Espaços de curvas com curvatura limitada em superfícies

Pedro Zühlke (IME-USP)
Nicolau C. Saldanha (PUC-Rio)

Setembro 2016 – UFSC

Superfícies

Definição (Superfície topológica)

Uma *superfície topológica* é um espaço localmente homeomorfo a $\mathbb{C}$.

Superfícies

Definição (Superfície topológica)

Uma *superfície topológica* é um espaço localmente homeomorfo a $\mathbb{C}$.

Definição (Estrutura suave)

Uma *superfície suave* é um espaço localmente difeomorfo a $\mathbb{C}$.

Superfícies

Definição (Superfície topológica)

Uma *superfície topológica* é um espaço localmente homeomorfo a $\mathbb{C}$.

Definição (Estrutura suave)

Uma *superfície suave* é um espaço localmente difeomorfo a $\mathbb{C}$.

Definição (Estrutura Riemanniana)

Uma *superfície Riemanniana* é uma superfície suave onde o plano tangente em cada ponto é munido de um produto interno, que varia suavemente com o ponto.

Curvas

Definição

Uma *curva* numa superfície S é um mapa $\gamma\colon [0,1] \xrightarrow{C^0} S$.

Curvas

Definição

Uma *curva* numa superfície S é um mapa $\gamma\colon [0,1] \xrightarrow{C^0} S$.

Se S tem estrutura suave, é natural exigir que γ seja suave e *regular* (ou *imersão*), isto é, que sua velocidade $\dot{\gamma}$ nunca se anule.

Curvas

Definição

Uma *curva* numa superfície S é um mapa $\gamma\colon [0,1] \xrightarrow{C^0} S$.

Se S tem estrutura suave, é natural exigir que γ seja suave e *regular* (ou *imersão*), isto é, que sua velocidade $\dot{\gamma}$ nunca se anule.

Se S tem estrutura Riemanniana, é natural impor condições sobre sua curvatura.

Curvas

Definição

Uma *curva* numa superfície S é um mapa $\gamma\colon [0,1] \xrightarrow{C^0} S$.

Se S tem estrutura suave, é natural exigir que γ seja suave e *regular* (ou *imersão*), isto é, que sua velocidade $\dot{\gamma}$ nunca se anule.

Se S tem estrutura Riemanniana, é natural impor condições sobre sua curvatura.

Uma *curva fechada* em S é um mapa $\alpha\colon \mathbb{S}^1 \to S$ obtido completando-se o diagrama:

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ \mathbb{S}^1 \arrow[r, dotted, "\alpha"'] & S \end{tikzcd}$$

onde $p(t) = \exp(2\pi i t)$

Homotopia entre curvas

Seja S uma superfície e

$$\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to S.$$

Homotopia entre curvas

Seja S uma superfície e

$$\gamma_0, \gamma_1 \colon [0,1] \to S.$$

Uma *homotopia* entre elas é um mapa

$$H \colon [0,1] \times [0,1] \xrightarrow{C^0} S$$

tal que

$$\begin{cases} h(0,t) = \gamma_0(t) \\ h(1,t) = \gamma_1(t) \end{cases} \qquad \forall t \in [0,1].$$

Homotopia entre curvas

Seja S uma superfície e

$$\gamma_0, \gamma_1 \colon [0,1] \to S.$$

Uma *homotopia* entre elas é um mapa

$$H \colon [0,1] \times [0,1] \xrightarrow{C^0} S$$

tal que

$$\begin{cases} h(0,t) = \gamma_0(t) \\ h(1,t) = \gamma_1(t) \end{cases} \qquad \forall t \in [0,1].$$

Se γ_0 e γ_1 têm propriedades adicionais, exigimos que estas propriedades sejam respeitadas pela homotopia.

Número de rotação

Se $\gamma\colon [0,1] \to S$ é regular, seu *vetor tangente unitário*

$$\mathbf{t}_\gamma\colon [0,1] \to UTS$$

é dado por

$$\mathbf{t}_\gamma(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}.$$

Número de rotação

Se $\gamma\colon [0,1] \to S$ é regular, seu *vetor tangente unitário*

$$\mathbf{t}_\gamma\colon [0,1] \to UTS$$

é dado por

$$\mathbf{t}_\gamma(t) = \frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|}.$$

Um *argumento* para γ é uma função contínua

$$\theta_\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}$$

tal que

$$e^{i\theta_\gamma} = \mathbf{t}_\gamma.$$

Número de rotação

Se $\gamma\colon [0,1] \to S$ é regular, seu *vetor tangente unitário*

$$\mathbf{t}_\gamma\colon [0,1] \to UTS$$

é dado por

$$\mathbf{t}_\gamma(t) = \frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|}.$$

Um *argumento* para γ é uma função contínua

$$\theta_\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}$$

tal que

$$e^{i\theta_\gamma} = \mathbf{t}_\gamma.$$

A *rotação total* de γ é dada por

$$\theta_\gamma(1) - \theta_\gamma(0).$$

Whitney-Graustein

Teorema (Whitney-Graustein, 1937)

Duas curvas regulares fechadas no plano são regularmente homotópicas se e somente se têm a mesma rotação total.

Whitney-Graustein

Teorema (Whitney-Graustein, 1937)

Duas curvas regulares fechadas no plano são regularmente homotópicas se e somente se têm a mesma rotação total.

Equivalentemente, as componentes conexas do espaço de todas as curvas deste tipo estão em bijeção com $2\pi\mathbb{Z}$.

Whitney-Graustein

Teorema (Whitney-Graustein, 1937)

Duas curvas regulares fechadas no plano são regularmente homotópicas se e somente se têm a mesma rotação total.

Equivalentemente, as componentes conexas do espaço de todas as curvas deste tipo estão em bijeção com $2\pi\mathbb{Z}$.

Teorema (Smale, 1956)

Cada uma destas componentes é (fracamente) contrátil.

Teorema de Smale

Mais precisamente, sejam $u \in UTS$ e:

$$\mathcal{I}S(u) = \{\alpha\colon \mathbb{S}^1 \xrightarrow{C^\infty} S \mid \alpha \text{ imersão, } \mathbf{t}_\alpha(1) = u.\}$$
$$\Omega(UTS)(u) = \{\omega\colon \mathbb{S}^1 \xrightarrow{C^0} UTS \mid \omega(1) = u\}.$$

Teorema de Smale

Mais precisamente, sejam $u \in UTS$ e:

$$\mathcal{I}S(u) = \{\alpha \colon \mathbb{S}^1 \xrightarrow{C^\infty} S \mid \alpha \text{ imersão},\ \mathbf{t}_\alpha(1) = u.\}$$
$$\Omega(UTS)(u) = \{\omega \colon \mathbb{S}^1 \xrightarrow{C^0} UTS \mid \omega(1) = u\}.$$

Teorema (Smale, 1956)

O mapa

$$\mathcal{I}S(u) \to \Omega(UTS)(u), \quad \alpha \mapsto \mathbf{t}_\alpha$$

é uma equivalência homotópica.

Curvatura

Definição

A *curvatura* $\kappa\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ de uma curva $\gamma\colon [0,1] \to S$ de rapidez constante numa superfície Riemanniana é uma medida de sua aceleração.

Curvatura

Definição

A *curvatura* $\kappa\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ de uma curva $\gamma\colon [0,1] \to S$ de rapidez constante numa superfície Riemanniana é uma medida de sua aceleração.

Definição (Espaços de curvas com curvatura limitada)

Sejam $u, v \in UTS$ e $\kappa_1 < \kappa_2$. Denotamos por $\mathcal{C}S_{\kappa_1}^{\kappa_2}(u,v)$ o espaço de todas as curvas γ em S satisfazendo:

(i) $\mathbf{t}_\gamma(0) = u$ e $\mathbf{t}_\gamma(1) = v$;

(ii) $\kappa_\gamma(t) \in (\kappa_1, \kappa_2)$ para todo $t \in [0,1]$.

Curvatura

Definição

A *curvatura* $\kappa\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ de uma curva $\gamma\colon [0,1] \to S$ de rapidez constante numa superfície Riemanniana é uma medida de sua aceleração.

Definição (Espaços de curvas com curvatura limitada)

Sejam $u, v \in UTS$ e $\kappa_1 < \kappa_2$. Denotamos por $\mathcal{C}S_{\kappa_1}^{\kappa_2}(u,v)$ o espaço de todas as curvas γ em S satisfazendo:

(i) $\mathbf{t}_\gamma(0) = u$ e $\mathbf{t}_\gamma(1) = v$;

(ii) $\kappa_\gamma(t) \in (\kappa_1, \kappa_2)$ para todo $t \in [0,1]$.

Nesta notação

$$\mathcal{I}S(u,v) = \mathcal{C}S_{-\infty}^{+\infty}(u,v).$$

Exemplo: curvas no plano Euclidiano

Sejam $O = (0, 1)$ e $Q = (q, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{S}^1 = UT\mathbb{C}$.

Exemplo: curvas no plano Euclidiano

Sejam $O = (0, 1)$ e $Q = (q, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{S}^1 = UT\mathbb{C}$.

Problema

Determinar a topologia de $\mathcal{C}_{-1}^{+1}(O, Q)$.

Exemplo: curvas no plano Euclidiano

Sejam $O = (0, 1)$ e $Q = (q, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{S}^1 = UT\mathbb{C}$.

Problema

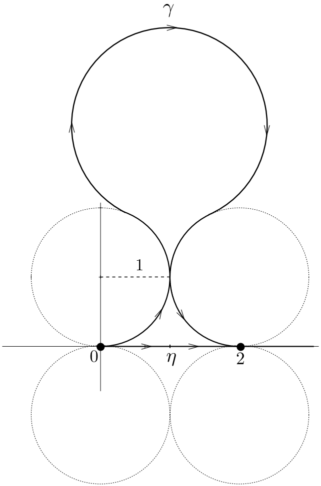
Determinar a topologia de $\mathcal{C}_{-1}^{+1}(O, Q)$.

Questão

Será que duas curvas neste espaço são homotópicas se e somente se forem homotópicas como imersões, i.e., se tiverem a mesma rotação total?

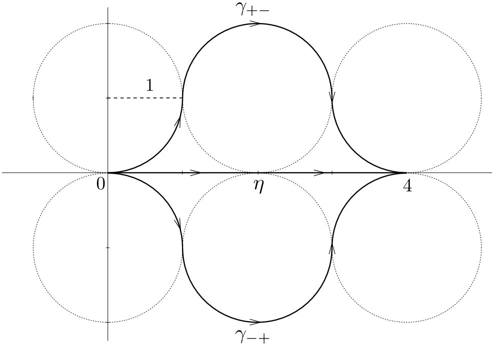
Exemplo: curvas de mesma rotação não homotópicas

Denotemos o subespaço de $\mathcal{C}_{-1}^{+1}(O, Q)$ contendo as curvas de rotação total nula por $\mathcal{M}(Q)$, e tome $Q = (x, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$.



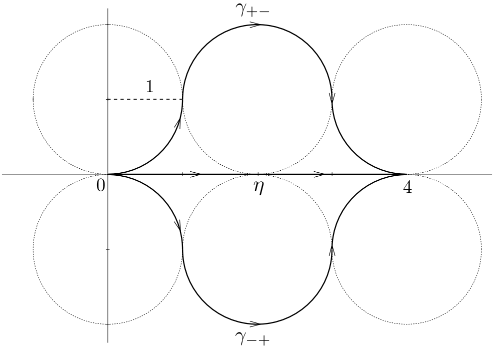
η não é homotópica a γ com curvatura em $(-1, 1)$.

Exemplo de espaço não simplesmente conexo

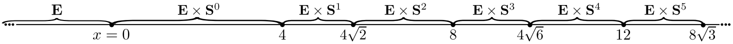


Um gerador para $\pi_1(\mathcal{M}(Q))$ quando $4 < x < 4\sqrt{2}$.

Exemplo de espaço não simplesmente conexo



Um gerador para $\pi_1(\mathcal{M}(Q))$ quando $4 < x < 4\sqrt{2}$.



Tipo de homeomorfismo de $\mathcal{M}(Q)$ para $Q = (x, 1)$, em função de x.

Tipo de homeomorfismo de $\mathcal{M}(Q)$ para Q arbitrário