

# GRUPOS CRISTALOGRÁFICOS

ORNAMENTOS & LADRILHAMENTOS

---

Dr. Celso Melchiades Doria  
Depto de Matemática - UFSC



# Cristalografia é a Ciência interdisciplinar que estuda Matéria Condensada

[1] - L. S. Charlap, Bieberbach Groups and Flat Manifolds, Springer-Verlag, 1986

[2] - Andrzej Szczepański - Problems on Bieberbach groups and flat manifolds  
<https://arxiv.org/pdf/math/0507355.pdf>

[3] - Toshikazu Sunada - Topological Crystallography with a View Towards Discrete Geometric Analysis, Springer.

## Conjecturas

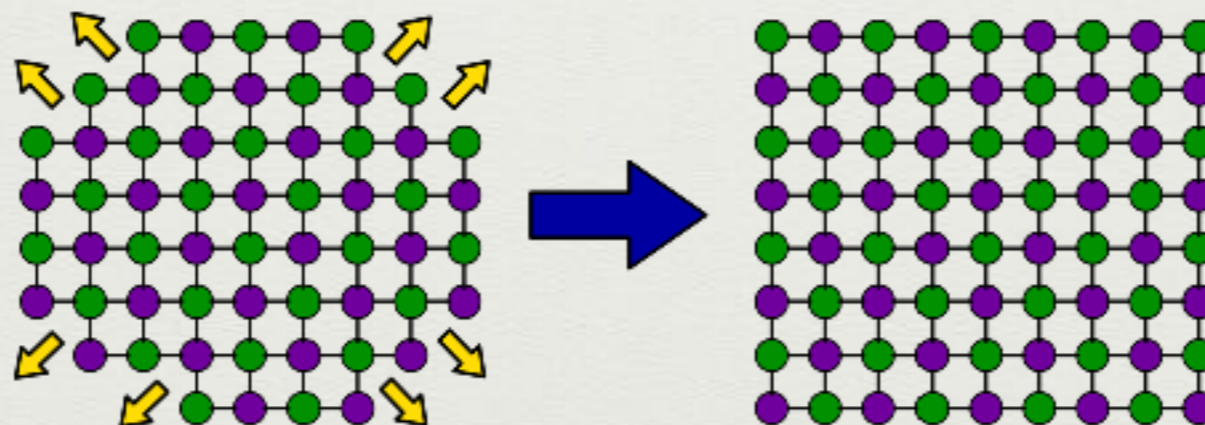
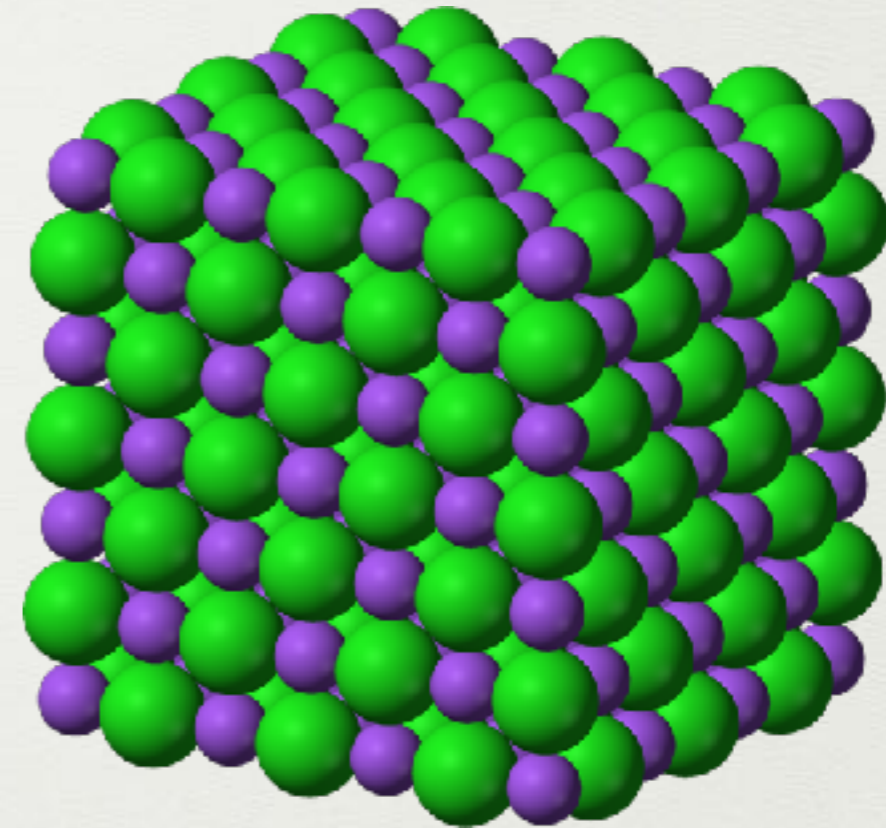
- (Markus, 1961) Uma variedade compacta AFIM é completa se, e somente se, tem volume FINITO.
- (Auslander, 1964) Todo Grupo Cristalográfico contém um subgrupo Policíclico (solúvel) de índice finito.
- (Chern, 1955) A Classe de Euler de uma Variedade AFIM é NULA.

## Áreas de PESQUISA em Matéria Condensada “contemporâneas”

Isolantes e Supercondutores Topológicos

<https://www.nap.edu/catalog/15269/the-mathematical-sciences-in-2025>

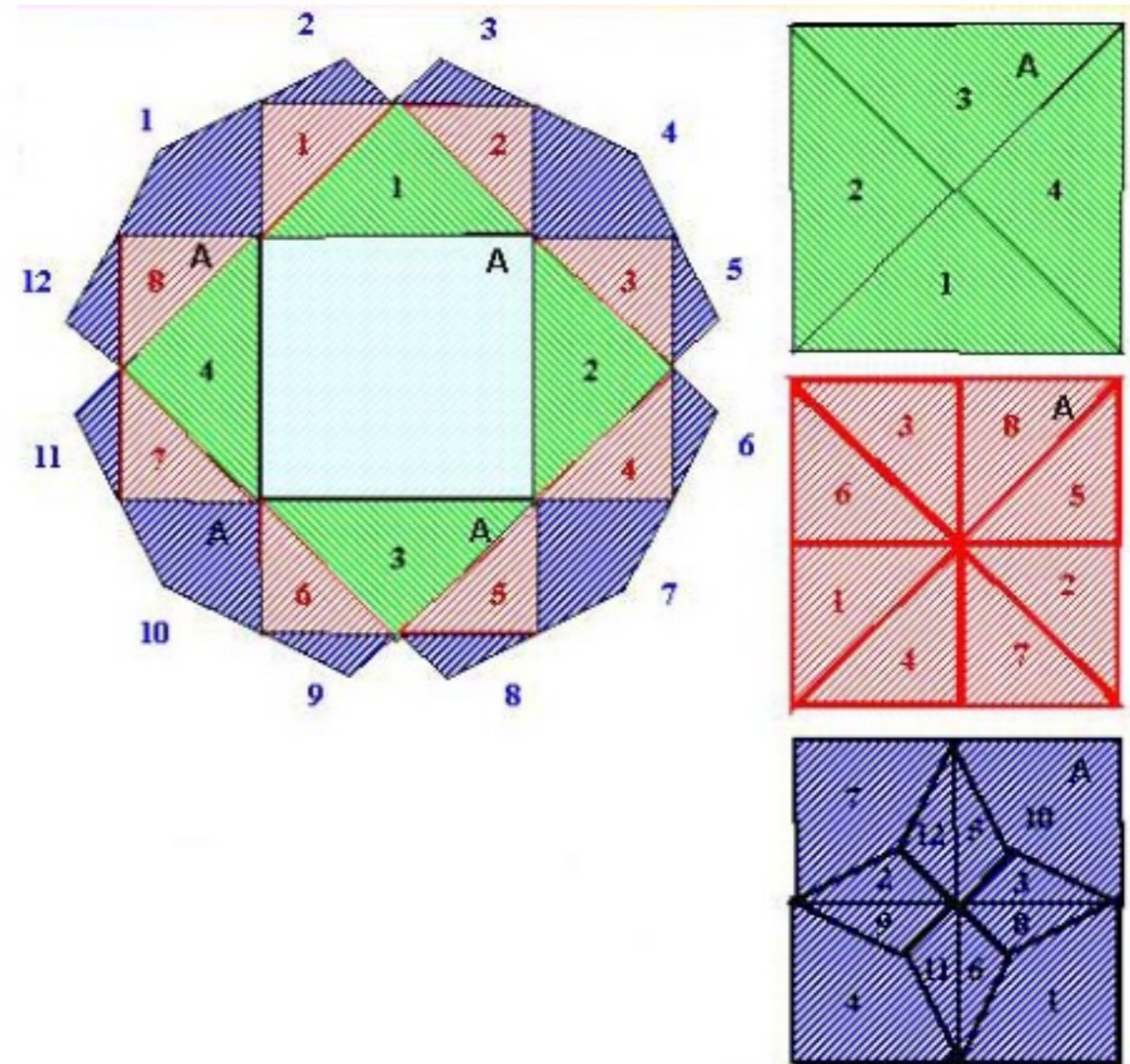
# Cristal Halite (NaCl, sal)





## Brillouin zones -2D

- higher order zones can be mapped directly onto the 1st BZ by simple translation
- all BZs have exactly the same area/volume
- 1BZ corresponds to the primitive lattice cell in reciprocal space



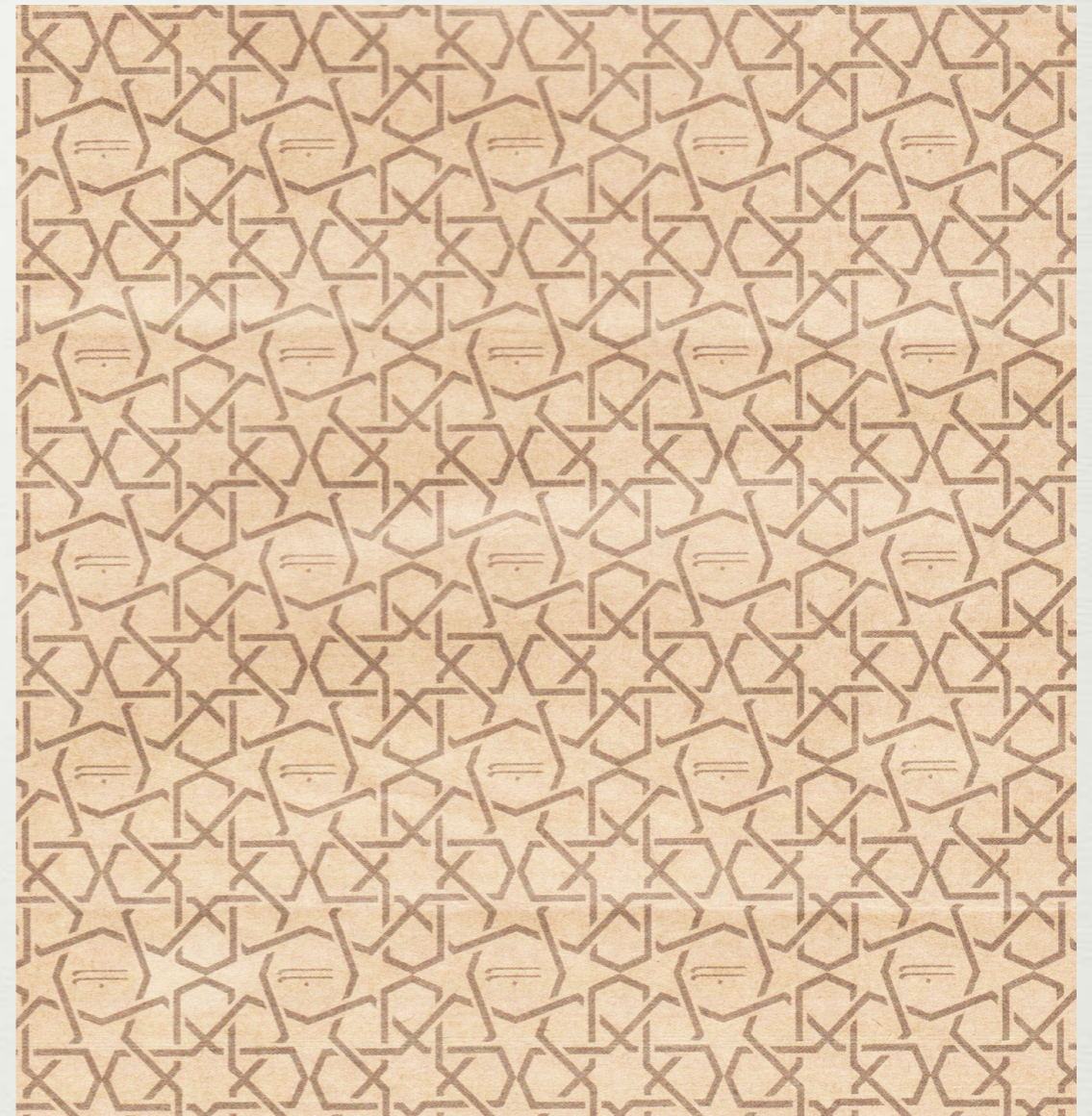


# Ornamentos Árabes





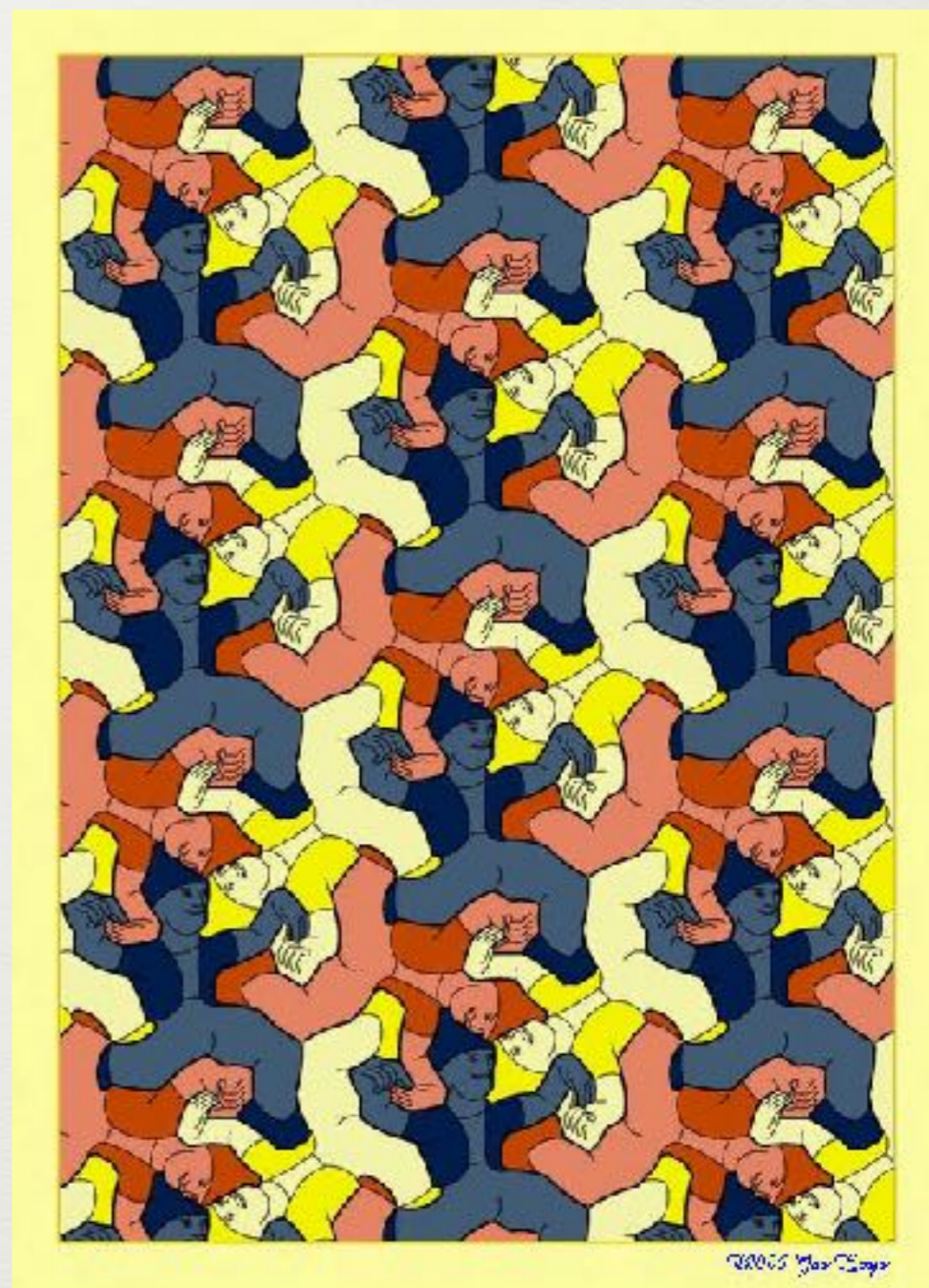
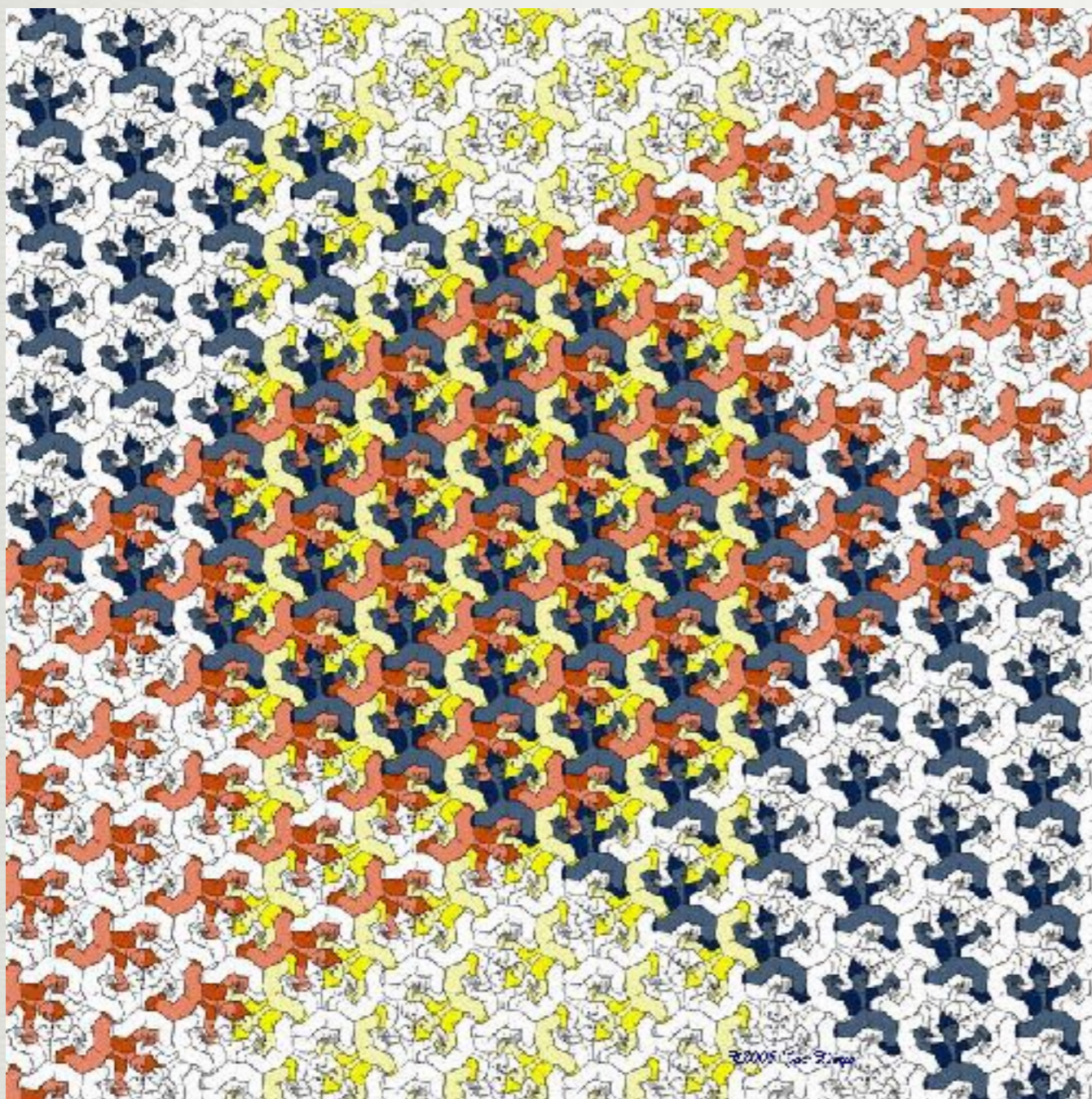
# Ornamentos Árabes





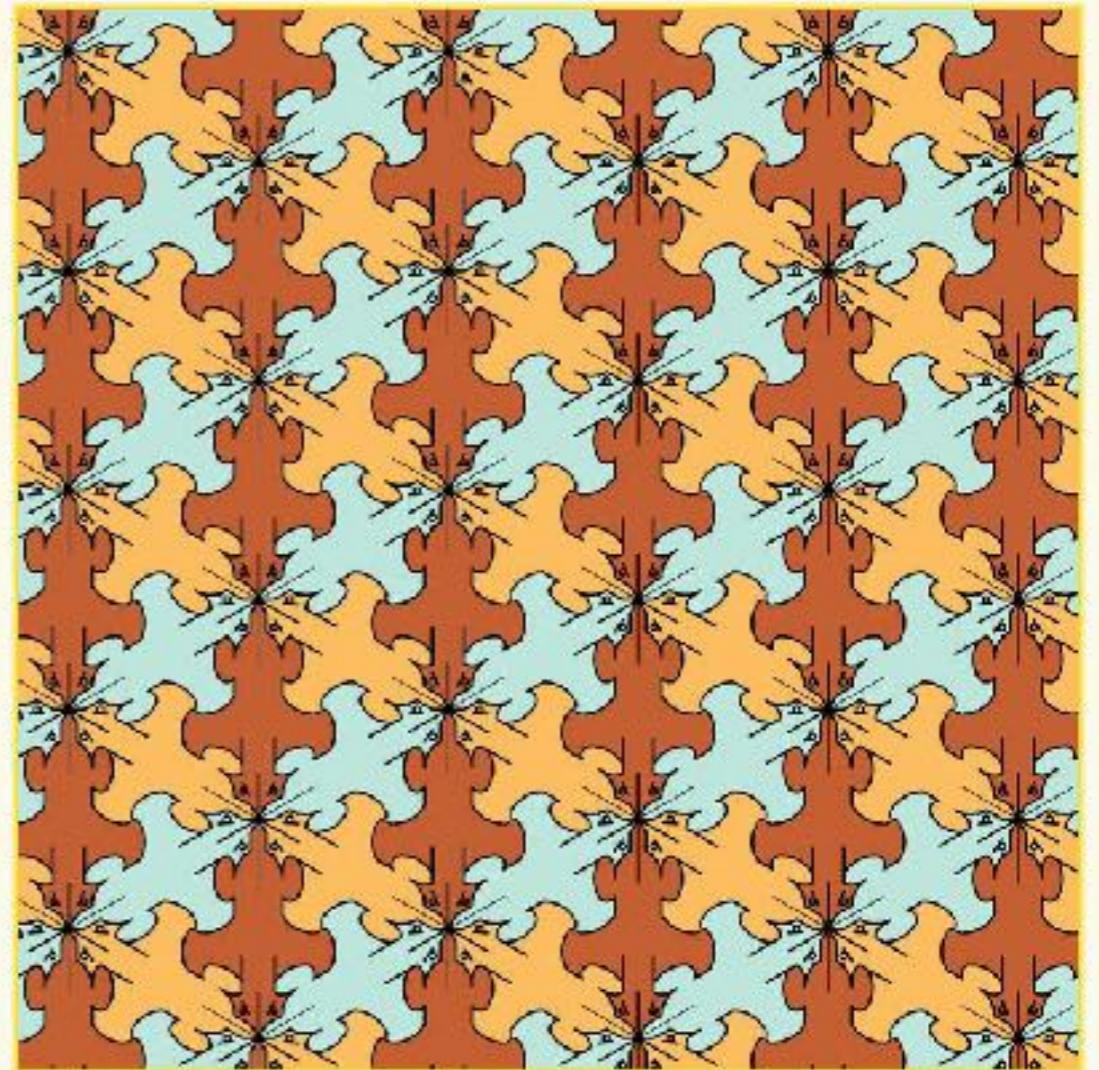
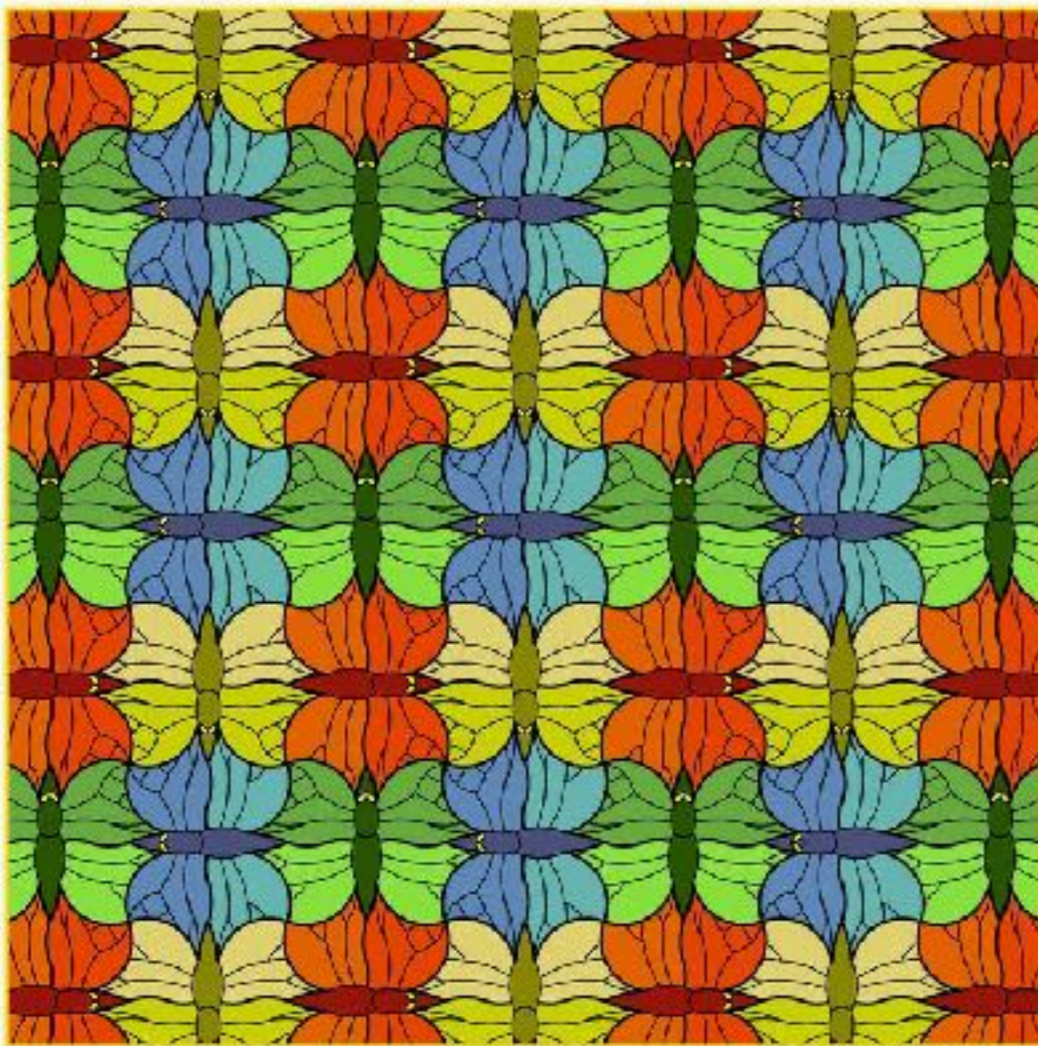
# Ornamentos Escher

1898 - 1972



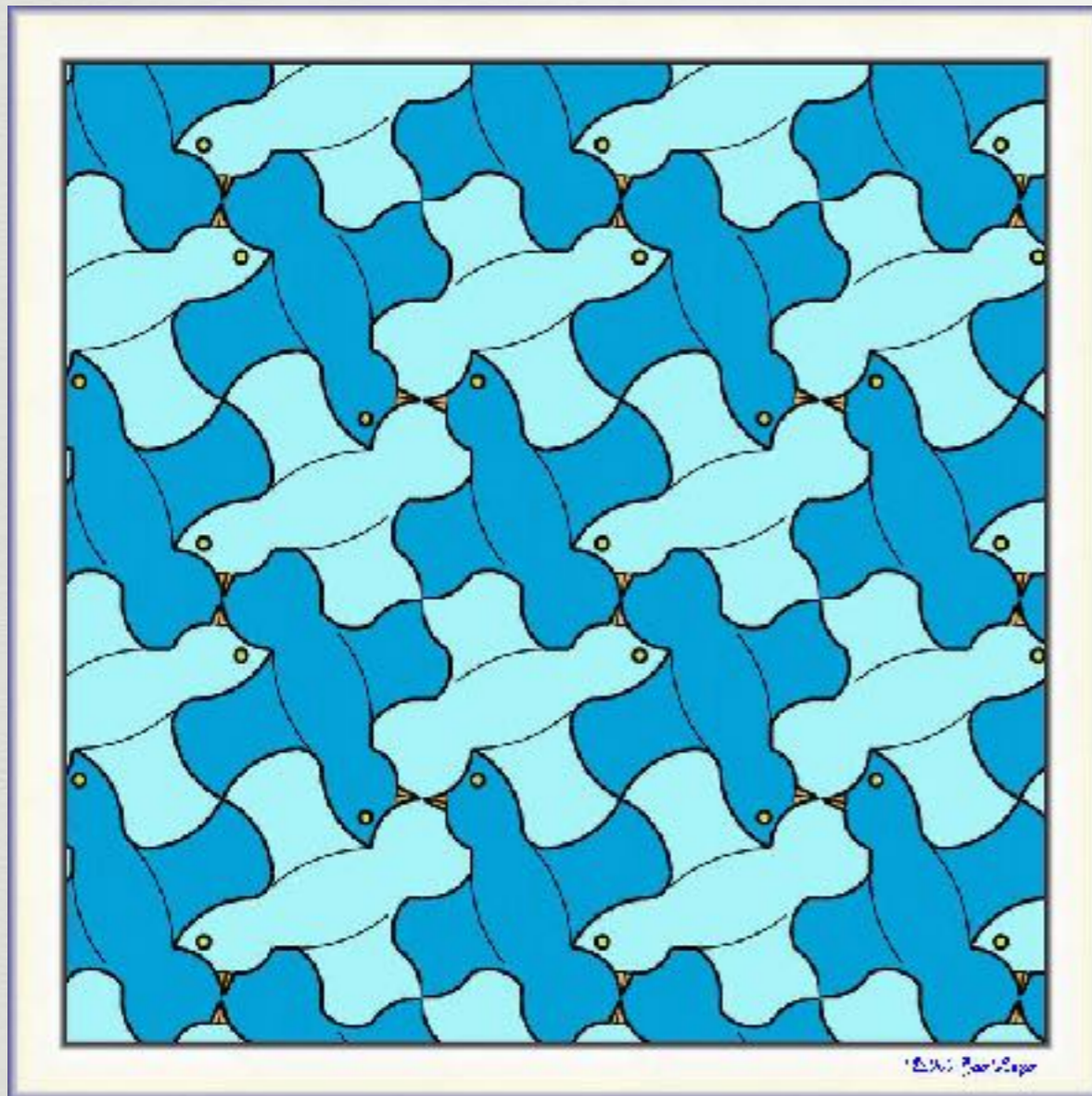


# Ornamentos Escher



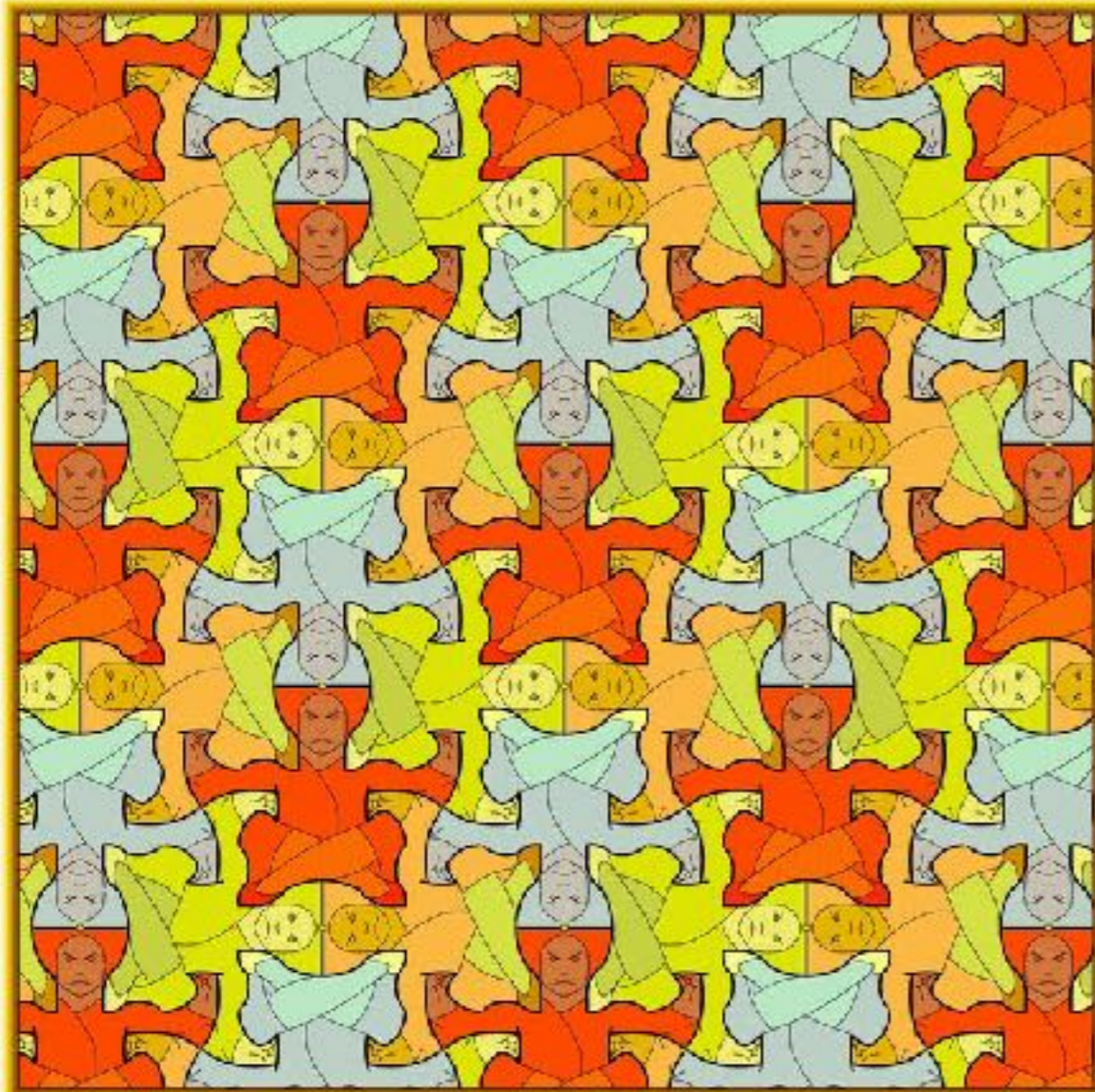


# Ornamentos Escher





# Ornamentos Escher



1897: Sky and Water I

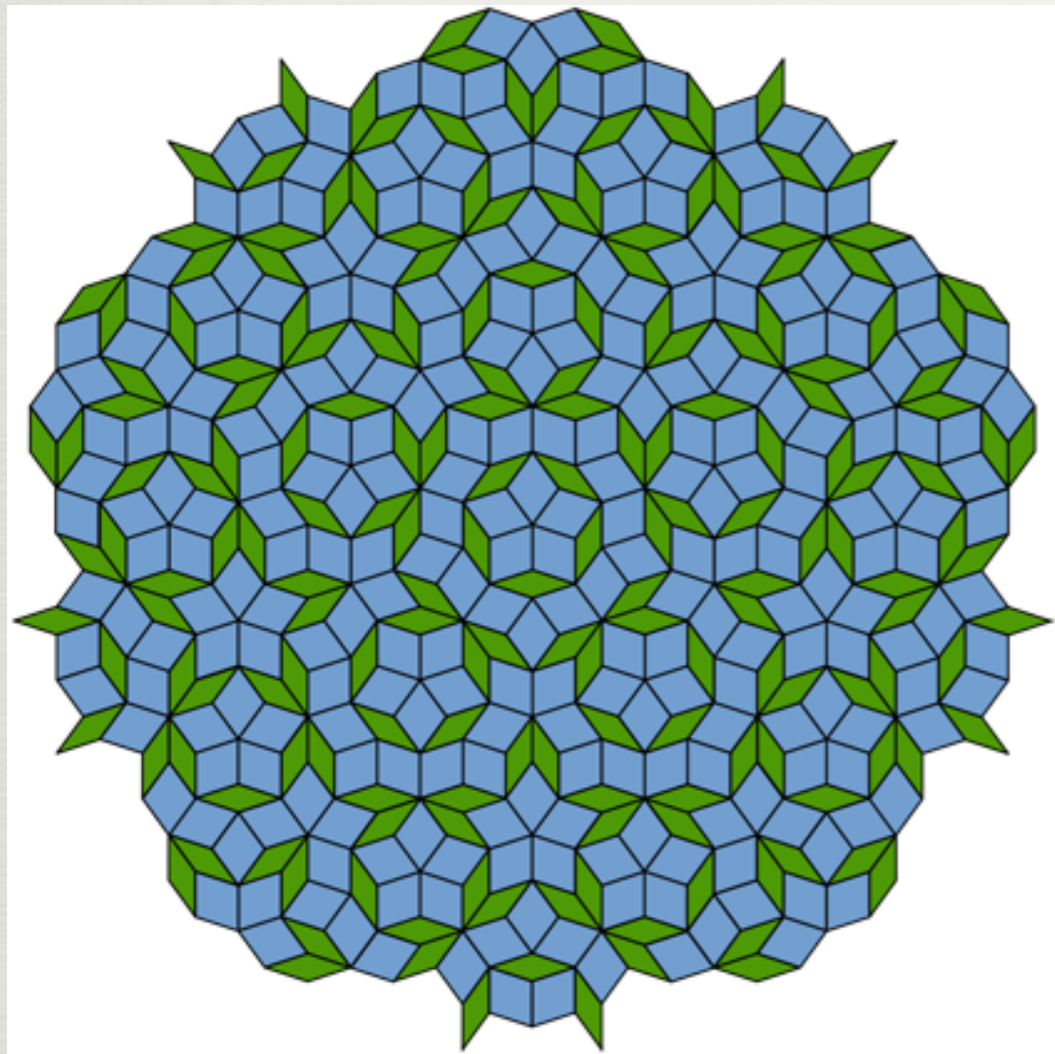


1898: Sky and Water III

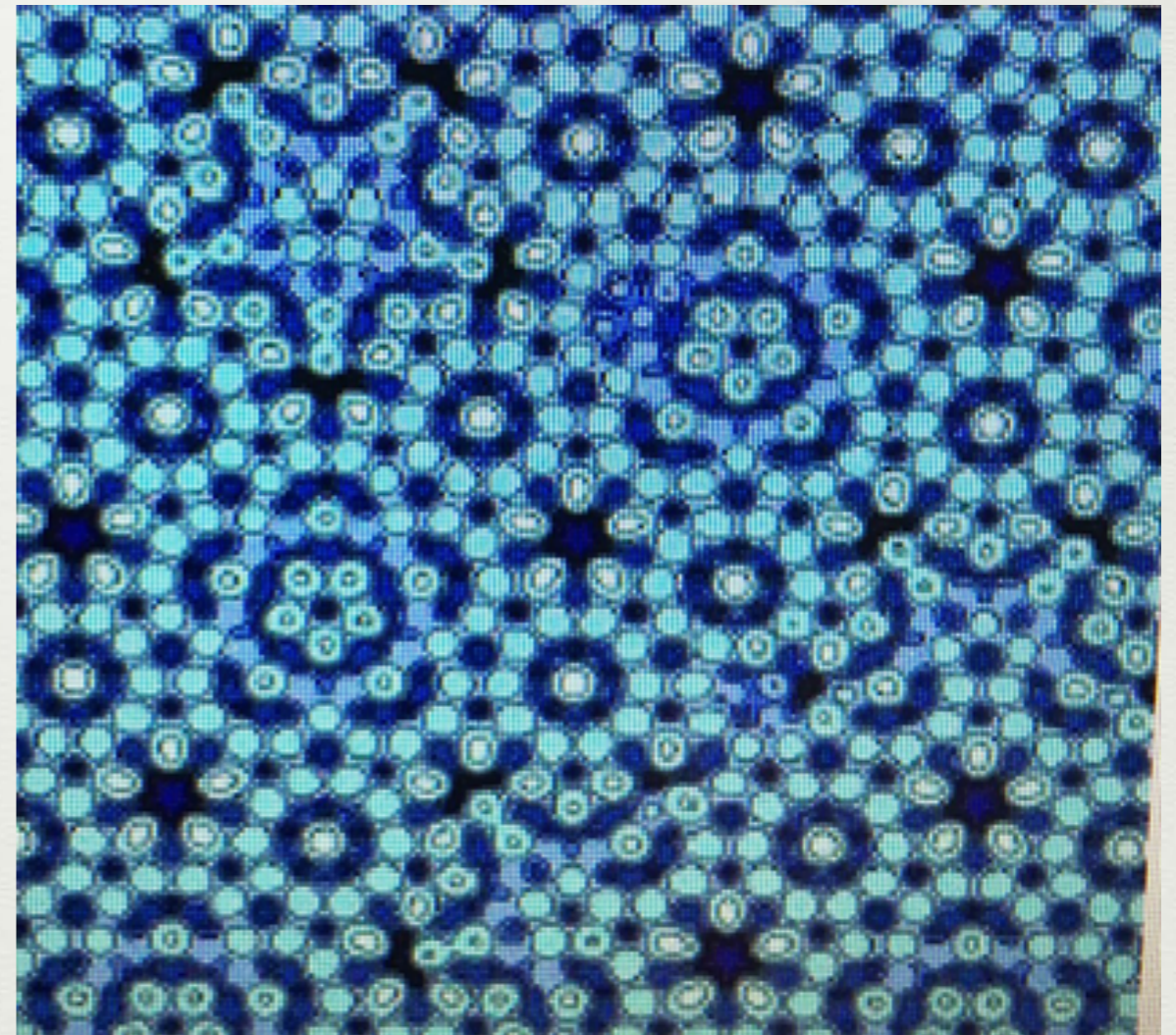


# Quasi - Cristais

Ladrilhamento de Penrose  
(pentágonos)



Aluminium Palladium  
Manganese  
(Al-Pd-Mn)



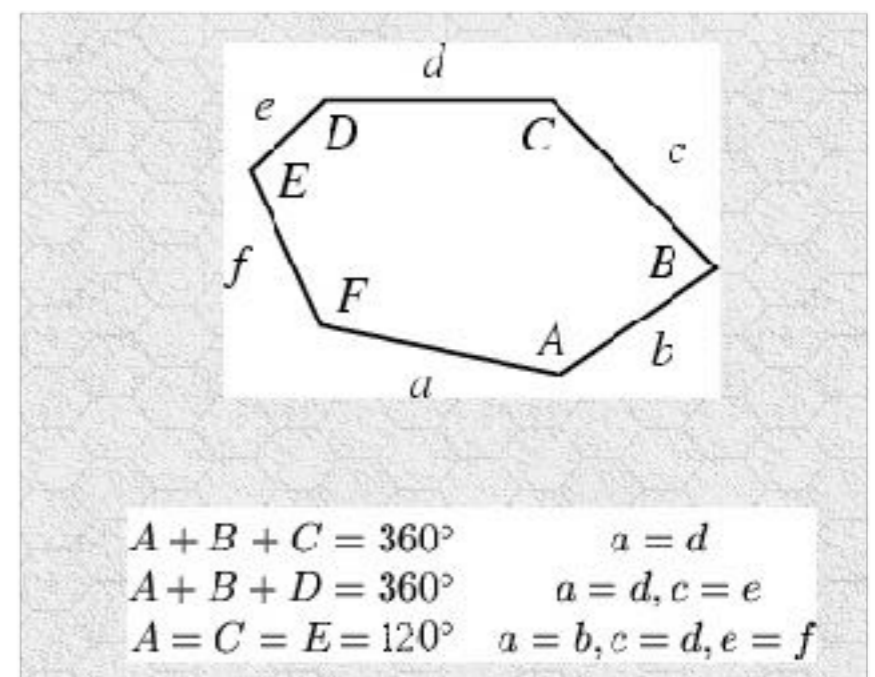


**Definição:** Uma coleção de subconjuntos do plano é um ladrilho do plano se a união é o plano todo e o interior de diferentes ladrilhos são disjuntos.

**Definição:** Um ladrilhamento é monofacial se todos os ladrilhos tem a mesma forma e tamanho. O polígono modelo do ladrilhamento é o protótipo do ladrilhamento monofacial, ou simplesmente, o polígono ladrilho

**Problema:** Para cada polígono convexo de n-lados classifique os possíveis Ladrilhamentos.

- Os únicos polígonos convexos que ladrilham o plano são: triângulos, quadriláteros, pentágonos e hexágonos.
- qualquer triângulo ou quadrilátero convexo ladrilha o plano.
- Existem apenas 3 tipos de hexágonos que ladrilham o plano





## Ladrilhamentos

---

- Um  $n$ -polígono REGULAR ladrilha o plano  $\iff$  satisfaz a equação

$$(n - 2).(k - 2) = 4$$

$k$  é o número de polígonos em cada vértice. As únicas soluções  $(n, k)$  são

$(3, 6)$  triângulo

$(4, 4)$  quadrado

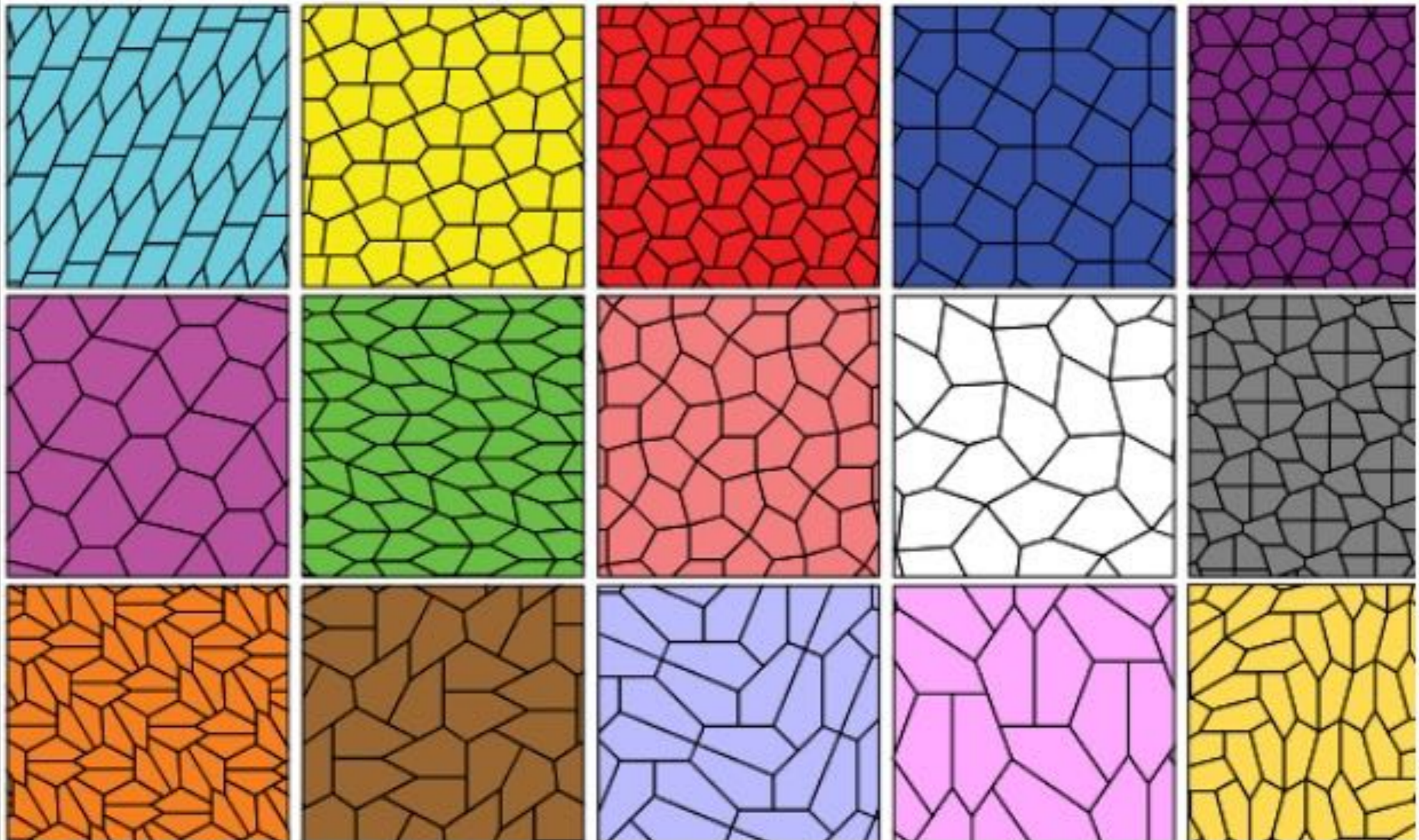
$(6, 3)$  hexágono.




## Ladrilhamentos

---

- São conhecidos 15 tipos distintos de pentágonos que ladrilham o plano



 The 15 types of pentagonal tilings discovered so far. Photograph: Ed Pegg/Wikipedia



### 1 Curvas que minimizam a distância em $\mathbb{R}^2$

As curvas que minimizam a distância no plano são as **RETAS**.

### 2 Isometrias de $\mathbb{R}^2$

Uma aplicação  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que preserva a DISTÂNCIA dizemos que é uma **ISOMETRIA**.



Exemplos: Seja  $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

(1.a) Reflexão sobre o eixo-x.

$$r_x(\vec{u}) = (x, -y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (0.1)$$

Propriedades:  $r_x^2 = I$

(2.a) Rotações ângulo  $\theta$

$$R_\theta(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (0.1)$$

Propriedades:

(i)  $R_\theta^{-1} = R_\theta^t$ ,

(ii)  $R_\theta \cdot R_\phi = R_{\theta+\phi}$  (comuta).

**Definição:** Temos os seguintes GRUPOS;

$$SO_2 = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

$$O_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^t \cdot A = A \cdot A^t = I\}$$



Exemplos: Seja  $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

(3.a) **Translação na direção do vetor  $u_0 = (a, b)$ .**

Seja  $u = (x, y)$ ;

$$T(u) = u + u_0 = (x + a, y + b). \quad (0.1)$$

**Propriedades:**  $u_0, v_0 \in \mathbb{R}^2$ ;

$$(i) T_{u_0}(0) = u_0 \Rightarrow \text{não é linear}$$

$$(ii) (T_{v_0} \circ T_{u_0})(u) = T_{u_0+v_0}(u) \Rightarrow \text{comuta}$$

(4.a) **Composição**

$$(T_{u_0} \circ R_\theta)(u) = R_\theta(u) + u_0$$

$$(R_\theta \circ T_{u_0})(u) = R_\theta(u) + R_\theta(u_0)$$

**Definição:**  $A \in O_2$ ,  $b \in \mathbb{R}^2$ ;

$$T_{A,b}(u) = A(u) + b$$



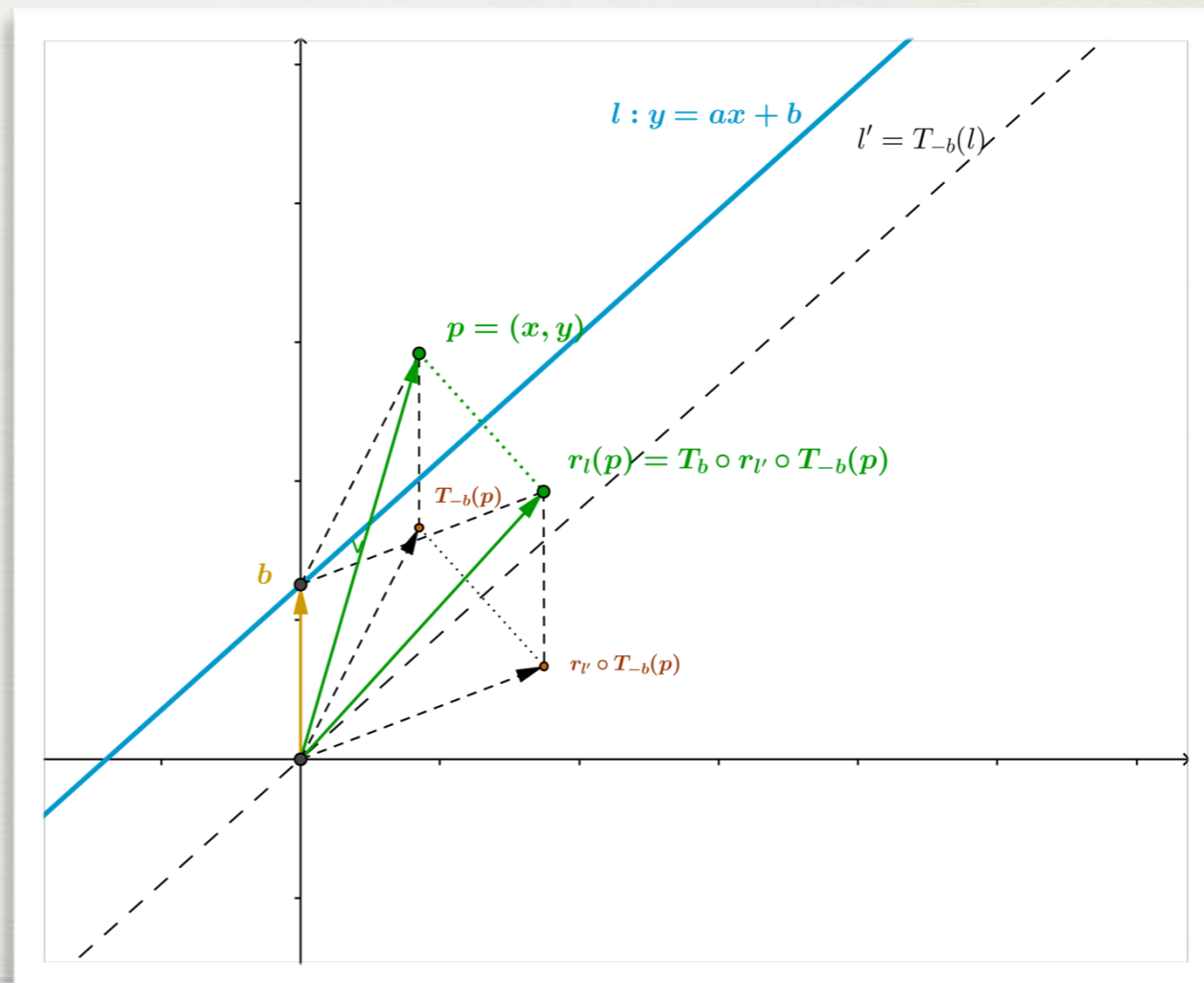
Exemplos: Seja  $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

(1.b) Reflexão sobre a reta

$$l : y = \operatorname{tg}(\theta)x - x_0 \operatorname{tg}(\theta)$$

$$r_l(u) = r_x R_{-2\theta}(u) - \frac{2x_0 \cdot \operatorname{tg}(\theta)}{1 + \operatorname{tg}^2(\theta)} (-\operatorname{tg}(\theta), 1), \quad (0.1)$$

$$\Rightarrow r_l = T_{r_x R_{-2\theta, b}(\theta, x_0)}$$

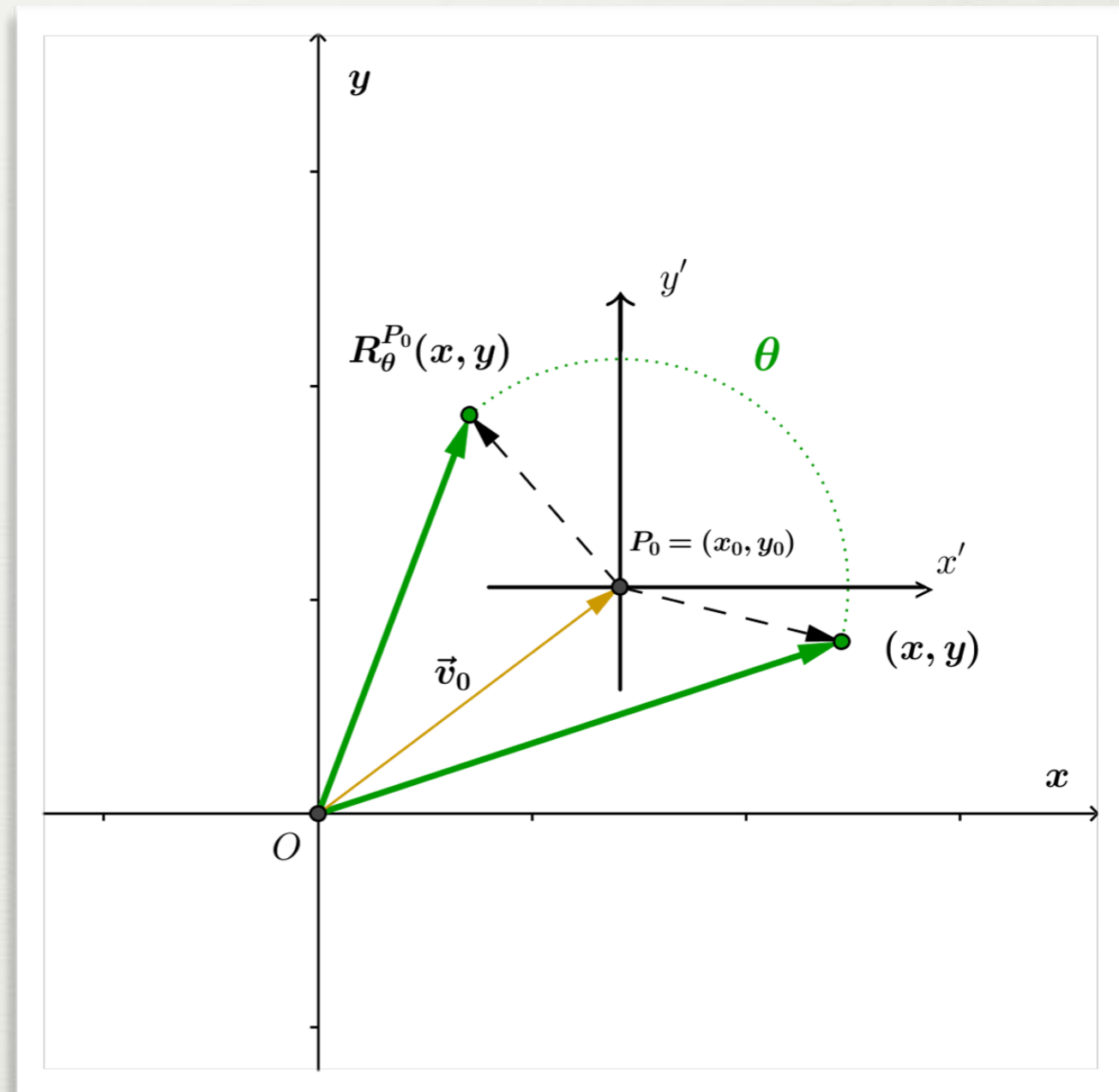




(2.b) Rotação com centro em  $P_0 = (x_0, y_0)$  e ângulo  $\theta$ ;  $v_0 = \vec{OP}_0$

$$R_\theta^{P_0}(u) = R_\theta(u) + v_0 - R_\theta(v_0)$$

$$\implies R_\theta^{P_0} = T_{R_\theta, v_0 - R_\theta(v_0)}$$





**TEOREMA:** Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma isometria. Então, existe  $A \in O_2$  e  $b \in \mathbb{R}^2$  tal que

$$F = T_{A,b} \implies T_{A,b}(u) = A.u + b.$$

### Classificação das Isometrias

$$Isom(\mathbb{R}^2) = \{F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid F \text{ é isometria}\}$$

é um GRUPO.

**Corolário** O grupo  $Isom(\mathbb{R}^2)$  goza das seguintes propriedades:

(i) O grupo  $Isom(\mathbb{R}^2)$  é gerado pelas reflexões.

(ii) Grupo das translações é  $\mathcal{T} = \mathbb{R}^2$  e

$$Isom(\mathbb{R}^2) = \mathcal{T} \rtimes O_2, \quad (\text{produto semi-direto}).$$

(iii) temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\iota} Isom(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{J} O_2 \longrightarrow 1. \quad (0.1)$$



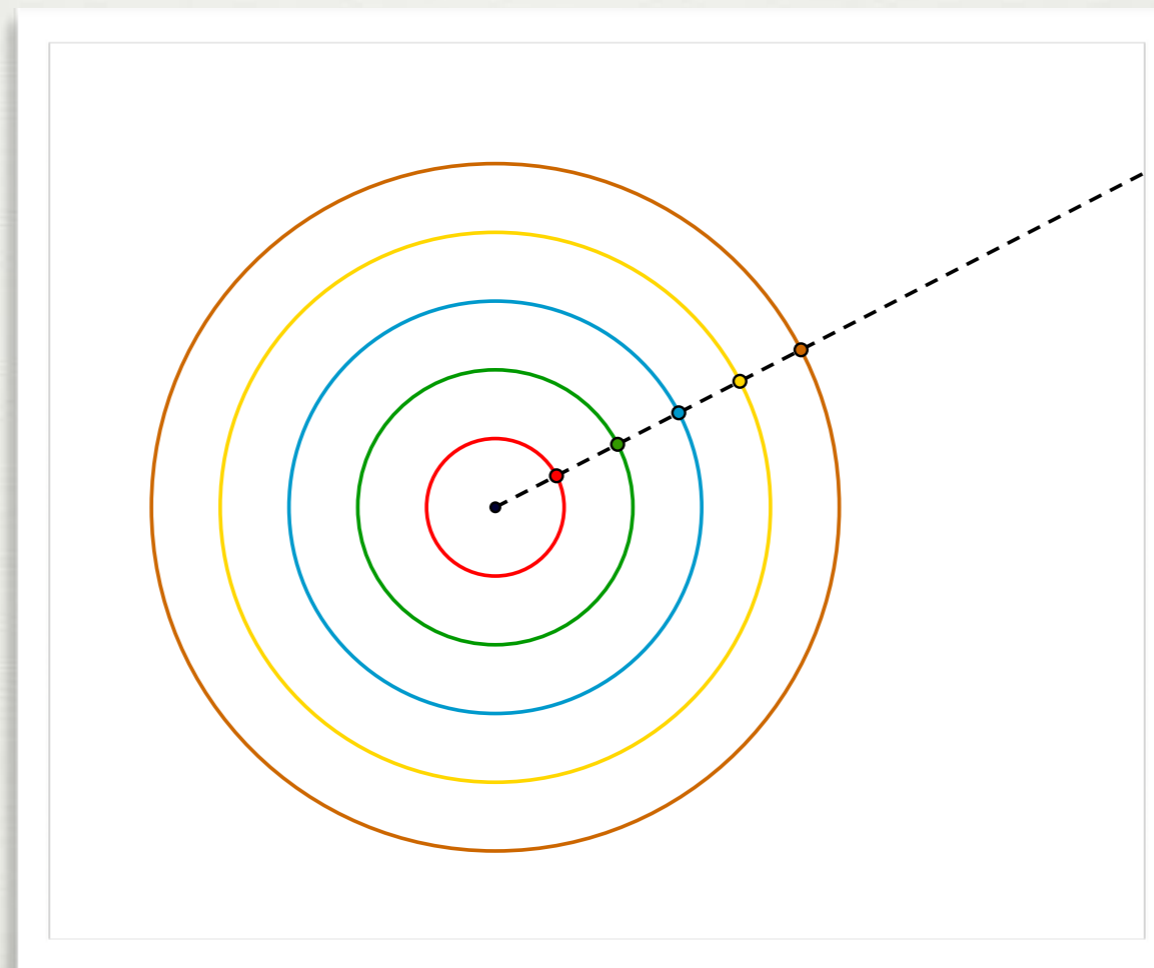
**Definição:** Uma ação de  $G$  sobre  $\Omega$  é uma aplicação  $\alpha : G \times \Omega \rightarrow \Omega$ , satisfazendo as seguintes condições;

- (1)  $\alpha(e, x) = x$  para todo  $x \in X$ ;
- (2)  $\alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x)$  para todos  $g, h \in G$  e  $x \in X$

**Notação:**  $\alpha(g, x) = g.x$

**Exemplos:**

- (1) Ação de  $SO_2$  sobre  $\mathbb{R}^2$ .  
A ação  $\alpha : SO_2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é definida por  $\alpha(R_\theta, v) = R_\theta.v$ .



a linha pontilhada é  
o espaço das órbitas  
da ação



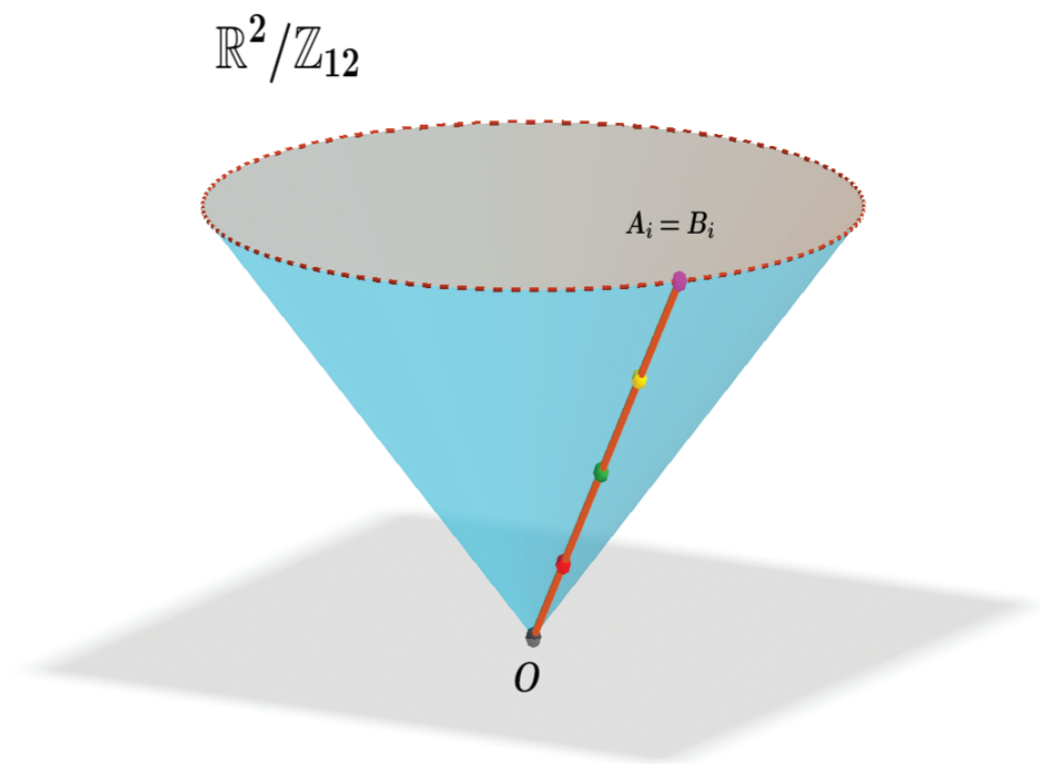
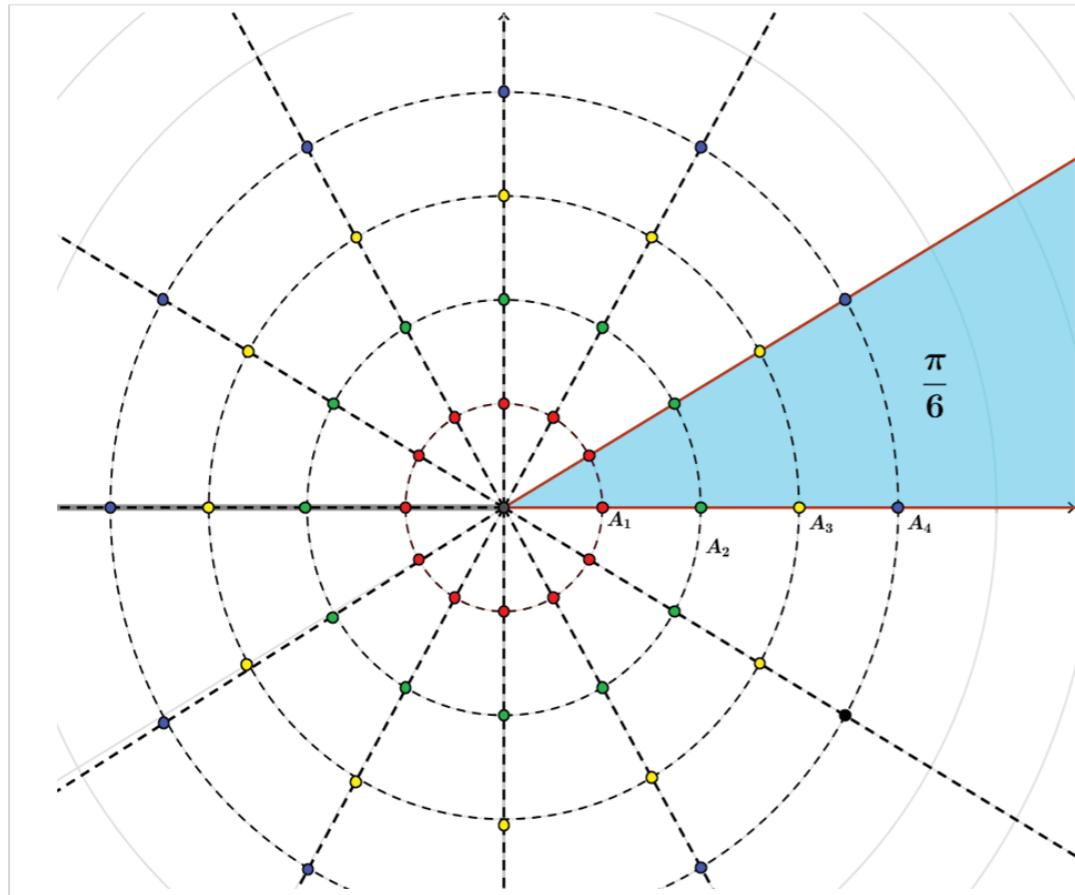
## Exemplos:

(2) Ação de  $\mathbb{Z}_n = \{I, R_{\frac{2\pi}{n}}, \dots, R_{\frac{2(n-1)\pi}{n}}\}$  sobre  $\mathbb{R}^2$ .

$$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$\left(\frac{2k\pi}{n}, (x, y)\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) & -\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\ \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (0.1)$$

$n=12$





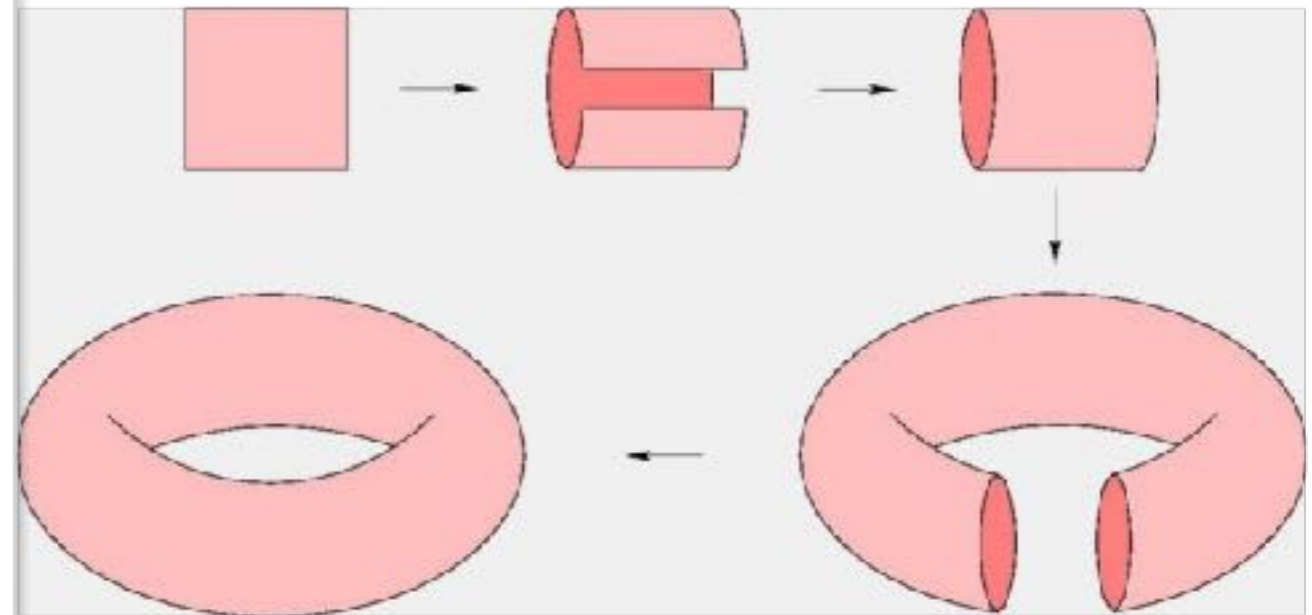
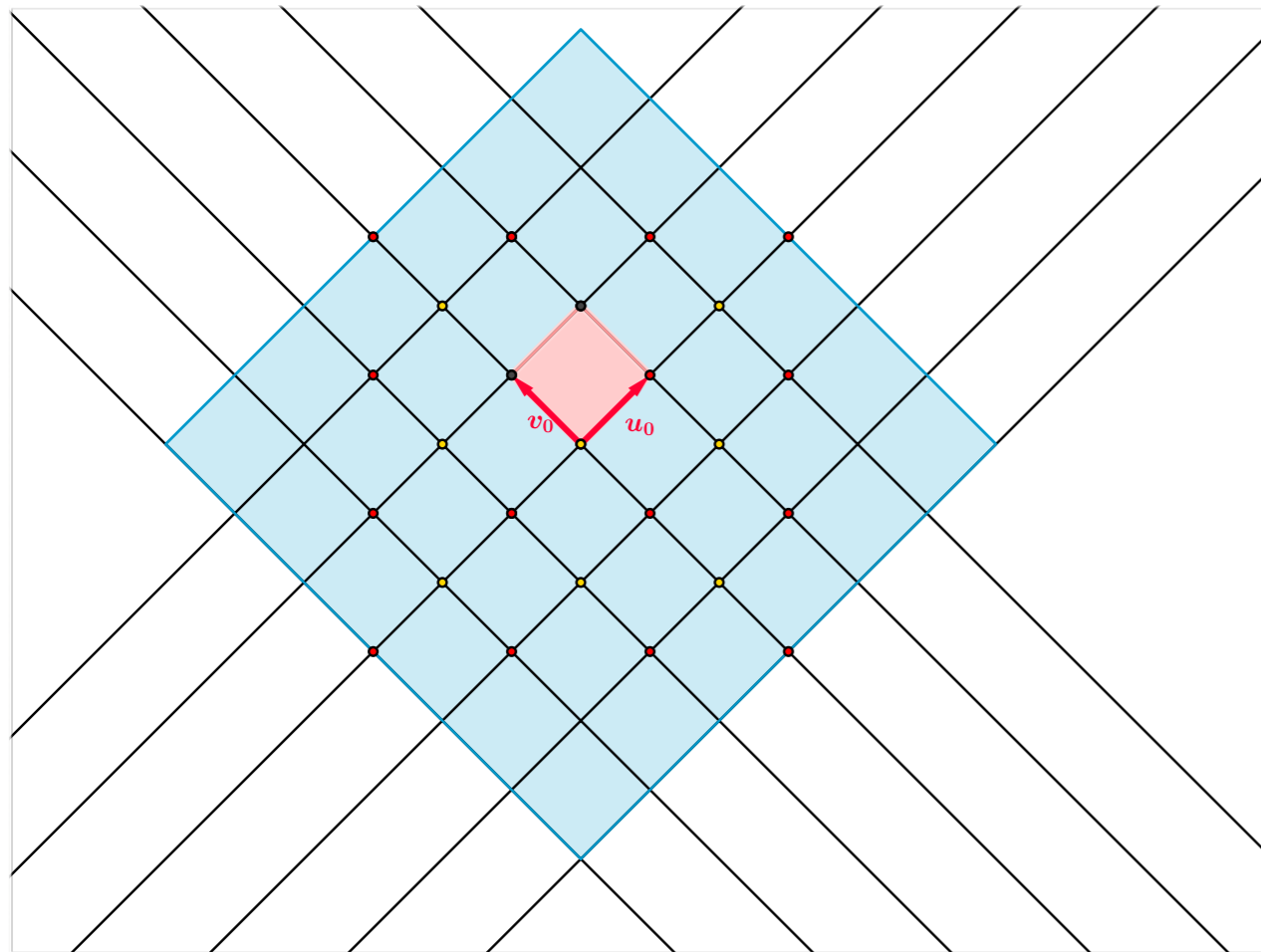
(3) Ação de  $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{R}^2$ .

- Sejam  $u = (1, 0)$ ,  $v = (0, 1)$ .  $G = \langle T_u, T_v \rangle$

$$g \in G \implies g = T_{nu+mv}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ (n, m) \cdot (x, y) &= (x + n, y + m) \end{aligned}$$

$$T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$$





## AÇÃO DE GRUPO 4

---

Exemplos:

(4)  $G = \langle T_u, K_{x,v} \rangle$ .

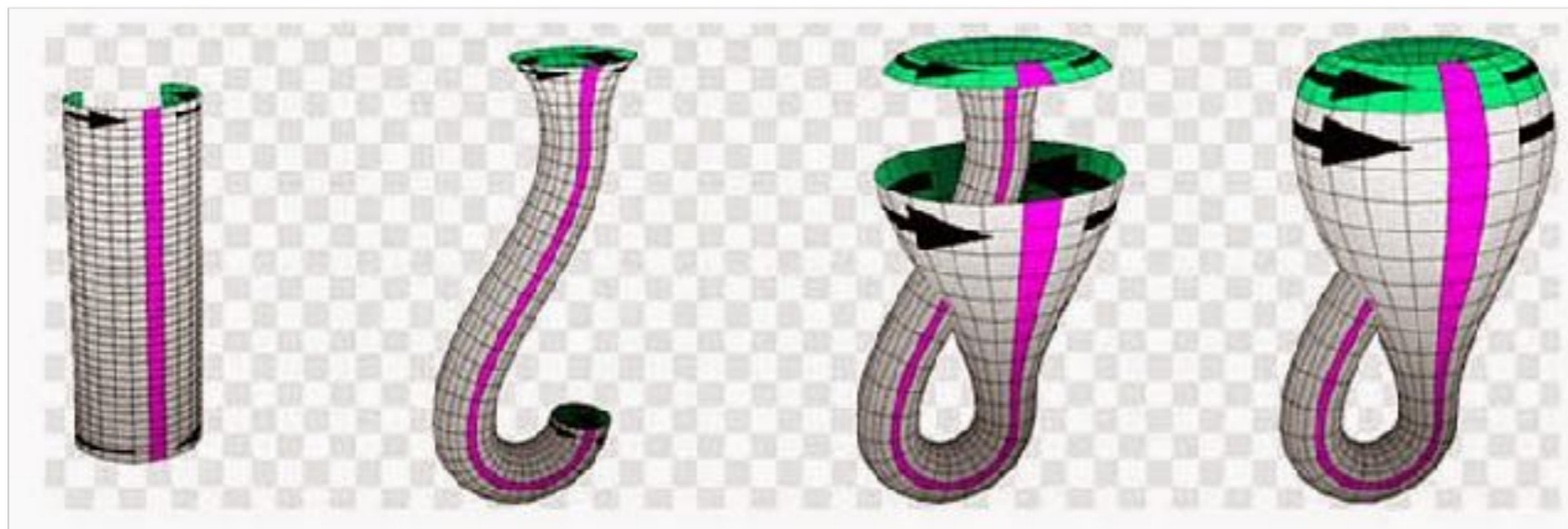
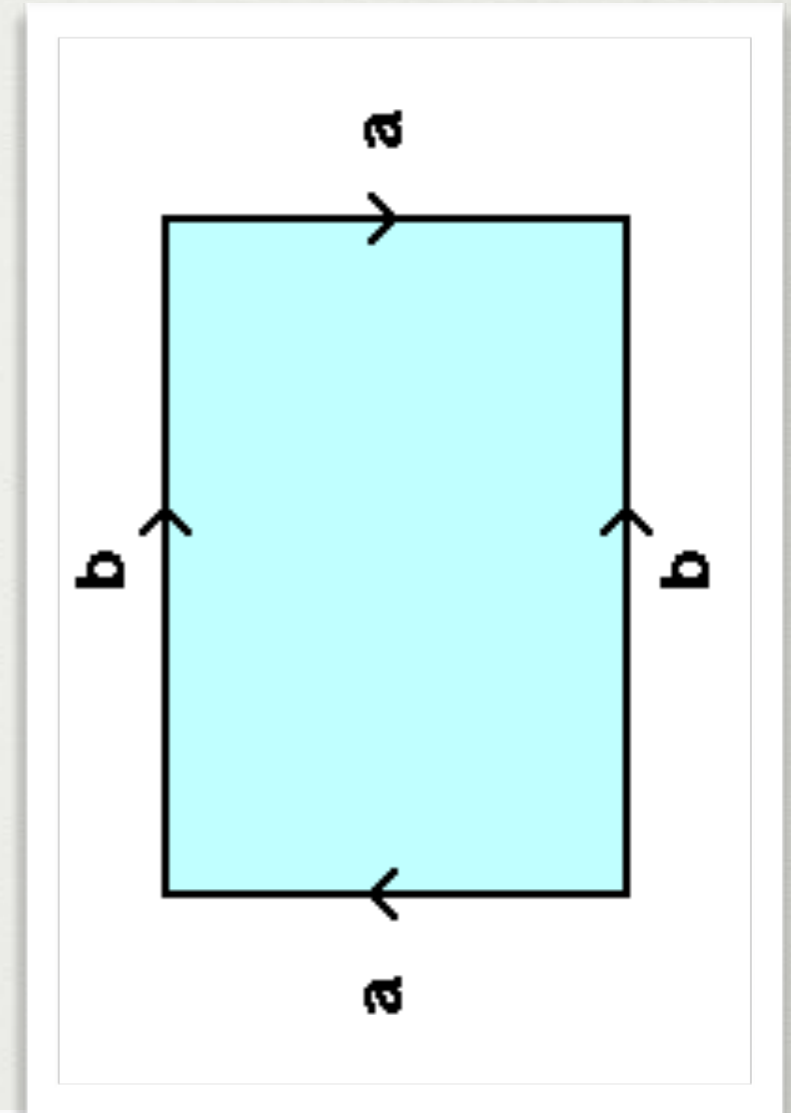
$u = (1, 0)$ ,  $v = (0, 1)$  e

- translação

$$T_u(x, y) = (x + 1, y),$$

- reflexão com deslizamento

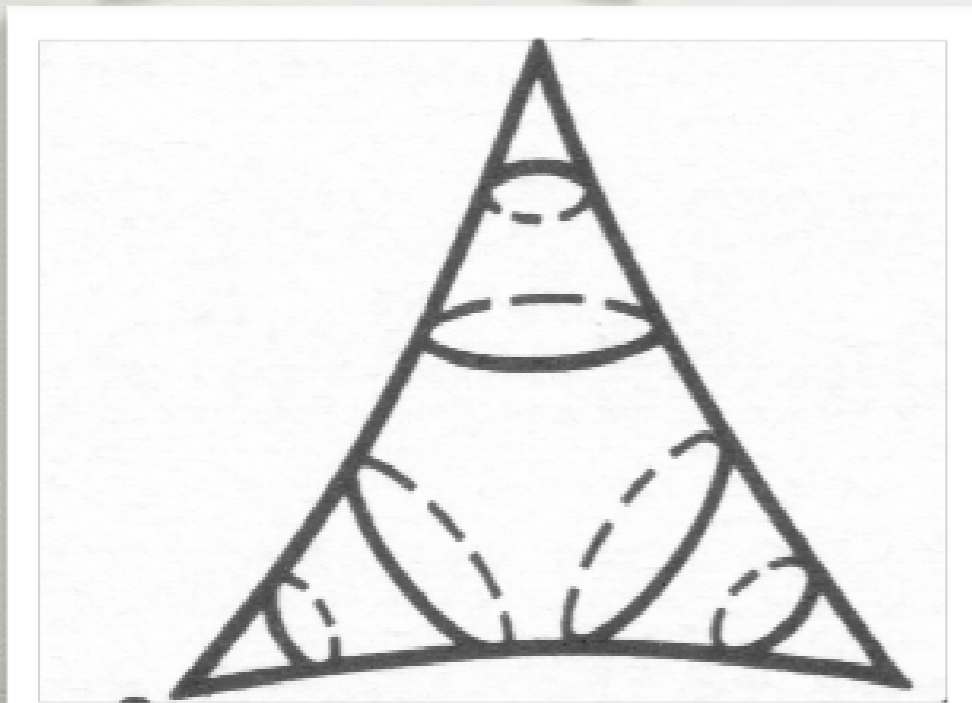
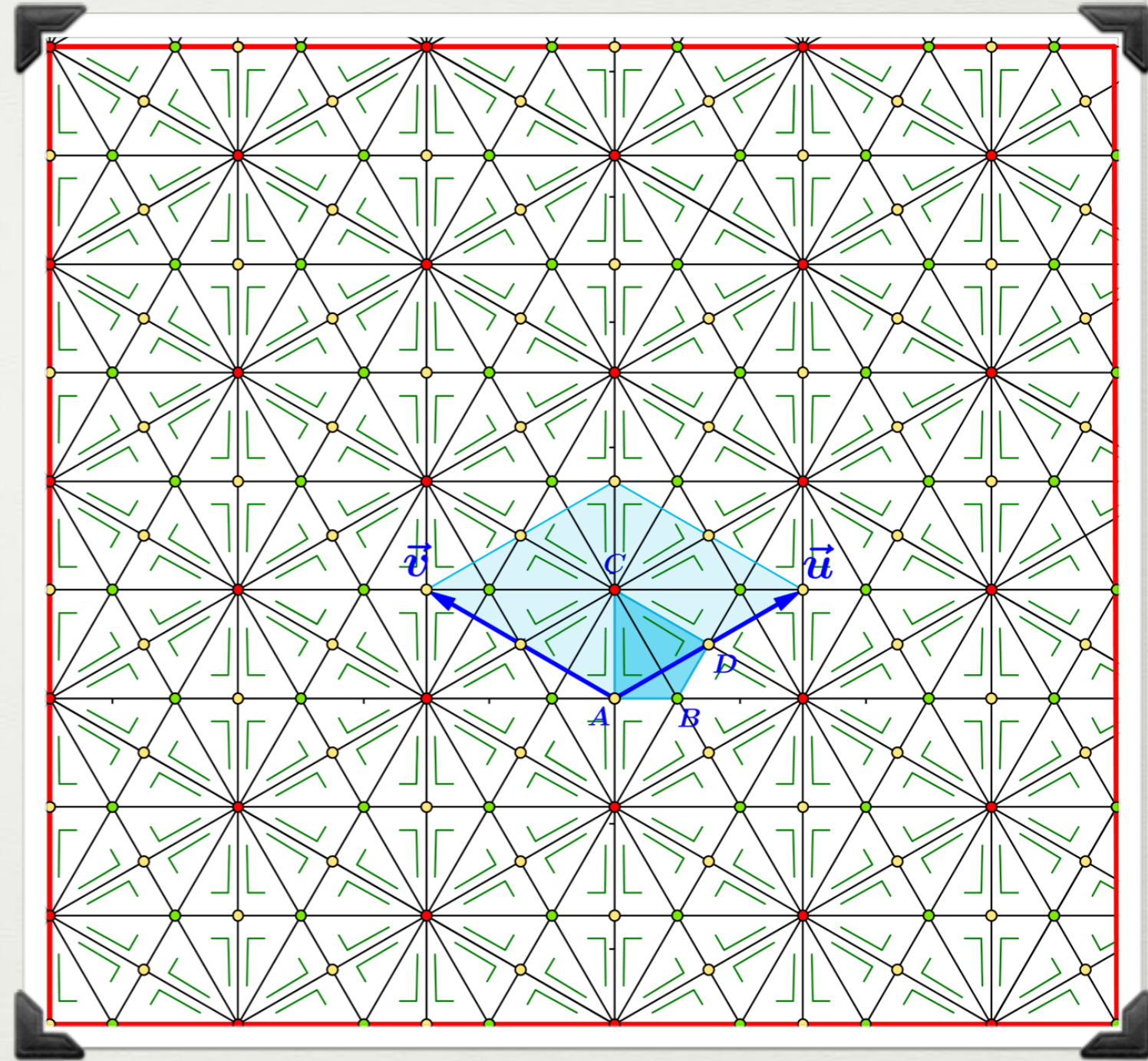
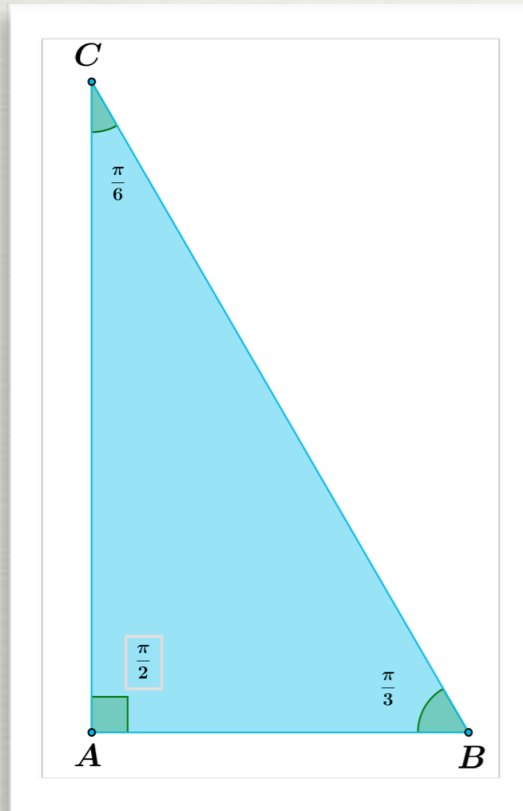
$$K_{x,v}(x, y) = T_{r_y,v}(x, y) = r_y(x, y) + (0, 1) = (-x, y + 1)$$





Exemplos:

$$(5) G = \langle R_{\pi}^A, R_{\frac{2\pi}{3}}^B, R_{\frac{\pi}{3}}^C \rangle$$





## GRUPOS QUE AGEM DESCONTINUAMENTE

Um Grupo  $G$  age descontinuamente sobre um conjunto  $X$  se, para todo conjunto compacto  $K \subset X$ ,

$$\{g \in G \mid K \cap g.K \neq \emptyset\} \text{ é FINITO}$$

Exemplos:

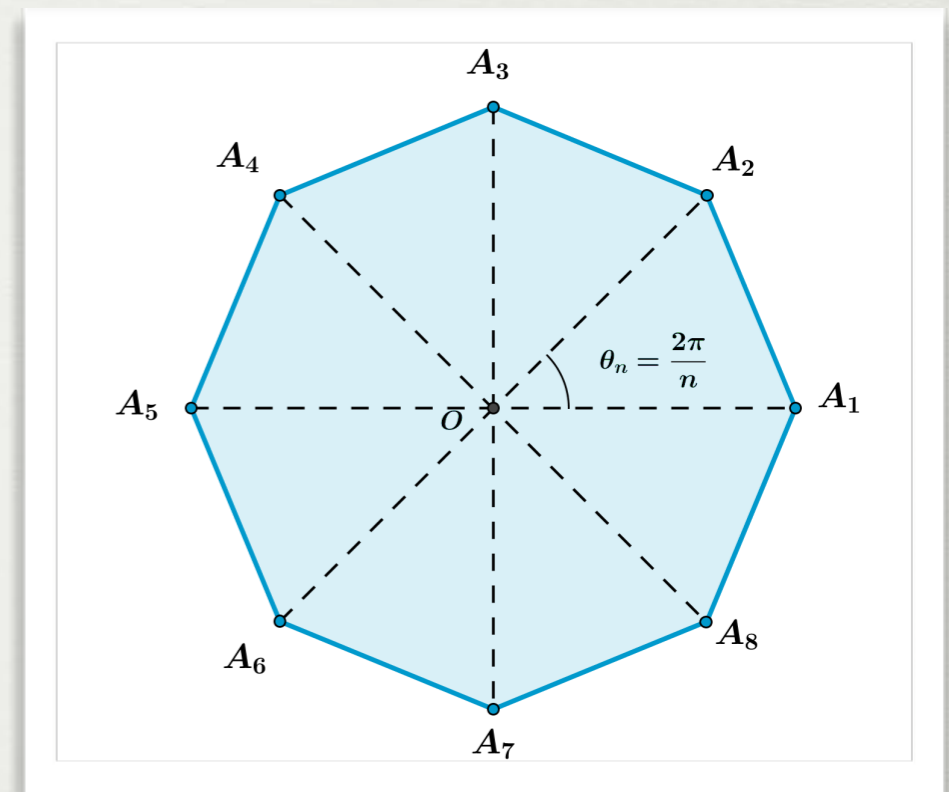
(1) Rotações

(1a.) Rotações com ângulo  $\theta = \frac{2\pi}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

- $G = \mathbb{Z}_n$  gerado por  $R_{\frac{2\pi}{n}}$  (raízes  $n$ -ésima de 1).

(1b.) Rotações com ângulo  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  (irracional).

- $G = \langle R_\theta \rangle$  NÃO age descontinuamente.



**Teorema:** Os subgrupos de  $O_2$  que agem descontinuamente sobre  $\mathbb{R}^2$  são  $\mathbb{Z}_n$  e  $D_n$  (diedral)



## GRUPOS QUE AGEM DESCONTINUAMENTE

---

Exemplos:

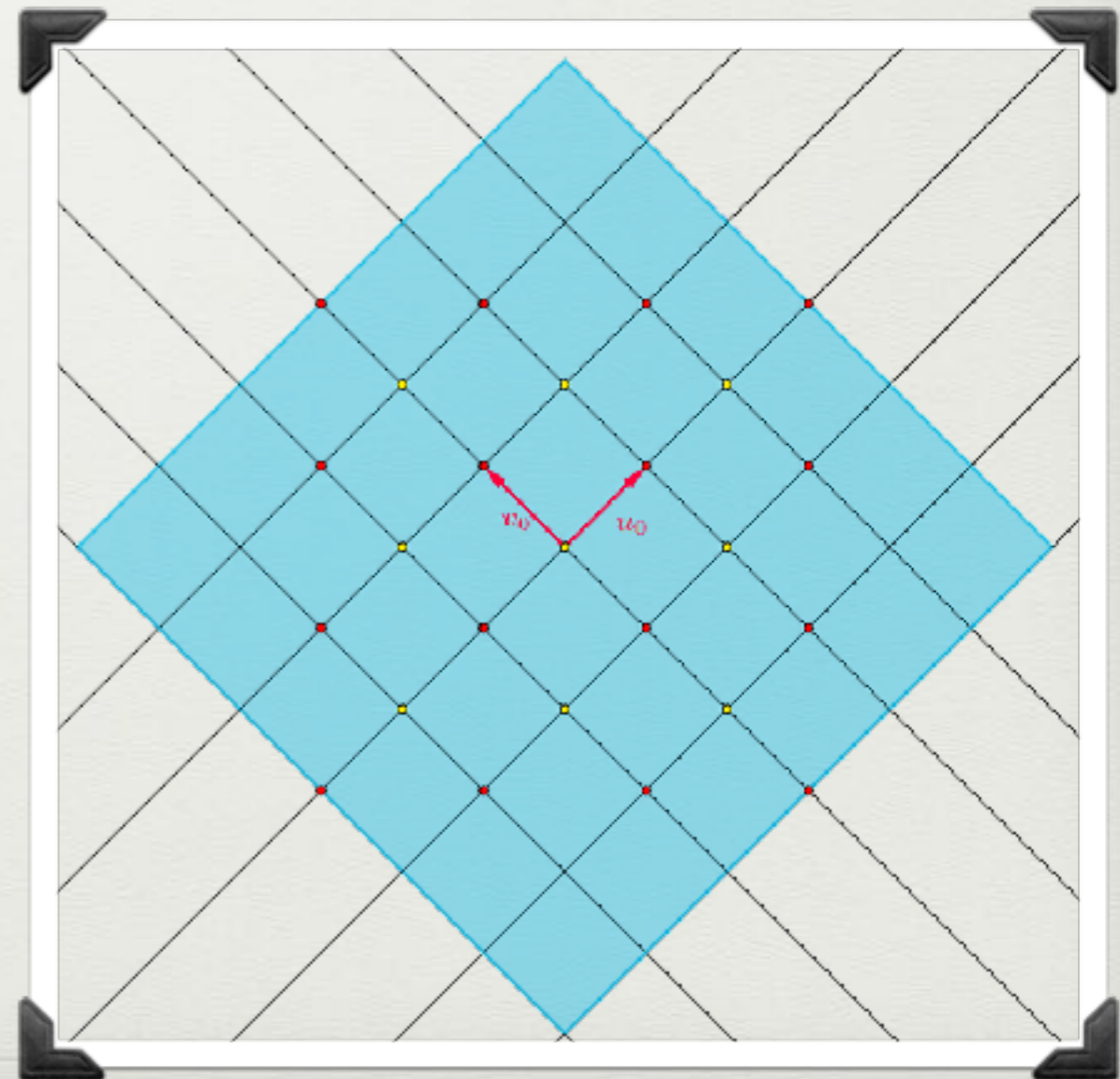
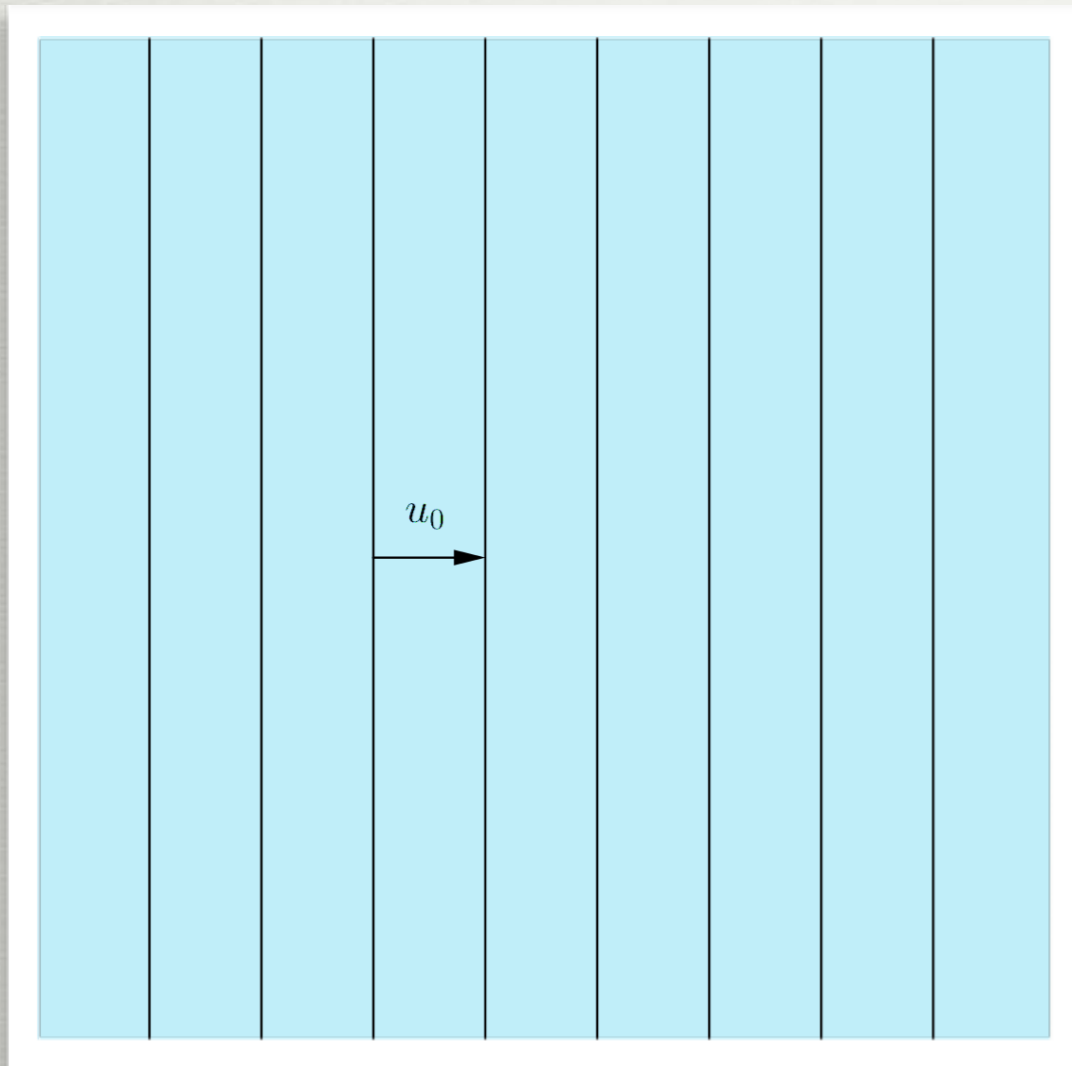
(2) Translações:  $u_0$  e  $v_0$  fixos

(2a) numa única direção.

$$\mathbb{Z} = \{T_{n \cdot u_0} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

(2b) duas direções

$$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \{T_{nu_0 + mv_0} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$





## GRUPOS QUE AGEM DESCONTINUAMENTE

---

Conhecidos os subgrupos discretos de  $O_2$  e de  $\mathcal{T}$ , poderemos descrever os subgrupos discretos de

$$\text{Isom}(\mathbb{E}^2) = \mathcal{T} \rtimes O_2.$$

Sejam;

- $G$  um grupo que age descontinuamente sobre  $\mathbb{R}^2$ .
- $O_G = G \cap O_2$ .
- $\mathcal{T}_G = G \cap \mathcal{T}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_G \longrightarrow G \longrightarrow O_G \longrightarrow 1,$$

Classificação:

- **Tipo I:** Se  $\mathcal{T}_G \simeq \mathbb{Z}$ .

(1)  $O_G = \{e\}$ ,

(2)  $O_G \simeq \mathbb{Z}_n$ ,

(3)  $O_G \simeq D_n$

- **Tipo II:** Se  $\mathcal{T}_G \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

(1)  $O_G = \{e\}$ ,

(2)  $O_G \simeq \mathbb{Z}_n$ ,

(3)  $O_G \simeq D_n$

$\mathcal{T}_G$  é um subgrupo normal



O **COMUTADOR** em  $G$  é

$$g, h \in G, \quad [g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$$

- **Prop A:** Se  $r_l$  e  $T_v$  pertencem a  $G$ , então

$$[r_l, T_v] = T_{2w} \in G.$$

$$w = v - \langle v, \hat{e} \rangle \hat{e}, \quad \hat{e} \text{ é vetor unitário paralelo a } l \quad (0.1)$$

**Corolário:**  $r_l, T_v \in G$ . Se  $v$  e  $l$  não forem ortogonais ou colineares, então o subgrupo  $G$  é do **tipo II**

- **Prop B:**  $P, Q \in \mathbb{R}^2$  na mesma órbita. Se  $R_\theta^P \in G$ , então  $R_\theta^Q \in G$ .

- **Prop C:** Se  $R_\theta^P$  e  $T_v \in G$ , então

$$[T_v, R_\theta^P] = T_w \in G,$$

onde  $w = v - R_\theta v$ .

**Corolário:** Se  $R_\theta^P$  e  $T_v \in G$ , e  $\theta \neq 0, \pi$ , então  $G$  é um grupo do **tipo II**

- **Prop D:**  $u_0 = \overline{OP}$  e  $v_0 = \overline{OQ}$ . Se  $R_\theta^P, R_\phi^Q \in G$ , então

$$[R_\theta^P, R_\phi^Q] = T_{w_0}, \text{ onde}$$

$$w_0 = (R_\theta + R_\phi - R_{\theta+\phi} - I)(v_0 - u_0). \quad (0.1)$$

$\Rightarrow G$  é um grupo do **tipo II**



# GRUPOS TRIANGULARES

- Os grupos triangulares são gerados pelas reflexões sobre os lados de um triângulo.

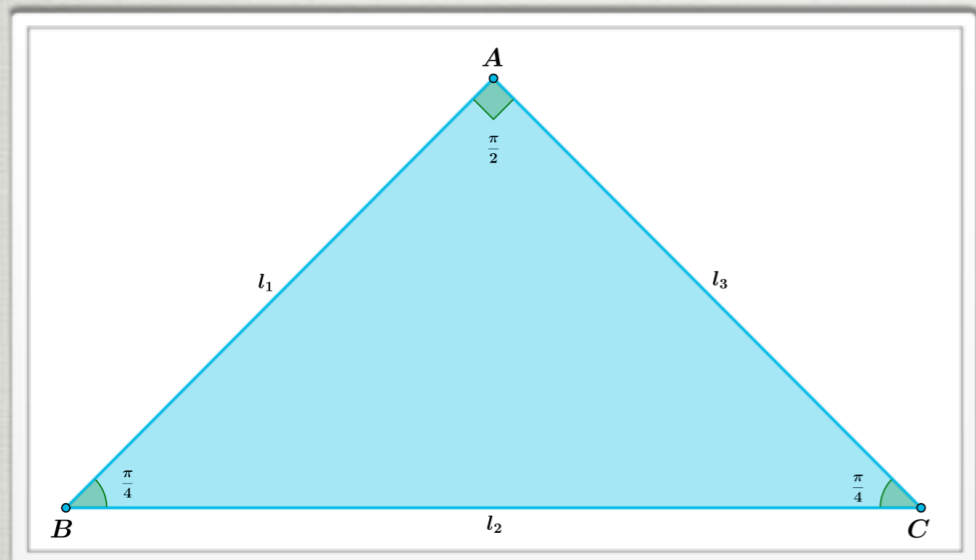
$$\underbrace{\Delta(\alpha, \beta, \gamma)}_{\text{triângulo}} \implies \underbrace{G(\alpha, \beta, \gamma)}_{\text{grupo}}$$

- se a ação do grupo sobre é descontínua, então os ângulos internos do triângulo devem ser da forma  $\frac{\pi}{m}$ ,  $\frac{\pi}{n}$  e  $\frac{\pi}{p}$ ,  $m, n, p \in \mathbb{N}$ . Logo,

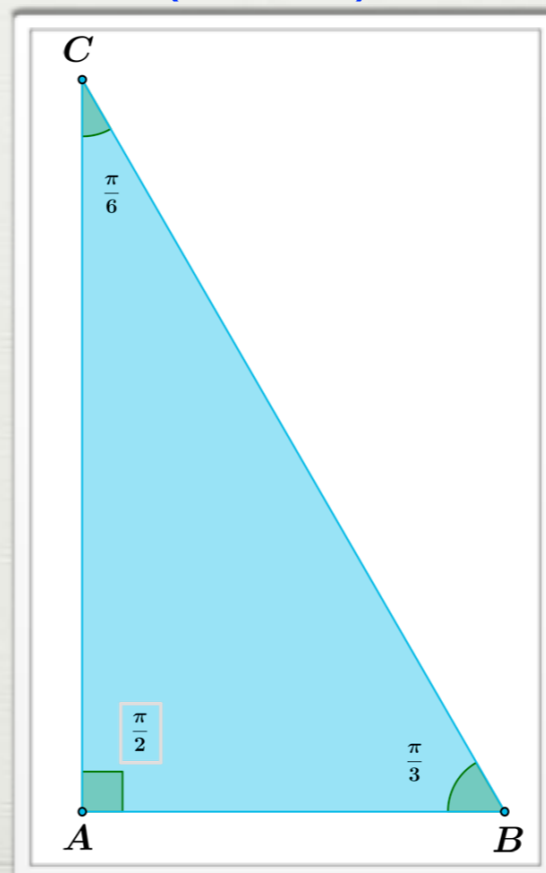
$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1$$

- As únicas soluções  $(m, n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  da equação acima são:

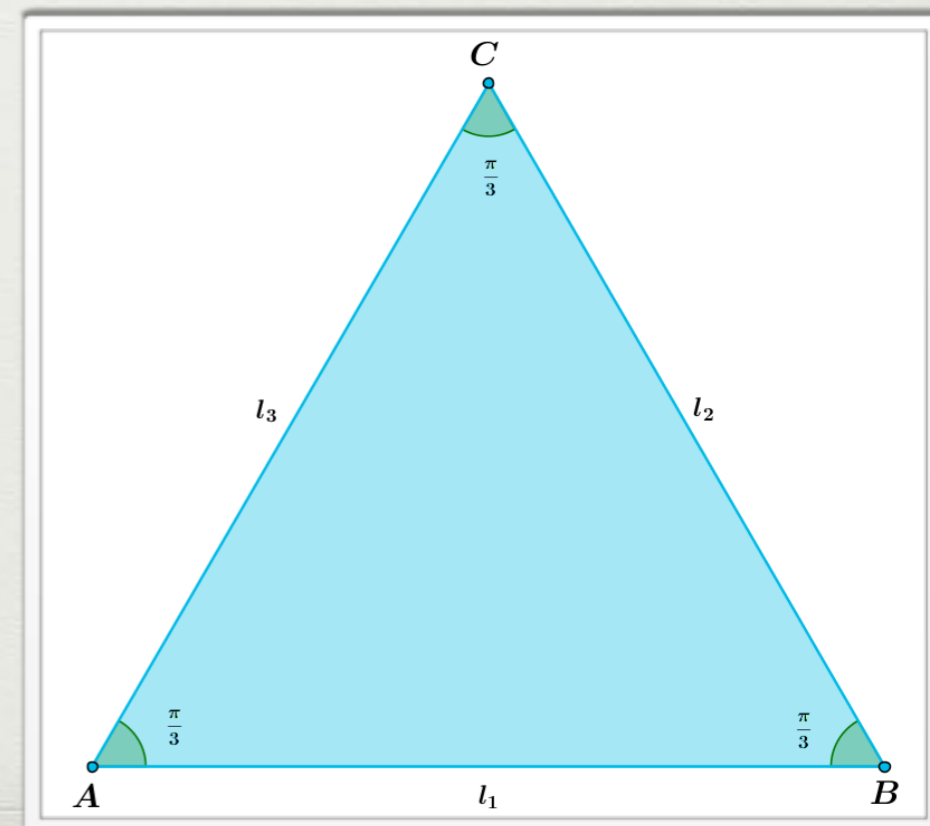
**(2,4,4)**



**(2,3,6)**



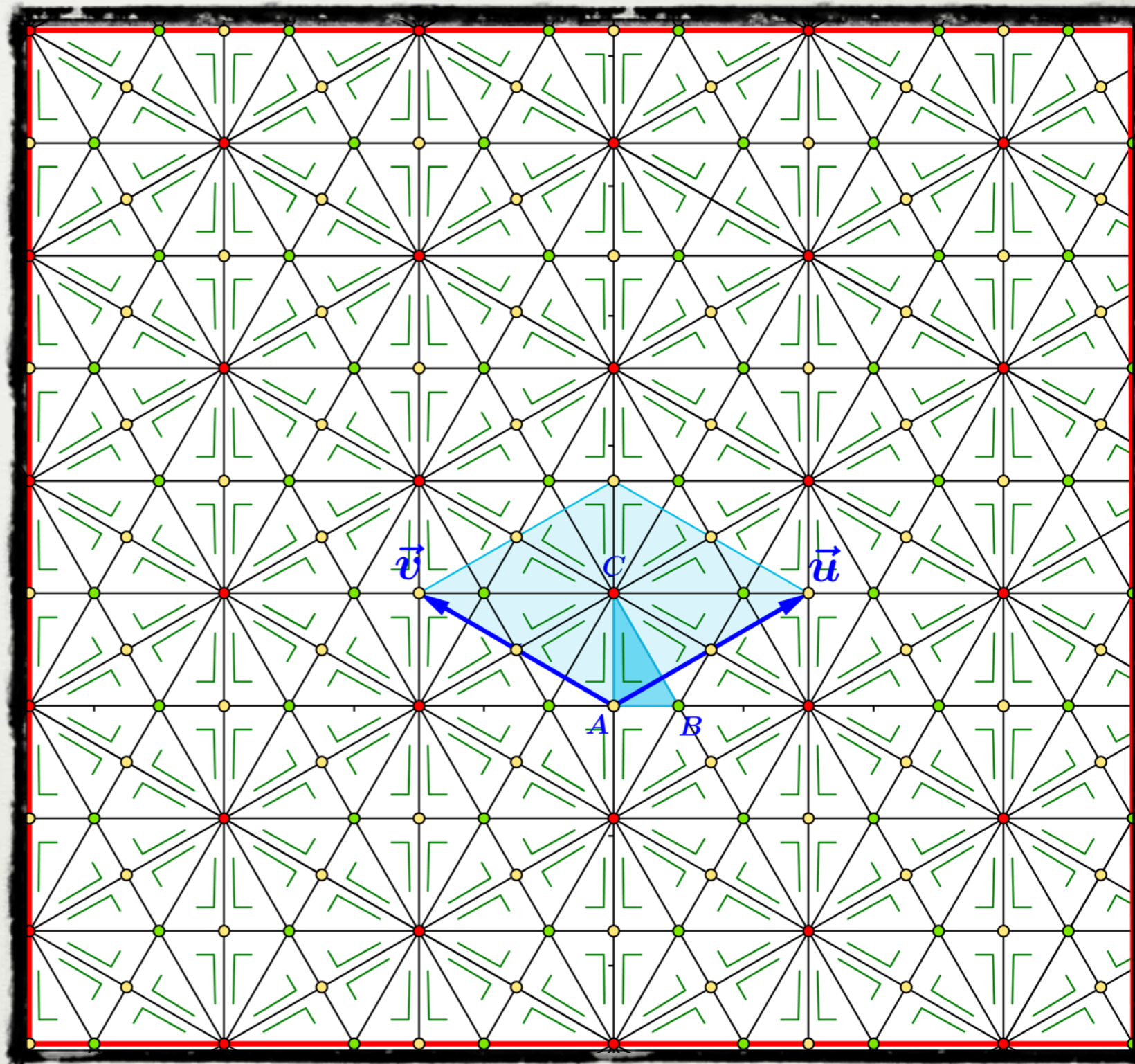
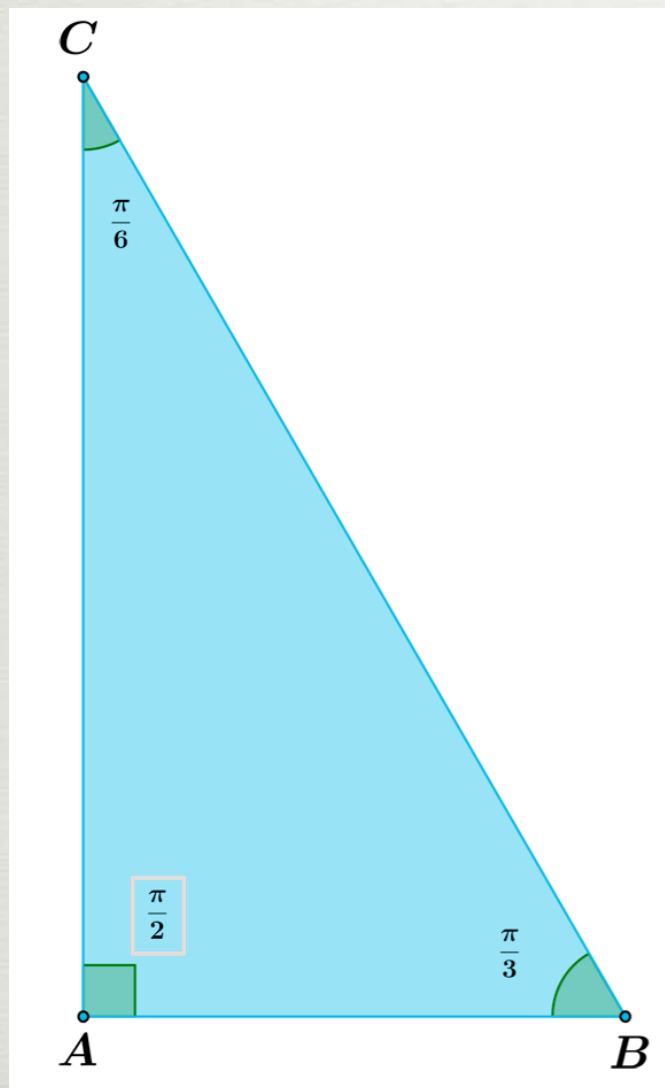
**(3,3,3)**





## $G(2,3,6)$

- (1) Reflexões:  $r_1, r_2$  e  $r_3$ .
- (2) Rotações:  $R_\pi^A, R_{\frac{2\pi}{3}}^B$  e  $R_{\frac{\pi}{3}}^C$
- (3) Translações:  $T_u = [R_\pi^A, R_{\frac{2\pi}{3}}^B], T_v = [R_{\frac{2\pi}{3}}^B, R_{\frac{\pi}{3}}^C]$
- (4) Reflexões com Deslizamento:  $K_{1,u}, K_{2,v}$ .





## OBSERVAÇÃO

- $G$  grupo discreto de  $Isom(\mathbb{R}^2) \rightsquigarrow (O_G, \mathcal{T}_G)$
- $\mathcal{T}_G$  é um subgrupo normal de  $G$
- $O_G$  age sobre o toro  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ .

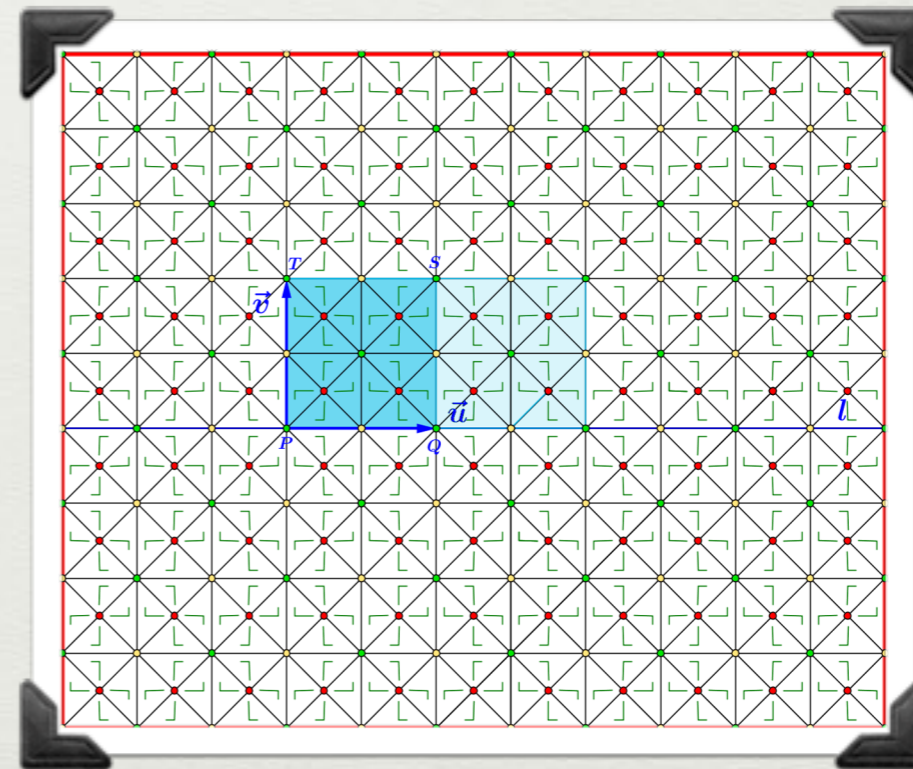
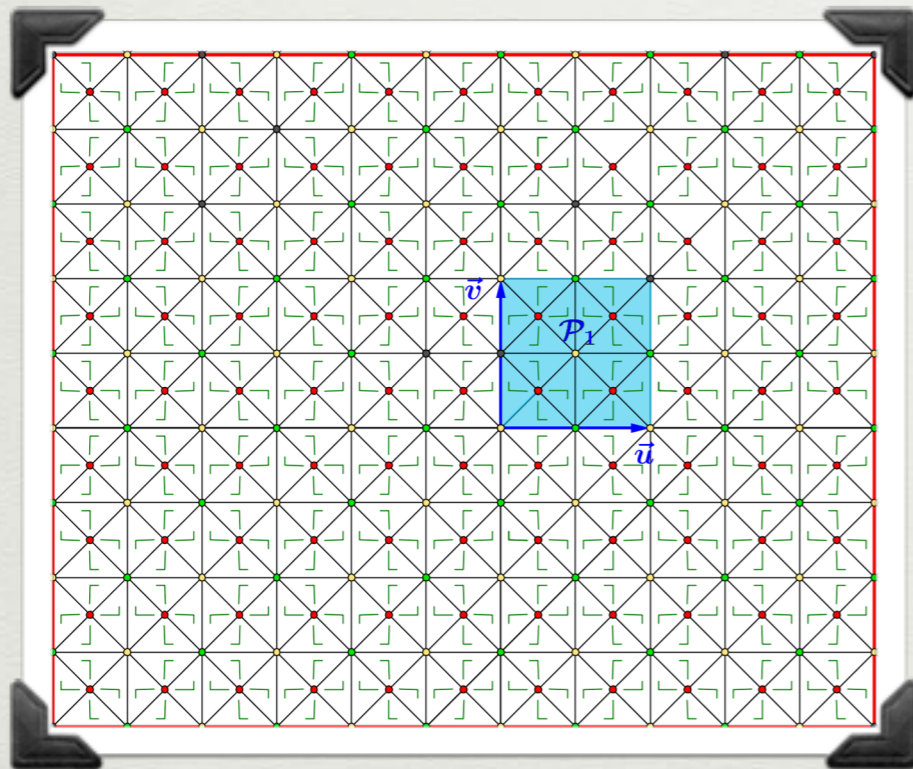
**TEOREMA:** As únicas superfícies obtidas como espaço das órbitas de um Grupo Cristalográfico são:

(1)  $T^2$  (Toro).

$$G_1'' = \langle T_u, T_v \rangle$$

(2)  $\mathbb{K}^2$  (Garrafa de Klein)

$$G_{16}'' = \langle K_{u;l}, T_v \rangle$$





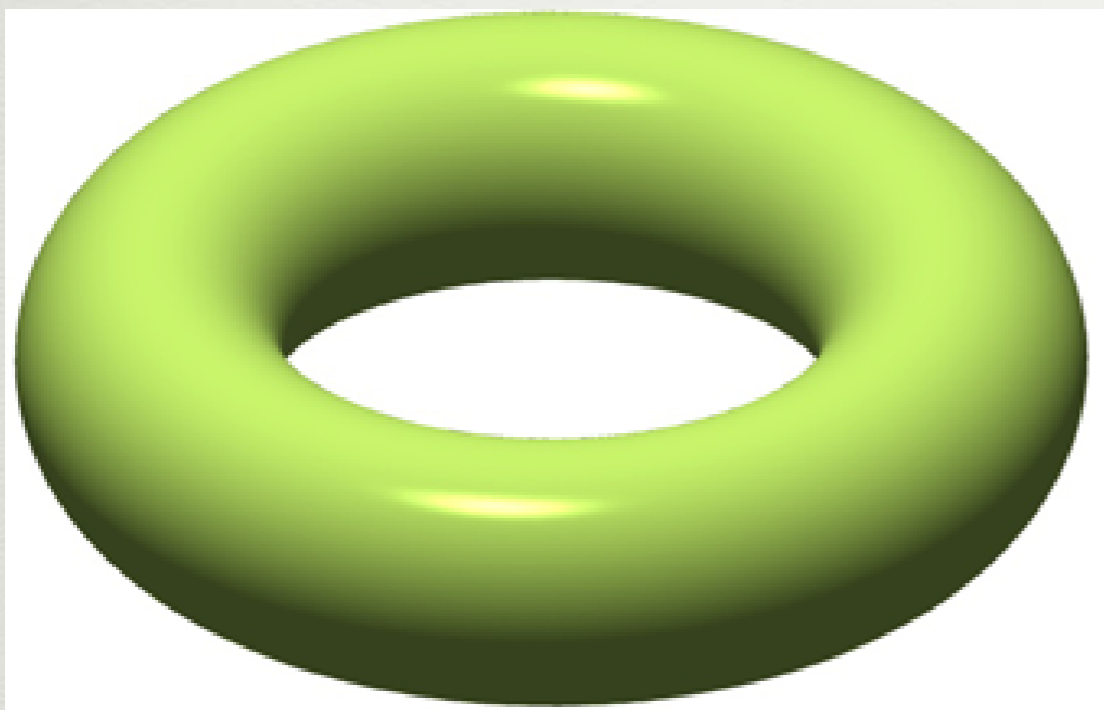
**TEOREMA:** As únicas superfícies obtidas como espaço das órbitas de um Grupo Cristalográfico são:

(1)  $T^2$  (Toro).

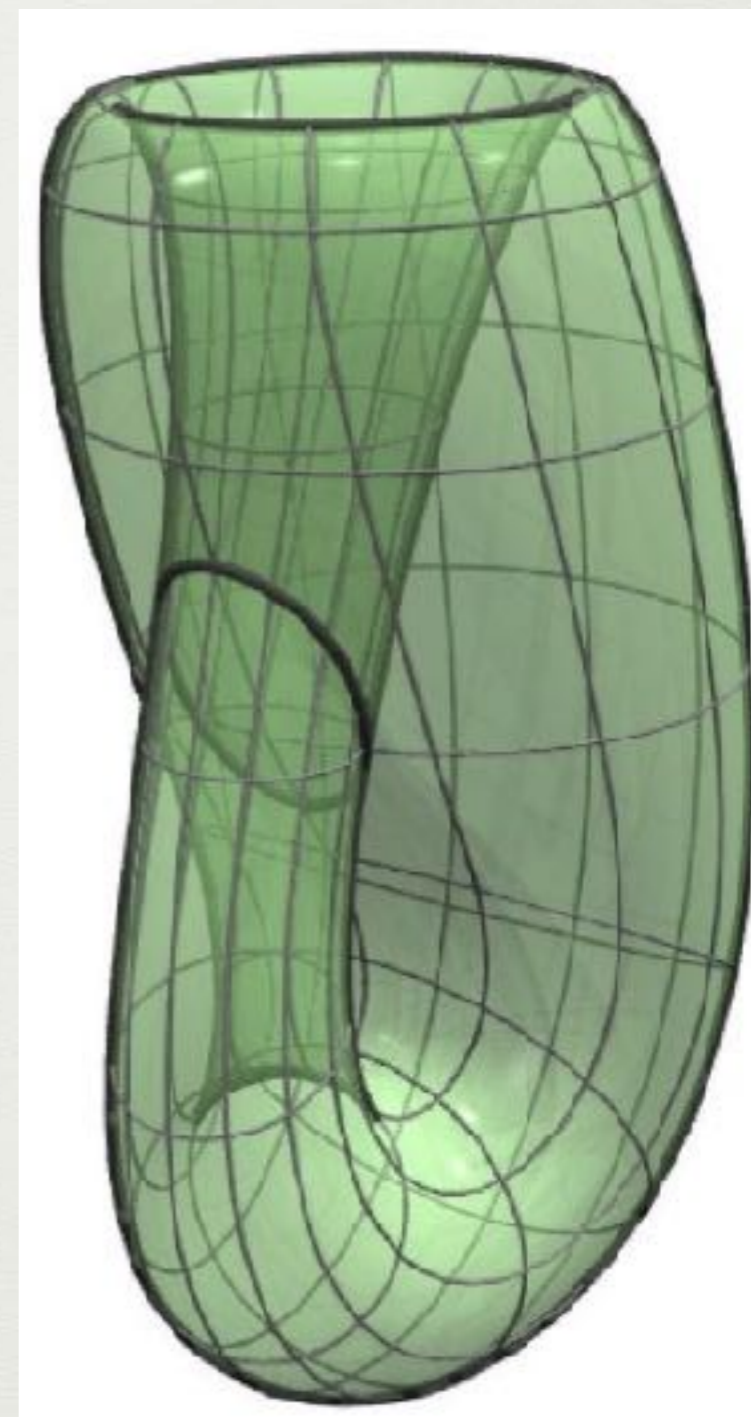
$$G_1'' = \langle T_u, T_v \rangle$$

(2)  $\mathbb{K}^2$  (Garrafa de Klein)

$$G_{16}'' = \langle K_{u;l}, T_v \rangle$$



Toro



Garrafa de Klein



TEOREMA: Existem apenas 17 GRUPOS CRISTALOGRÁFICOS

(grupos do tipo II)

## Classificação

$$(1) G_1^{II} = \langle T_u, T_v \rangle, \quad (4) G_4^{II} = \langle R_{2\pi/3}^A, R_{2\pi/3}^B, R_{2\pi/3}^G, r_l \rangle, \quad (7) G_7^{II} = \langle r_1, r_2, r_3 \rangle,$$

$$(2) G_2^{II} = \langle r_l, r_s, T_v \rangle, \quad (5) G_5^{II} = \langle r_l, r_s, R_\pi^P \rangle, \quad (8) G_8^{II} = \langle r_1, r_2, r_3 \rangle,$$

$$(3) G_3^{II} = \langle r_l, r_s, R_{\pi/2}^Q \rangle \quad (6) G_6^{II} = \langle R_\pi^P, R_\pi^Q, r_l, r_s \rangle \quad (9) G_9^{II} = \langle r_1, r_2, r_3 \rangle$$

$$(10) G_{10}^{II} = \langle r_{l_1}, r_{l_2}, r_{s_1}, r_{s_2} \rangle, \quad (13) G_{13}^{II},$$

$$(11) G_{11}^{II} = \langle R_\pi^A, R_{2\pi/3}^B, R_{\pi/3}^C \rangle, \quad (14) G_{14}^{II} = \langle R_\pi^{P_1}, R_\pi^{Q_1}, R_\pi^{S_1}, R_\pi^{S_2} \rangle,$$

$$(12) G_{12}^{II} = \langle R_\pi^A, R_{\pi/2}^B, R_{\pi/2}^C \rangle \quad (15) G_{15}^{II} = \langle r_l, r_s, K_{u;t} \rangle$$

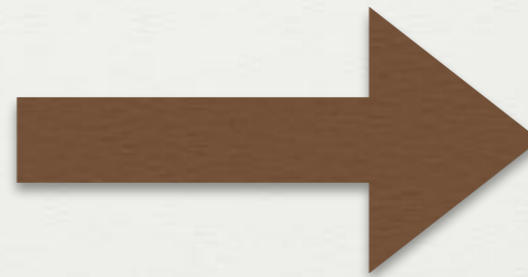
$$(16) G_{16}^{II} = \langle K_{u;l}, T_v \rangle,$$

$$(17) G_{17}^{II} = \langle R_\pi^P, R_\pi^Q, K_{v;l} \rangle$$

# Classificação das Superfícies Compactas e sem Bordo



Topologia Algébrica





## CLASSIFICAÇÃO DAS SUPERFÍCIES FECHADAS

---

Superfície Fechada = Superfície Compacta e sem Bordo.

### Grupo de Homologia:

$$M \rightsquigarrow H_1(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g}$$

$g$  = número de buracos

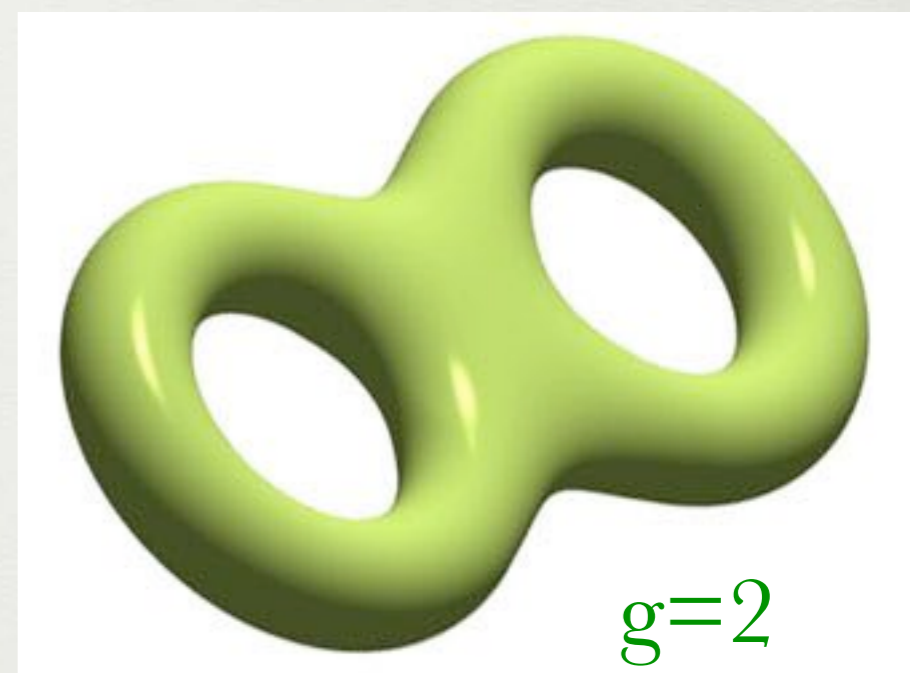
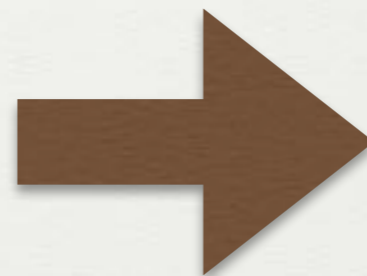
**Teorema:**  $g$  classifica as superfícies fechadas;

(1)  $M$  é orientável.

(1a) Se  $\chi(M) = 2$ , então  $M$  é homomorfa a  $S^2$ .

(1b) Se  $\chi(M) = 2 - 2g$ , então  $M$  é homomorfa a

$$T^2 \# \dots \# T^2 \quad (g = n^o \text{ de toros}).$$



(2)  $M$  é não orientável.

(2a) Se  $\chi(M) = 2 - g$ , então  $M$  é homomorfa a

$$\mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2 \quad (g = n^o \text{ de planos projetivos})$$

$$\text{Garrafa de Klein} \rightsquigarrow \mathbb{K}^2 = \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$$

# GRUPOS CRISTALOGRÁFICOS

## CLASSIFICAÇÃO

### • Definição Notação de Conway-Huson:

$G < Isom(\mathbb{R}^2) \rightsquigarrow \mathcal{T}_G$  e  $O_G = G \cap O_2$  (grupo finito) agindo sobre  $M$  e  $\Sigma_g^k = \mathbb{R}^2/G$ .

Considere a tripla  $(\Sigma_g^k, \mathcal{R}, \mathcal{C})$ ;

(1)  $\Sigma_g^k = \mathbb{T}^2/O_G$ .

A ação  $G \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  induz a ação  $O_G \times \frac{\mathbb{R}^2}{\mathcal{T}_G} \rightarrow \frac{\mathbb{R}^2}{\mathcal{T}_G}$  sobre o toro  $\mathbb{T}^2 = \frac{\mathbb{R}^2}{\mathcal{T}_G}$ .

(2)  $\mathcal{R} = (p_1, \dots, p_n)$  são os pontos singulares no interior de  $\Sigma_g^k$  (centros de rotação) com ângulos  $\theta_i = \theta(p_i) = \frac{2\pi}{n_i}$ ,

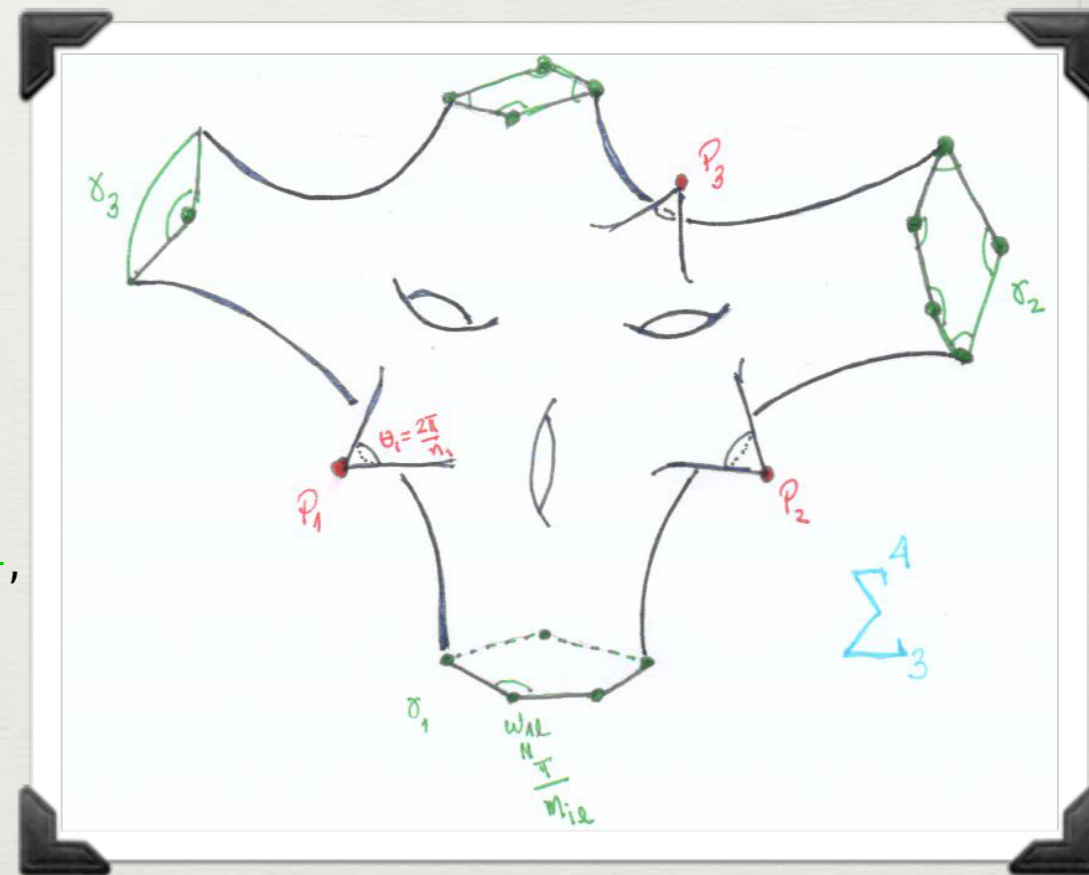
(3)  $\mathcal{C} = (\overbrace{\omega_{11}, \dots, \omega_{1t_1}}^{\gamma_1}; \dots; \overbrace{\omega_{k1}, \dots, \omega_{k,t_k}}^{\gamma_k})$ .

(3a)  $\partial\Sigma_g^k = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$ .

(3b) Cada componente do bordo  $\gamma_i$  tem  $t_i$  corneres  $c_{il}$

$C_i = \{c_{il} \mid 0 \leq c_{il} \leq t_i\}$ .

(3c) A cada corner associamos o ângulo  $\omega_{il} = \omega(c_{il}) = \frac{\pi}{m_{il}}$ ,





## CLASSIFICAÇÃO

- Característica de Euler de uma Ação

Associado a tripla  $(\Sigma_g^k, \mathfrak{R}, \mathfrak{C})$ , temos a característica de Euler da ação

$$\chi_\alpha(\Sigma_g^k) = 2 - \zeta \cdot g - k - \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{\theta_i}\right) - \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^{t_i} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\omega_{il}}\right),$$

$$\zeta = \begin{cases} 2, & \text{se } \Sigma_g^k \text{ é orientável} \\ 1, & \text{se } \Sigma_g^k \text{ é não orientável.} \end{cases} .$$

TEOREMA:  $\Sigma_g^k = T^2/O_G \implies \chi_\alpha(\Sigma_g^k) = 0$ . Logo,

$$\zeta \cdot g + k + \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{\theta_i}\right) + \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^{t_i} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\omega_{il}}\right) = 2. \quad (0.1)$$

## GRUPOS CRISTALOGRAFICOS - CLASSIFICAÇÃO

---

As únicas configurações possíveis satisfazendo a identidade

$$\zeta \cdot g + k + \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{\theta_i}\right) + \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^{t_i} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\omega_{il}}\right) = 2. \quad (0.1)$$

estão nas tabelas 1 e 2 a seguir;

### (1) Orientáveis $\zeta = 2$

n	$C_n$	g	k	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$
1	o	1	0	—	—	—	—	—	—	—	—
2	**	0	2	—	—	—	—	—	—	—	—
3	4*2	0	1	$\frac{2\pi}{4}$	—	—	$\frac{\pi}{2}$	—	—	—	—
4	3*3	0	1	$\frac{2\pi}{3}$	—	—	$\frac{\pi}{3}$	—	—	—	—
5	2*22	0	1	$\frac{2\pi}{2}$	—	—	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	—	—	—
6	22*	0	1	$\frac{2\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{2}$	—	—	—	—	—	—
7	*632	0	1	—	—	—	—	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	—
8	*442	0	1	—	—	—	—	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	—
9	*333	0	1	—	—	—	—	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	—
10	*2222	0	1	—	—	—	—	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
11	632	0	0	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{2}$	—	—	—	—	—
12	442	0	0	$\frac{2\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{2}$	—	—	—	—	—
13	333	0	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	—	—	—	—	—
14	2222	0	0	$\frac{2\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{2}$	—	—	—	—

### (2) Não Orientáveis $\zeta = 1$

15	*x	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—
16	xx	2	0	—	—	—	—	—	—	—	—
17	22x	1	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	—	—	—	—	—	—



**\* \* \* FIM \* \* \***