Uma introdução aos sistemas dinâmicos não-lineares

Matheus Cheque Bortolan

Universidade Federal de Santa Catarina

O que são sistemas dinâmicos?

O que são sistemas dinâmicos?

- Estudo de modelos onde a evolução de um determinado “evento” varia com o tempo decorrido.

O que são sistemas dinâmicos?

- Estudo de modelos onde a evolução de um determinado "evento" varia com o tempo decorrido.
- O tempo decorrido pode ou não depender explicitamente do instante inicial: não-autônomos x autônomos.

O que são sistemas dinâmicos?

- Estudo de modelos onde a evolução de um determinado "evento" varia com o tempo decorrido.
- O tempo decorrido pode ou não depender explicitamente do instante inicial: não-autônomos x autônomos.
- O tempo decorrido pode ser medido em escala discreta ou contínua.

Exemplos

- Crescimento de uma população;

Exemplos

- Crescimento de uma população;
- Deslocamento de uma partícula;

Exemplos

- Crescimento de uma população;
- Deslocamento de uma partícula;
- Oscilação de um pêndulo;

Exemplos

- Crescimento de uma população;
- Deslocamento de uma partícula;
- Oscilação de um pêndulo;
- Dissipação de calor num objeto;

Exemplos

- Crescimento de uma população;
- Deslocamento de uma partícula;
- Oscilação de um pêndulo;
- Dissipação de calor num objeto;
- Escoamento de um fluido num recipiente,

Exemplos

- Crescimento de uma população;
- Deslocamento de uma partícula;
- Oscilação de um pêndulo;
- Dissipação de calor num objeto;
- Escoamento de um fluido num recipiente,

- Basicamente, qualquer evento que varie com o tempo!!

Sistemas dinâmicos e EDs

Veremos um poucos dos sistemas dinâmicos que surgem de equações diferenciais.

Sistemas dinâmicos e EDs

Veremos um poucos dos sistemas dinâmicos que surgem de equações diferenciais.

- Semigrupos

Sistemas dinâmicos e EDs

Veremos um poucos dos sistemas dinâmicos que surgem de equações diferenciais.

- Semigrupos
- Processos de evolução

Nomes da área

Olga Ladyzhenskaya

Nomes da área

Olga Ladyzhenskaya

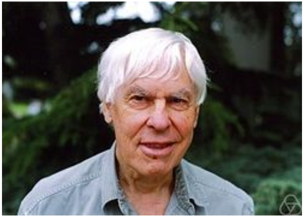
Geneviève Raugel

Nomes da área

Samuel Morse

Nomes da área

Samuel Morse



Stephen Smale

Nomes da área

Jack Hale, Waldyr Oliva, Peter Kloeden, Anatoli Babin, Mark Vishik, Roger Temam, George Sell, Daniel Henry, dentre muitos outros...

Semigrupos

Consideramos X um espaço métrico (ou topológico), $C(X)$ o conjunto das aplicações contínuas de X em X e $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$. Um semigrupo é uma família $\mathcal{S} = \{S(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\} \subset C(X)$ que satisfaz:

(i) $S(0) = id_X$;

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$ para todo $t, s \in \mathbb{T}^+$.

Se $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, dizemos mais especificamente que $\mathcal{S}$ é um semigrupo discreto.

Semigrupos

Se além de (i) e (ii), $\mathcal{S}$ satisfaz:

(iii) a aplicação $\mathbb{T}^+ \times X \ni (t,x) \mapsto S(t)x \in X$ é contínua,

dizemos que $\mathcal{S}$ é um C_0-semigrupo.

Exemplo

Considere a aplicação $S(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$S(t)x_0 = x_0 e^{-\alpha t}, \text{ para } t \geqslant 0 \text{ e } x_0 \in \mathbb{R}.$$

Então $\mathcal{S} = \{S(t)\colon t \geqslant 0\}$ é um C_0-semigrupo.

Exemplo

Considere a aplicação $S(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$S(t)x_0 = x_0 e^{-\alpha t}, \text{ para } t \geqslant 0 \text{ e } x_0 \in \mathbb{R}.$$

Então $\mathcal{S} = \{S(t)\colon t \geqslant 0\}$ é um C_0-semigrupo. A família $\mathcal{S}$ é, na verdade, o que chamamos de C_0-grupo.

Exemplos

Se denotarmos $x(t) = S(t)x_0$, temos $\dot{x}(t) = -\alpha x(t)$ para todo t, isto é, $x(t)$ satisfaz o Problema de Valor Inicial:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha x \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Exemplos

Em geral, soluções de PVIs da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

dão origem a C_0-semigrupos.

Exemplos

Se tivermos o PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = -Ax \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

onde A é uma matriz $n \times n$, a solução é dada por

$$S(t)x_0 = e^{-At}x_0 \quad \text{e} \quad e^{-At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n A^n}{n!}.$$

Processos de evolução

Definimos $\mathcal{P} = \{(t,s) \in \mathbb{T}^2 \colon t \geqslant s\}$. Um processo de evolução é uma família $\mathcal{U} = \{U(t,s) \colon (t,s) \in \mathcal{P}\} \subset C(X)$ que satisfaz:

(i) $U(t,t) = id_X$ para cada $t \in \mathbb{T}$;

(ii) $U(t,s) = U(t,\tau)U(\tau,s)$ para todo $t \geqslant \tau \geqslant s$ em $\mathbb{T}$.

Se $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, dizemos mais especificamente que $\mathcal{U}$ é um processo de evolução discreto.

Processos de evolução

Se além de (i) e (ii), $\mathcal{U}$ satisfaz:

(iii) a aplicação $\mathcal{P} \times X \ni (t, s, x) \mapsto U(t, s)x \in X$ é contínua,

dizemos que $\mathcal{U}$ é um C_0-processo de evolução.

Exemplos

Considere o PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha x + t \\ x(s) = x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sua solução explícita é

$$U(t,s)x_0 = \left(x_0 + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha}s\right)e^{-\alpha(t-s)} + \frac{1}{\alpha}t - \frac{1}{\alpha^2},$$

e essa família $\mathcal{U}$ define um C_0-processo de evolução.

Exemplos

Em geral, soluções de PVIs da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(s) = x_0, \end{cases}$$

dão origem a C_0-processos de evolução.

Exemplos

Se tivermos o PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = -Ax + f(t) \\ x(s) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

onde A é uma matriz $n \times n$, a solução é dada por

$$U(t,s)x_0 = e^{-A(t-s)}x_0 + \int_s^t e^{-A(t-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

Processos de evolução vs. Semigrupos

Assuma para um processo de evolução $\mathcal{U}$ exista uma família $\mathcal{S}$ tal que

$$U(t,s) = S(t-s) \text{ para todos } (t,s) \in \mathcal{P}. \tag{1}$$

Então $\mathcal{S}$ é um semigrupo.

Reciprocamente, se $\mathcal{S}$ é um semigrupo, a família $\mathcal{U}$ definida por (1) é um processo de evolução.

Dificuldades

Dificuldades

- Nem sempre é fácil obter as soluções, nem qualitativamente.

Dificuldades

- Nem sempre é fácil obter as soluções, nem qualitativamente.
- Nem mesmo soluções locais, quanto mais globais.

Dificuldades

- Nem sempre é fácil obter as soluções, nem qualitativamente.
- Nem mesmo soluções locais, quanto mais globais.
- Para tanto, é necessário um conhecimento amplo em Equações Diferenciais, Análise, Análise Funcional, entre outras...

Mas...

Mas...

- Área com grande quantidade de problemas a serem resolvidos.

Mas...

- Área com grande quantidade de problemas a serem resolvidos.
- Possibilidade de interação com outras áreas: Física, Biologia, Engenharia...

Mas...

- Área com grande quantidade de problemas a serem resolvidos.
- Possibilidade de interação com outras áreas: Física, Biologia, Engenharia...
- Temos um problema que vale US$1,000,000.00 !!!

Tópicos de estudo

Tópicos de estudo

- Comportamento assintótico de soluções.

Tópicos de estudo

- Comportamento assintótico de soluções.
- Decaimento de soluções.

Tópicos de estudo

- Comportamento assintótico de soluções.
- Decaimento de soluções.
- Atratores globais para semigrupos.

Tópicos de estudo

- Comportamento assintótico de soluções.
- Decaimento de soluções.
- Atratores globais para semigrupos.
- Atratores pullback para processos de evolução.

Tópicos de estudo

- Comportamento assintótico de soluções.
- Decaimento de soluções.
- Atratores globais para semigrupos.
- Atratores pullback para processos de evolução.
- Atratores uniformes para processos de evolução.

Tópicos de estudo

- Comportamento assintótico de soluções.
- Decaimento de soluções.
- Atratores globais para semigrupos.
- Atratores pullback para processos de evolução.
- Atratores uniformes para processos de evolução.
- Caracterização destes atratores (como eles são por dentro).

Tópicos de estudo

- Comportamento assintótico de soluções.
- Decaimento de soluções.
- Atratores globais para semigrupos.
- Atratores pullback para processos de evolução.
- Atratores uniformes para processos de evolução.
- Caracterização destes atratores (como eles são por dentro).
- E muito mais....

Bibliografia básica

- Ladyzhenskaya, O.: Attractors for Semigroups and Evolution Equations, Accademia Nazionale dei Lincei (1991).
- Carvalho A.N, Langa, J. and Robinson.: Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems, Springer-Verlag (2013)
- Babin A.V. and Vishik, M.I.: Attractors of evolution equations. North Holland, Amsterdam (1992).

Thank you!