalência $[g, i] \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$, onde $i \in \mathbb{N}$ e $g \in G_i$,

$$[g, i] = [h, j] \iff \text{ existe } k \geq i, j \text{ tal que } \gamma_{i,k}(g) = \gamma_{j,k}(h).$$

- seja $\cdot$ a operação de grupo em G dada por:

$$[g, i] \cdot [h, j] = [\gamma_{i,j}(g) + h, j], \text{ se } i \leq j$$

e

$$[g, i] \cdot [h, j] = [g + \gamma_{j,i}(h), i] \text{ se } i \geq j;$$

Exemplo 2:

- Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $G_i := \mathbb{Z}_{2^i}$;
- para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $\gamma_i : G_i \to G_{i+1}$ o homomorfismo dado por $\gamma_i(g) := 2g$;
- seja G o limite direto associado a $\{G_i, \gamma_i\}$, isto é, o conjunto das classes de equivalência $[g, i] \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$, onde $i \in \mathbb{N}$ e $g \in G_i$,

$$[g, i] = [h, j] \iff \text{ existe } k \geq i, j \text{ tal que } \gamma_{i,k}(g) = \gamma_{j,k}(h).$$

- seja $\cdot$ a operação de grupo em G dada por:

$$[g, i] \cdot [h, j] = [\gamma_{i,j}(g) + h, j], \text{ se } i \leq j$$

e

$$[g, i] \cdot [h, j] = [g + \gamma_{j,i}(h), i] \text{ se } i \geq j;$$

Exemplo 2:

- Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $G_i := \mathbb{Z}_{2^i}$;
- para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $\gamma_i : G_i \to G_{i+1}$ o homomorfismo dado por $\gamma_i(g) := 2g$;
- seja G o limite direto associado a $\{G_i, \gamma_i\}$, isto é, o conjunto das classes de equivalência $[g, i] \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$, onde $i \in \mathbb{N}$ e $g \in G_i$,

$$[g, i] = [h, j] \iff \text{ existe } k \geq i, j \text{ tal que } \gamma_{i,k}(g) = \gamma_{j,k}(h).$$

- seja $\cdot$ a operação de grupo em G dada por:

$$[g, i] \cdot [h, j] = [\gamma_{i,j}(g) + h, j], \text{ se } i \leq j$$

e

$$[g, i] \cdot [h, j] = [g + \gamma_{j,i}(h), i] \text{ se } i \geq j;$$

Exemplo 2:

- Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $G_i := \mathbb{Z}_{2^i}$;
- para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $\gamma_i : G_i \to G_{i+1}$ o homomorfismo dado por $\gamma_i(g) := 2g$;
- seja G o limite direto associado a $\{G_i, \gamma_i\}$, isto é, o conjunto das classes de equivalência $[g, i] \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$, onde $i \in \mathbb{N}$ e $g \in G_i$,

$$[g, i] = [h, j] \iff \text{ existe } k \geq i, j \text{ tal que } \gamma_{i,k}(g) = \gamma_{j,k}(h).$$

- seja $\cdot$ a operação de grupo em G dada por:

$$[g, i] \cdot [h, j] = [\gamma_{i,j}(g) + h, j], \text{ se } i \leq j$$

e

$$[g, i] \cdot [h, j] = [g + \gamma_{j,i}(h), i] \text{ se } i \geq j;$$

- seja $H := \{\mathfrak{g} \in G : \ \mathfrak{g} = [g, 1]\} = \{[0, 1], \ [1, 1]\}$;
- dado $\mathfrak{g} = [g, i] \in G$ defina seu *follower set* como

$$\mathcal{F}_1(\Lambda, \mathfrak{g}) := [g, i+1] \cdot H = \{[g, i+1], \ [2^i + g \pmod{2^{i+1}}, \ i+1]\};$$

- definimos $\Lambda \subset G^{\mathbb{S}}$ como o espaço *shift*

$$\Lambda := \{(\mathfrak{g}_i)_{i \in \mathbb{S}} : \ \mathfrak{g}_{i+1} \in \mathcal{F}_1(\Lambda, \mathfrak{g}_i)\},$$

- seja $H := \{\mathfrak{g} \in G : \ \mathfrak{g} = [g, 1]\} = \{[0, 1], \ [1, 1]\}$;
- dado $\mathfrak{g} = [g, i] \in G$ defina seu *follower set* como

$$\mathcal{F}_1(\Lambda, \mathfrak{g}) := [g, i+1] \cdot H = \{[g, i+1], \ [2^i + g \ (mod \ 2^{i+1}) \ , \ i+1]\};$$

- definimos $\Lambda \subset G^{\mathbb{S}}$ como o espaço *shift*

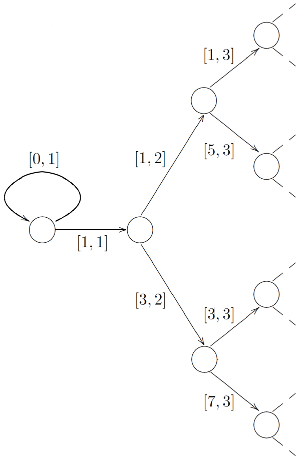
$$\Lambda := \{(\mathfrak{g}_i)_{i \in \mathbb{S}} : \ \mathfrak{g}_{i+1} \in \mathcal{F}_1(\Lambda, \mathfrak{g}_i)\},$$

- seja $H := \{\mathfrak{g} \in G : \ \mathfrak{g} = [g, 1]\} = \{[0, 1], \ [1, 1]\}$;
- dado $\mathfrak{g} = [g, i] \in G$ defina seu *follower set* como

$$\mathcal{F}_1(\Lambda, \mathfrak{g}) := [g, i+1] \cdot H = \{[g, i+1], \ [2^i + g \pmod{2^{i+1}}, \ i+1]\};$$

- definimos $\Lambda \subset G^{\mathbb{S}}$ como o espaço *shift*

$$\Lambda := \{(\mathfrak{g}_i)_{i \in \mathbb{S}} : \ \mathfrak{g}_{i+1} \in \mathcal{F}_1(\Lambda, \mathfrak{g}_i)\},$$


[0, 1]
[1, 1]
[1, 2]
[3, 2]
[1, 3]
[5, 3]
[3, 3]
[7, 3]

Seja $(G, \cdot)$ um grupo e seja $\bullet$ a operação componente a componente definida em $G^{\mathbb{S}}$.

Denote por 1_G a identidade de $G^{\mathbb{Z}}$, e suponha que $(\Lambda, \bullet)$ é um grupo *shift* com $L_\Lambda = G$.

Proposição

Para cada $k, n \geq 1$, temos que $\mathcal{F}_k(\Lambda, 1_G^n)$ e $\mathcal{P}_k(\Lambda, 1_G^n)$ são subgrupos normais de $B_k(\Lambda), \cdot)$.

Seja $(G, \cdot)$ um grupo e seja $\bullet$ a operação componente a componente definida em $G^{\mathbb{S}}$.
Denote por 1_G a identidade de $G^{\mathbb{Z}}$, e suponha que $(\Lambda, \bullet)$ é um grupo *shift* com $L_\Lambda = G$.

Proposição

Para cada $k, n \geq 1$, temos que $\mathcal{F}_k(\Lambda, 1_G^n)$ e $\mathcal{P}_k(\Lambda, 1_G^n)$ são subgrupos normais de $B_k(\Lambda), \cdot)$.

Seja $(G, \cdot)$ um grupo e seja $\bullet$ a operação componente a componente definida em $G^{\mathbb{S}}$.
Denote por 1_G a identidade de $G^{\mathbb{Z}}$, e suponha que $(\Lambda, \bullet)$ é um grupo *shift* com $L_\Lambda = G$.

Proposição

Para cada $k, n \geq 1$, temos que $\mathcal{F}_k(\Lambda, 1_G^n)$ e $\mathcal{P}_k(\Lambda, 1_G^n)$ são subgrupos normais de $B_k(\Lambda), \cdot)$.

Teorema

Para cada $k, n \geq 1$ *e* $a \in B_n(\Lambda)$ *temos que*

1. $b \in \mathcal{F}_k(\Lambda, a)$ *se e só se* $b \cdot \mathcal{F}_k(\Lambda, 1_G^n) = \mathcal{F}_k(\Lambda, 1_G^n) \cdot b = \mathcal{F}_k(\Lambda, a)$.
2. $b \in \mathcal{P}_k(\Lambda, a)$ *se e só se* $b \cdot \mathcal{P}_k(\Lambda, 1_G^n) = \mathcal{P}_k(\Lambda, 1_G^n) \cdot b = \mathcal{P}_k(\Lambda, a)$.

Corolário

Para todo $k, n \geq 1$ *temos que os membros das famílias* $L^{n,k}_{\overline{\mathbf{A}}} := \{\mathcal{F}_k(\Lambda, a) : \ a \in B_n(\Lambda)\}$ *e* $L^{n,k}_{\underline{\mathbf{A}}} := \{\mathcal{P}_k(\Lambda, a) : \ a \in B_n(\Lambda)\}$ *são disjuntos dois a dois.*

Ademais, $(L^{n,k}_{\overline{\mathbf{A}}}, \cdot)$ *e* $(L^{n,k}_{\underline{\mathbf{A}}}, \cdot)$ *são grupos e para todo* $a, b \in B_n(\Lambda)$*, nós temos que:*

1. $|\mathcal{F}_k(\Lambda, a)| = |\mathcal{F}_k(\Lambda, b)|$ *e* $|\mathcal{P}_k(\Lambda, a)| = |\mathcal{P}_k(\Lambda, b)|$;
2. $\mathcal{F}_k(\Lambda, a) \cdot \mathcal{F}_k(\Lambda, b) = \mathcal{F}_k(\Lambda, a \cdot b)$ *e* $\mathcal{P}_k(\Lambda, a) \cdot \mathcal{P}_k(\Lambda, b) = \mathcal{P}_k(\Lambda, a \cdot b)$.

Corolário

Para todo $k, n \geq 1$ *temos que os membros das famílias* $L^{n,k}_{\underline{\mathbf{A}}} := \{\mathcal{F}_k(\Lambda, a) : \ a \in B_n(\Lambda)\}$ *e* $L^{n,k}_{\underline{\mathbf{A}}} := \{\mathcal{P}_k(\Lambda, a) : \ a \in B_n(\Lambda)\}$ *são disjuntos dois a dois.*
Ademais, $(L^{n,k}_{\underline{\mathbf{A}}}, \cdot)$ *e* $(L^{n,k}_{\underline{\mathbf{A}}}, \cdot)$ *são grupos e para todo* $a, b \in B_n(\Lambda)$*, nós temos que:*

1. $|\mathcal{F}_k(\Lambda, a)| = |\mathcal{F}_k(\Lambda, b)|$ *e* $|\mathcal{P}_k(\Lambda, a)| = |\mathcal{P}_k(\Lambda, b)|$;
2. $\mathcal{F}_k(\Lambda, a) \cdot \mathcal{F}_k(\Lambda, b) = \mathcal{F}_k(\Lambda, a \cdot b)$ *e* $\mathcal{P}_k(\Lambda, a) \cdot \mathcal{P}_k(\Lambda, b) = \mathcal{P}_k(\Lambda, a \cdot b)$.

Corolário

Para todo $k, n \geq 1$ *temos que os membros das famílias* $L_{\overline{\mathbf{A}}}^{n,k} := \{\mathcal{F}_k(\Lambda, a) : \ a \in B_n(\Lambda)\}$ *e* $L_{\underline{\mathbf{A}}}^{n,k} := \{\mathcal{P}_k(\Lambda, a) : \ a \in B_n(\Lambda)\}$ *são disjuntos dois a dois.*
Ademais, $(L_{\overline{\mathbf{A}}}^{n,k}, \cdot)$ *e* $(L_{\underline{\mathbf{A}}}^{n,k}, \cdot)$ *são grupos e para todo* $a, b \in B_n(\Lambda)$*, nós temos que:*

1. $|\mathcal{F}_k(\Lambda, a)| = |\mathcal{F}_k(\Lambda, b)|$ *e* $|\mathcal{P}_k(\Lambda, a)| = |\mathcal{P}_k(\Lambda, b)|$*;*
2. $\mathcal{F}_k(\Lambda, a) \cdot \mathcal{F}_k(\Lambda, b) = \mathcal{F}_k(\Lambda, a \cdot b)$ *e* $\mathcal{P}_k(\Lambda, a) \cdot \mathcal{P}_k(\Lambda, b) = \mathcal{P}_k(\Lambda, a \cdot b)$*.*

Corolário

Para todo $k, n \geq 1$ *temos que os membros das famílias* $L_{\overline{\mathbf{A}}}^{n,k} := \{\mathcal{F}_k(\Lambda, a) : \ a \in B_n(\Lambda)\}$ *e* $L_{\underline{\mathbf{A}}}^{n,k} := \{\mathcal{P}_k(\Lambda, a) : \ a \in B_n(\Lambda)\}$ *são disjuntos dois a dois.*

Ademais, $(L_{\overline{\mathbf{A}}}^{n,k}, \cdot)$ *e* $(L_{\underline{\mathbf{A}}}^{n,k}, \cdot)$ *são grupos e para todo* $a, b \in B_n(\Lambda)$*, nós temos que:*

1. $|\mathcal{F}_k(\Lambda, a)| = |\mathcal{F}_k(\Lambda, b)|$ *e* $|\mathcal{P}_k(\Lambda, a)| = |\mathcal{P}_k(\Lambda, b)|$*;*
2. $\mathcal{F}_k(\Lambda, a) \cdot \mathcal{F}_k(\Lambda, b) = \mathcal{F}_k(\Lambda, a \cdot b)$ *e* $\mathcal{P}_k(\Lambda, a) \cdot \mathcal{P}_k(\Lambda, b) = \mathcal{P}_k(\Lambda, a \cdot b)$*.*

Proposição

Para todo $k, n \geq 1$ *temos que* $(L_{\underline{\mathbf{A}}}^{n,k}, \cdot)$ *e* $(L_{\underline{\mathbf{A}}}^{k,n}, \cdot)$ *são isomorfos.*

A porposição acima implica que:

Corolário

Para todo $k, n \geq 1$ *temos* $|L_{\underline{\mathbf{A}}}^{n,k}| = |L_{\underline{\mathbf{A}}}^{k,n}|$.

Proposição

Para todo $k, n \geq 1$ *temos que* $(L_{\underline{\mathbf{A}}}^{n,k}, \cdot)$ *e* $(L_{\underline{\mathbf{A}}}^{k,n}, \cdot)$ *são isomorfos.*

A porposição acima implica que:

Corolário

Para todo $k, n \geq 1$ *temos* $|L_{\underline{\mathbf{A}}}^{n,k}| = |L_{\underline{\mathbf{A}}}^{k,n}|$.

Proposição

Para todo $k, n \geq 1$ *temos que* $(L_{\underline{\mathbf{A}}}^{n,k}, \cdot)$ *e* $(L_{\underline{\mathbf{A}}}^{k,n}, \cdot)$ *são isomorfos.*

A porposição acima implica que:

Corolário

Para todo $k, n \geq 1$ *temos* $|L_{\underline{\mathbf{A}}}^{n,k}| = |L_{\underline{\mathbf{A}}}^{k,n}|$.

Definição

Suponha $(G, \cdot)$ *um grupo e um grupo* shift $(\Lambda, \bullet)$ *con* $L_\Lambda = G$*. Considere o grupo* $(L_{\mathbf{A}}^{1,1}, \cdot)$ *e o correspondente grupo* shift $({L_{\mathbf{A}}^{1,1}}^{\mathbb{Z}}, \bullet)$.

Definição

Considere o sliding block code

$$\theta : \Lambda \to (L_{\mathbf{A}}^{1,1^{\mathbb{Z}}}, \bullet)$$

dado para todo $x \in \Lambda$ *e* $i \in \mathbb{Z}$ *por*

$$\big(\theta(x)\big)_i := \mathcal{F}_1(\Lambda, x_{i-1})$$

Proposição

θ é um homomorfismo. Ademais,

1. *se Λ é Markoviano, então $\bar{\Lambda} := \theta(\Lambda)$ é* shift *Markoviano;*
2. *se $\mathcal{F}_1(\Lambda, 1_G) \cap \mathcal{P}_1(\Lambda, 1_G) = \{1_G\}$, então*
   1. *θ é isomorfismo entre Λ e $\bar{\Lambda}$;*
   2. *Λ e $\bar{\Lambda}$ são Markovianos.*

$\bar{\Lambda}$ é chamado **follower-set shift** de Λ.

Proposição

θ é um homomorfismo. Ademais,

1. *se Λ é Markoviano, então $\bar{\Lambda} := \theta(\Lambda)$ é* shift *Markoviano;*
2. *se $\mathcal{F}_1(\Lambda, 1_G) \cap \mathcal{P}_1(\Lambda, 1_G) = \{1_G\}$, então*
   1. *θ é isomorfismo entre Λ e $\bar{\Lambda}$;*
   2. *Λ e $\bar{\Lambda}$ são Markovianos.*

$\bar{\Lambda}$ é chamado **follower-set shift** de Λ.

Proposição

θ é um homomorfismo. Ademais,

1. *se Λ é Markoviano, então $\bar{\Lambda} := \theta(\Lambda)$ é* shift *Markoviano;*
2. *se $\mathcal{F}_1(\Lambda, 1_G) \cap \mathcal{P}_1(\Lambda, 1_G) = \{1_G\}$, então*
    1. *θ é isomorfismo entre Λ e $\bar{\Lambda}$;*
    2. *Λ e $\bar{\Lambda}$ são Markovianos.*

$\bar{\Lambda}$ é chamado **follower-set shift** de Λ.

Proposição

θ é um homomorfismo. Ademais,

1. *se Λ é Markoviano, então $\bar{\Lambda} := \theta(\Lambda)$ é* shift *Markoviano;*
2. *se $\mathcal{F}_1(\Lambda, 1_G) \cap \mathcal{P}_1(\Lambda, 1_G) = \{1_G\}$, então*
    1. *θ é isomorfismo entre Λ e $\bar{\Lambda}$;*
    2. *Λ e $\bar{\Lambda}$ são Markovianos.*

$\bar{\Lambda}$ é chamado **follower-set shift** de Λ.

Proposição

θ é um homomorfismo. Ademais,

1. *se Λ é Markoviano, então $\bar{\Lambda} := \theta(\Lambda)$ é* shift *Markoviano;*
2. *se $\mathcal{F}_1(\Lambda, 1_G) \cap \mathcal{P}_1(\Lambda, 1_G) = \{1_G\}$, então*
    1. *θ é isomorfismo entre Λ e $\bar{\Lambda}$;*
    2. *Λ e $\bar{\Lambda}$ são Markovianos.*

$\bar{\Lambda}$ é chamado **follower-set shift** de Λ.

Proposição

θ é um homomorfismo. Ademais,

1. *se Λ é Markoviano, então $\bar{\Lambda} := \theta(\Lambda)$ é* shift *Markoviano;*
2. *se $\mathcal{F}_1(\Lambda, 1_G) \cap \mathcal{P}_1(\Lambda, 1_G) = \{1_G\}$, então*
    1. *θ é isomorfismo entre Λ e $\bar{\Lambda}$;*
    2. *Λ e $\bar{\Lambda}$ são Markovianos.*

$\bar{\Lambda}$ é chamado **follower-set shift** de Λ.

Considere o subgrupo normal de $(G, \cdot)$,

$$\mathcal{H} := \mathcal{F}_1(\Lambda, 1_G) \cap \mathcal{P}_1(\Lambda, 1_G).$$

Definição

$$L_{\mathbf{A}} := L_\Lambda/_\mathcal{H} = \{a \cdot \mathcal{H} : \ a \in L_\Lambda\},$$

o qual é um grupo com a operação $\cdot$.

Definição

Definimos $\bar{\Lambda}^{[0]} = \Lambda$ *e, para* $n \geq 1$*, definimos* $\bar{\Lambda}^{[n]}$ *como o* follower-set shift *de* $\bar{\Lambda}^{[n-1]}$.
Denote por $\mathcal{H}^{[n]} := \mathcal{F}_1(\bar{\Lambda}^{[n]}, 1^{[n]}) \cap \mathcal{P}_1(\bar{\Lambda}^{[n]}, 1^{[n]})$*, subgrupo normal do grupo alfabeto* $L_\Lambda^{[n]} := B_1(\bar{\Lambda}^{[n]})$.

Considere o subgrupo normal de $(G, \cdot)$,

$$\mathcal{H} := \mathcal{F}_1(\Lambda, 1_G) \cap \mathcal{P}_1(\Lambda, 1_G).$$

Definição

$$L_{\mathbf{A}} := L_\Lambda/_{\mathcal{H}} = \{a \cdot \mathcal{H} : \ a \in L_\Lambda\},$$

o qual é um grupo com a operação $\cdot$.

Definição

Definimos $\bar{\Lambda}^{[0]} = \Lambda$ *e, para* $n \geq 1$*, definimos* $\bar{\Lambda}^{[n]}$ *como o* follower-set shift *de* $\bar{\Lambda}^{[n-1]}$.
Denote por $\mathcal{H}^{[n]} := \mathcal{F}_1(\bar{\Lambda}^{[n]}, 1^{[n]}) \cap \mathcal{P}_1(\bar{\Lambda}^{[n]}, 1^{[n]})$*, subgrupo normal do grupo alfabeto* $L_\Lambda^{[n]} := B_1(\bar{\Lambda}^{[n]})$.

Considere o subgrupo normal de $(G, \cdot)$,

$$\mathcal{H} := \mathcal{F}_1(\Lambda, 1_G) \cap \mathcal{P}_1(\Lambda, 1_G).$$

Definição

$$L_{\mathbf{A}} := L_\Lambda/_\mathcal{H} = \{a \cdot \mathcal{H} : \ a \in L_\Lambda\},$$

o qual é um grupo com a operação $\cdot$*.*

Definição

Definimos $\bar{\Lambda}^{[0]} = \Lambda$ *e, para* $n \geq 1$*, definimos* $\bar{\Lambda}^{[n]}$ *como o* follower-set shift *de* $\bar{\Lambda}^{[n-1]}$*.*

Denote por $\mathcal{H}^{[n]} := \mathcal{F}_1(\bar{\Lambda}^{[n]}, 1^{[n]}) \cap \mathcal{P}_1(\bar{\Lambda}^{[n]}, 1^{[n]})$*, subgrupo normal do grupo alfabeto* $L_\Lambda^{[n]} := B_1(\bar{\Lambda}^{[n]})$*.*

Considere o subgrupo normal de $(G,\cdot)$,

$$\mathcal{H} := \mathcal{F}_1(\Lambda, 1_G) \cap \mathcal{P}_1(\Lambda, 1_G).$$

Definição

$$L_{\mathbf{A}} := L_\Lambda/_{\mathcal{H}} = \{a \cdot \mathcal{H} : \; a \in L_\Lambda\},$$

o qual é um grupo com a operação $\cdot$.

Definição

Definimos $\bar{\Lambda}^{[0]} = \Lambda$ *e, para* $n \geq 1$*, definimos* $\bar{\Lambda}^{[n]}$ *como o* follower-set shift *de* $\bar{\Lambda}^{[n-1]}$.
Denote por $\mathcal{H}^{[n]} := \mathcal{F}_1(\bar{\Lambda}^{[n]}, 1^{[n]}) \cap \mathcal{P}_1(\bar{\Lambda}^{[n]}, 1^{[n]})$*, subgrupo normal do grupo alfabeto* $L_\Lambda^{[n]} := B_1(\bar{\Lambda}^{[n]})$.

Fractal Shift

Definição

Λ *é dito* **fractal** *se para todo* $n \geq 0$ *temos que* $\mathcal{H}^{[n]}$ *é conjunto unitário. No caso particular em que* $\bar{\Lambda}^{[1]} = \Lambda$*, diremos que* Λ *é* auto similar*, e se* $\bar{\Lambda}^{[n]} = \bar{\Lambda}^{[n-1]}$ *para agum* $n \geq 2$ *diremos que* Λ *é* auto similar no nível *n.*

Seja $S : L_{\mathbf{A}} \to L_\Lambda$ seção qualquer de $L_{\mathbf{A}}$, isto é para todo $\mathcal{H}_1 \in L_{\mathbf{A}}$, $S(\mathcal{H}_1) \in \mathcal{H}_1$.

Proposição

1. *Para todo* $a \in L_\Lambda$, $(S(a \cdot \mathcal{H})^{-1} \cdot a) \in \mathcal{H}$.
2. $\varphi : L_\Lambda \to L_{\mathbf{A}} \times \mathcal{H}$ *dado por* $\varphi(a) = (a \cdot \mathcal{H}, S(a \cdot \mathcal{H})^{-1} \cdot a)$ *é uma bijeção.*
3. φ *é isomorfismo de* $(L_\Lambda, \bullet)$ *com* $(L_{\mathbf{A}} \times \mathcal{H}, \diamond)$ *, onde* $\diamond$ *é dada por*

$$(\mathcal{H}_1, h_1) \diamond (\mathcal{H}_2, h_2) := \varphi[\varphi^{-1}(\mathcal{H}_1, h_1) \cdot \varphi^{-1}(\mathcal{H}_2, h_2)].$$

Seja $S : L_{\mathbf{A}} \to L_\Lambda$ seção qualquer de $L_{\mathbf{A}}$, isto é para todo $\mathcal{H}_1 \in L_{\mathbf{A}}$, $S(\mathcal{H}_1) \in \mathcal{H}_1$.

Proposição

1. *Para todo $a \in L_\Lambda$, $(S(a \cdot \mathcal{H})^{-1} \cdot a) \in \mathcal{H}$.*
2. *$\varphi : L_\Lambda \to L_{\mathbf{A}} \times \mathcal{H}$ dado por $\varphi(a) = \left(a \cdot \mathcal{H}, S(a \cdot \mathcal{H})^{-1} \cdot a\right)$ é uma bijeção.*
3. *φ é isomorfismo de $(L_\Lambda, \bullet)$ com $(L_{\mathbf{A}} \times \mathcal{H}, \diamond)$, onde $\diamond$ é dada por*

$$(\mathcal{H}_1, h_1) \diamond (\mathcal{H}_2, h_2) := \varphi\left[\varphi^{-1}(\mathcal{H}_1, h_1) \cdot \varphi^{-1}(\mathcal{H}_2, h_2)\right].$$

Seja $S : L_{\mathbf{A}} \to L_{\Lambda}$ seção qualquer de $L_{\mathbf{A}}$, isto é para todo $\mathcal{H}_1 \in L_{\mathbf{A}}$, $S(\mathcal{H}_1) \in \mathcal{H}_1$.

Proposição

1. *Para todo $a \in L_{\Lambda}$, $(S(a \cdot \mathcal{H})^{-1} \cdot a) \in \mathcal{H}$.*
2. *$\varphi : L_{\Lambda} \to L_{\mathbf{A}} \times \mathcal{H}$ dado por $\varphi(a) = (a \cdot \mathcal{H}, S(a \cdot \mathcal{H})^{-1} \cdot a)$ é uma bijeção.*
3. *φ é isomorfismo de $(L_{\Lambda}, \bullet)$ com $(L_{\mathbf{A}} \times \mathcal{H}, \diamond)$, onde $\diamond$ é dada por*

$$(\mathcal{H}_1, h_1) \diamond (\mathcal{H}_2, h_2) := \varphi\left[\varphi^{-1}(\mathcal{H}_1, h_1) \cdot \varphi^{-1}(\mathcal{H}_2, h_2)\right].$$

Seja $S : L_{\mathbf{A}} \to L_\Lambda$ seção qualquer de $L_{\mathbf{A}}$, isto é para todo $\mathcal{H}_1 \in L_{\mathbf{A}}$, $S(\mathcal{H}_1) \in \mathcal{H}_1$.

Proposição

1. *Para todo* $a \in L_\Lambda$, $(S(a \cdot \mathcal{H})^{-1} \cdot a) \in \mathcal{H}$.
2. $\varphi : L_\Lambda \to L_{\mathbf{A}} \times \mathcal{H}$ *dado por* $\varphi(a) = \big(a \cdot \mathcal{H}, S(a \cdot \mathcal{H})^{-1} \cdot a\big)$ *é uma bijeção.*
3. φ *é isomorfismo de* $(L_\Lambda, \bullet)$ *com* $(L_{\mathbf{A}} \times \mathcal{H}, \diamond)$ *, onde* $\diamond$ *é dada por*

$$(\mathcal{H}_1, h_1) \diamond (\mathcal{H}_2, h_2) := \varphi\left[\varphi^{-1}(\mathcal{H}_1, h_1) \cdot \varphi^{-1}(\mathcal{H}_2, h_2)\right].$$

Definição

Definimos $\phi : \Lambda \to L_{\mathbf{A}}\mathbb{S}\Lambda \times \mathcal{H}^{\mathbb{S}}$, *dado para todo* $x \in \Lambda$ *e* $i \in \mathbb{Z}$ *por*

$$\big(\phi(x)\big)_i := \varphi(x_i) = \big(x_i \cdot \mathcal{H}, S(x_i \cdot \mathcal{H})^{-1} \cdot x_i\big) \tag{1}$$

Proposição

Seja $(\Lambda, \bullet)$ *grupo* shift *Markoviano. Então, existe* $\hat{\Lambda} \subset L_{\mathbf{A}}^{\mathbb{S}}$*, um subgrupo* shift*, tal que* $\phi(\Lambda) = \hat{\Lambda} \times \mathcal{H}^{\mathbb{Z}}$*. Ademais:*

- ϕ *é isomorfismo entre* $(\Lambda, \bullet)$ *and* $(\hat{\Lambda} \times \mathcal{H}^{\mathbb{N}}, \star)$*, onde* $\star$ *é a operação induzida em* $\hat{\Lambda} \times \mathcal{H}^{\mathbb{Z}}$ *pela operação* $\diamond$*;*
- $\hat{\Lambda}$ *é tal que* $\mathcal{F}_1(\hat{\Lambda}, \mathcal{H}) \cap \mathcal{P}_1(\hat{\Lambda}, \mathcal{H}) = \{\mathcal{H}\}$*.*

Proposição

Seja $(\Lambda, \bullet)$ *grupo* shift *Markoviano. Então, existe* $\hat{\Lambda} \subset L_{\mathbf{A}}^{\mathbb{S}}$*, um subgrupo* shift*, tal que* $\phi(\Lambda) = \hat{\Lambda} \times \mathcal{H}^{\mathbb{Z}}$*. Ademais:*

- ϕ *é isomorfismo entre* $(\Lambda, \bullet)$ *and* $(\hat{\Lambda} \times \mathcal{H}^{\mathbb{N}}, \star)$*, onde* $\star$ *é a operação induzida em* $\hat{\Lambda} \times \mathcal{H}^{\mathbb{Z}}$ *pela operação* $\diamond$*;*
- $\hat{\Lambda}$ *é tal que* $\mathcal{F}_1(\hat{\Lambda}, \mathcal{H}) \cap \mathcal{P}_1(\hat{\Lambda}, \mathcal{H}) = \{\mathcal{H}\}$*.*

Teorema

Se $(\Lambda, \bullet)$ *grupo* shift *Markoviano, então é isomorfo um grupo* shift *Markoviano* $(\mathbb{F} \times B^{\mathbb{Z}}, \star)$*, onde* $\mathbb{F}$ fractal shift *e* $B^{\mathbb{Z}}$ *é um* full shift *sobre um alfabeto enumerável B.*

proof

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, "\phi"] & \hat{\Lambda} \times \mathscr{H}_1^{\mathbb{Z}} \arrow[d, "\theta\times id"] & & \\
& \bar{\hat{\Lambda}} \times \mathscr{H}_1^{\mathbb{Z}} \arrow[r, "\phi\times id"] & \hat{\hat{\Lambda}} \times \mathscr{H}_2^{\mathbb{Z}} \times \mathscr{H}_1^{\mathbb{Z}} \arrow[d, "\theta\times id\times id"] & \\
& & \bar{\hat{\hat{\Lambda}}} \times \mathscr{H}_2^{\mathbb{Z}} \times \mathscr{H}_1^{\mathbb{Z}} \arrow[r, "\phi\times id\times id"] & \hat{\hat{\hat{\Lambda}}} \times \mathscr{H}_3^{\mathbb{Z}} \times \mathscr{H}_2^{\mathbb{Z}} \times \mathscr{H}_1^{\mathbb{Z}} \arrow[d, dashed, "\theta\times id\times id\times id"] \\
& & & \mathbb{F} \times B^{\mathbb{Z}}
\end{tikzcd}
$$

D. Gonçalves, M. Sobottka and C. Starling
Inverse semigroup shifts over countable alphabets. Preprint on arXiv, (2015).

B. P. Kitchens,
Expansive dynamics on zero-dimensional groups,
Ergodic Theory and Dynamical Systems, **7** (1987), 249–261.

N. T. Sindhushayana, B. Marcus and M. Trott,
Homogeneous shifts,
IMA J. Math. Control Inform., **14** (1997), 255–287

M. Sobottka,
Topological quasi-group shifts,
Disc. and Contin. Dyn. Syst., **17** (2007), 77–93.