Paradoja de Banach-Tarski

Julio Cáceres

Universidad Nacional de Ingeniería

13 de octubre de 2017

Tabla de contenido

Prerequisitos

1. Grupos
2. Conceptos básicos de medida
3. Relaciones de equivalencia
4. Álgebra Lineal
5. Imaginación

Grupo SO_n

Es el grupo generado por las matrices ortogonales de determinante 1. Para el caso $n = 2$ y $n = 3$ estará conformado por las matrices de rotación.

Grupo libre

Sea S un conjunto,

Definición

Un grupo libre sobre F, es el conjunto de "palabras" formadas por elementos de S. La operación en este conjunto será la juxtaposición y además a cada elemento $s \in S$ se le asigna un $s^{-1} \in S$ de manera que estos se cancelen al formar una palabra.

Grupo libre

Sea S un conjunto,

Definición

Un grupo libre sobre F, es el conjunto de "palabras" formadas por elementos de S. La operación en este conjunto será la juxtaposición y además a cada elemento $s \in S$ se le asigna un $s^{-1} \in S$ de manera que estos se cancelen al formar una palabra.

Convención: Denotaremos por 1 a la palabra vacia.

Acción de grupo

Dado un conjunto X y un grupo G definimos la acción del grupo por la izquierda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \cdot : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

con $e \cdot x = x$ y $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ para todo $x \in X$ y $g, h \in G$.

Acción de grupo

Dado un conjunto X y un grupo G definimos la acción del grupo por la izquierda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \cdot : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

con $e \cdot x = x$ y $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ para todo $x \in X$ y $g, h \in G$.

Ejemplo: Tomando G como el conjunto de matrices invertibles 3×3 y $X = \mathbb{R}^3$, tenemos que $(A, x) \mapsto Ax$ define una acción de grupo.

Medida

Una **medida** es una función que asigna a cada conjunto dentro de una colección un "tamaño", explicitamente es una función del tipo:

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{A} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ A &\longmapsto \mu(A) = c \end{aligned}$$

Medida

Una **medida** es una función que asigna a cada conjunto dentro de una colección un “tamaño”, explicitamente es una función del tipo:

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{A} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ A &\longmapsto \mu(A) = c \end{aligned}$$

Ejemplo: En $\mathbb{R}$ se puede definir una medida que a cada intervalo le asigna su “longitud” como tamaño, es decir:

$$\mu([a, b]) = b - a$$

Axioma de Elección

Axioma de Elección

Dada una colección $\mathcal{A}$ de conjuntos, existe un conjunto S de manera que para todo $A \in \mathcal{A}$ se tiene que $A \cap S$ es un conjunto unitario.

Conjunto de Vitali

- El **conjunto de Vitali** es un conjunto el cual no posee "tamaño"

Conjunto de Vitali

- El **conjunto de Vitali** es un conjunto el cual no posee "tamaño"
- Su existencia depende del **axioma de elección**

Conjunto de Vitali

- El **conjunto de Vitali** es un conjunto el cual no posee “tamaño”
- Su existencia depende del **axioma de elección**
- Existe una cantidad **infinta no numerable** de conjuntos de Vitali distintos en el intervalo $[0, 1]$

Construcción de Vitali

Tomemos $X = [0, 1]$ y consideremos la siguiente relación de equivalencia en X:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

Construcción de Vitali

Tomemos $X = [0,1]$ y consideremos la siquiente relación de equivalencia en X:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

Por el axioma de elección podemos tomar un elemento de cada **clase de equivalencia** de $X/\mathbb{Q}$, denotemos por V al conjunto de estos elementos.

Construcción de Vitali

Tomemos $X = [0, 1]$ y consideremos la siquiente relación de equivalencia en X:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

Por el axioma de elección podemos tomar un elemento de cada **clase de equivalencia** de $X/\mathbb{Q}$, denotemos por V al conjunto de estos elementos.

Notemos que $X/\mathbb{Q}$ posee una cantidad no numerable de elementos.

Construcción de Vitali

Veamos que a V no se le puede asignar un tamaño:

Construcción de Vitali

Veamos que a V no se le puede asignar un tamaño:

Construcción de Vitali

Veamos que a V no se le puede asignar un tamaño:

- Sean $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ todos los racionales en $[-1,1]$

Construcción de Vitali

Veamos que a V no se le puede asignar un tamaño:

- Sean $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ todos los racionales en $[-1,1]$
- Consideremos $V_k = V + q_k \subset [-1,2]$

Construcción de Vitali

Veamos que a V no se le puede asignar un tamaño:

- Sean $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ todos los racionales en $[-1,1]$
- Consideremos $V_k = V + q_k \subset [-1,2]$
- Los V_k son disjuntos dos a dos

Construcción de Vitali

Veamos que a V no se le puede asignar un tamaño:

- Sean $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ todos los racionales en $[-1,1]$
- Consideremos $V_k = V + q_k \subset [-1,2]$
- Los V_k son disjuntos dos a dos
- $[0,1] \subset \bigcup_k V_k \subset [-1,2]$

Construcción de Vitali

Veamos que a V no se le puede asignar un tamaño:

- Sean $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ todos los racionales en $[-1,1]$
- Consideremos $V_k = V + q_k \subset [-1,2]$
- Los V_k son disjuntos dos a dos
- $[0,1] \subset \bigcup_k V_k \subset [-1,2]$
- $1 \leq \sum_k \mu(V_k) \leq 3$

Construcción de Vitali

Veamos que a V no se le puede asignar un tamaño:

- Sean $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ todos los racionales en $[-1,1]$
- Consideremos $V_k = V + q_k \subset [-1,2]$
- Los V_k son disjuntos dos a dos
- $[0,1] \subset \bigcup_k V_k \subset [-1,2]$
- $1 \leq \sum_k \mu(V_k) \leq 3$
- $\mu(V_k) = \mu(V)$ (es solo una traslación)

Construcción de Vitali

Veamos que a V no se le puede asignar un tamaño:

- Sean $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ todos los racionales en $[-1,1]$
- Consideremos $V_k = V + q_k \subset [-1,2]$
- Los V_k son disjuntos dos a dos
- $[0,1] \subset \bigcup_k V_k \subset [-1,2]$
- $1 \leq \sum_k \mu(V_k) \leq 3$
- $\mu(V_k) = \mu(V)$ (es solo una traslación)
- $1 \leq +\infty \leq 3$ contradicción!

Descomposición paradójica

Sea G un grupo que actua en X y supongamos $E \subset X$.

Definición

Diremos que E es G-**paradójico** si existen $g_1, \ldots, g_m$ y $h_1, \ldots, h_n$ en G y conjuntos disjuntos dos a dos $A_1, \ldots, A_m$ y $B_1, \ldots, B_n$ en E de modo que:

$$E = \bigcup_{i=0}^{m} g_i(A_i) = \bigcup_{j=1}^{n} h_j(B_j)$$

Descomposición paradójica

Sea G un grupo que actua en X y supongamos $E \subset X$.

Definición

Diremos que E es G-**paradójico** si existen $g_1, \ldots, g_m$ y $h_1, \ldots, h_n$ en G y conjuntos disjuntos dos a dos $A_1, \ldots, A_m$ y $B_1, \ldots, B_n$ en E de modo que:

$$E = \bigcup_{i=0}^{m} g_i(A_i) = \bigcup_{j=1}^{n} h_j(B_j)$$

Ejemplo:S^1 es SO_2-paradójico.

Equidescomposabilidad

Sea G que actua en X y $A, B \subset X$.

Definición

Diremos que A y B son G-**equidescomponibles** si A y B se pueden decomponer en $A_1, \ldots, A_n$ y $B_1, \ldots, B_n$ de modo que cada A_i sea **congruente** a B_i, esto es:

$$\exists g_i \in G : \quad g_i(A_i) = B_i$$

Equidescomposabilidad

Sea G que actua en X y $A, B \subset X$.

Definición

Diremos que A y B son G-**equidescomponibles** si A y B se pueden decomponer en $A_1, \ldots, A_n$ y $B_1, \ldots, B_n$ de modo que cada A_i sea **congruente** a B_i, esto es:

$$\exists g_i \in G : \quad g_i(A_i) = B_i$$

Notación: Escribimos $A \sim_G B$ o simplemente $A \sim B$

Ejemplo con S_1

Teorema

$S_1 \sim_{SO_2} S_1 \backslash \{0\}$

Ejemplo con S_1

Teorema

$S_1 \sim_{SO_2} S_1 \backslash \{0\}$

Basta considerar,

$$A_1 = \{e^{in} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

$$A_2 = (S_1 \backslash \{0\}) \backslash A_1$$

Grupos paradójico

Definición

Diremos que G es paradójico si como conjunto es paradójico con respecto a la acción definida por el mismo.

Grupos paradójico

Definición

Diremos que G es paradójico si como conjunto es paradójico con respecto a la acción definida por el mismo.

Ejemplo: SO_2 es un grupo paradójico.

Grupos libres paradójicos

Teorema

El grupo libre F de dos generadores σ, τ es paradójico.

Grupos libres paradójicos

Teorema

El grupo libre F de dos generadores σ, τ es paradójico.

Definimos $B(\rho) = \{\text{palabras que comienzan en } \rho\}$ y notamos que

$$F = \{1\} \sqcup B(\sigma) \sqcup B(\sigma^{-1}) \sqcup B(\tau) \sqcup B(\tau^{-1})$$

pero a su vez:

$$F = B(\sigma) \cup \sigma B(\sigma^{-1}) = B(\tau) \cup \tau B(\tau^{-1})$$

Del grupo al conjunto

Sea G un grupo paradójico actuando en X.

Teorema

Si X es tal que únicamente la indentidad de G fija puntos de X, entonces X es G-paradójico.

Del grupo al conjunto

Prueba:
Sean $A_i, B_j \subset G$ y $g_i, h_j \in G$ los elementos que vuelven a G paradójico y M un conjunto de representantes de orbitas de X bajo G. Tenemos que:

$$X = \bigsqcup_{g \in G} g(M)$$

Si definimos $A_i' = \sqcup_{g \in A_i} g(M)$ y de manera similar B_j' tenemos que:

$$X = \bigcup g_i(A_i) = \bigcup h_j(B_j)$$

Del grupo al conjunto

Corolario

Si un grupo G contiene un subgrupo H paradójico, entonces G también es paradójico.

Del grupo al conjunto

Corolario

Si un grupo G contiene un subgrupo H paradójico, entonces G también es paradójico.

Notemos que la acción H sobre G solo fija puntos con el elemento neutro.

Del grupo al conjunto

Corolario

Si un grupo G contiene un subgrupo H paradójico, entonces G también es paradójico.

Notemos que la acción H sobre G solo fija puntos con el elemento neutro.

Corolario

Cualquier grupo con un subgrupo libre de orden 2 es paradójico.

Del conjunto al grupo

Teorema

Si X es G-paradójico entonces G es paradójico.

Paradoja de Hausdorff

Teorema

Existen dos rotaciones independientes en $\mathbb{R}^3$ que fijan el origen.

Paradoja de Hausdorff

Teorema

Existen dos rotaciones independientes en $\mathbb{R}^3$ que fijan el origen.

Lo que nos quiere decir esto es que SO_n posee un subgrupo libre de orden 2 para $n \geq 3$.

Paradoja de Hausdorff

Consideremos $F \leq SO_3$ el subgrupo libre del teorema anterior.

Paradoja de Hausdorff

Consideremos $F \leq SO_3$ el subgrupo libre del teorema anterior.

- Cada elemento de F fija 2 puntos de S^2

Paradoja de Hausdorff

Consideremos $F \leq SO_3$ el subgrupo libre del teorema anterior.

- Cada elemento de F fija 2 puntos de S^2
- El conjunto de puntos fijos D de F es numerable

Paradoja de Hausdorff

Consideremos $F \leq SO_3$ el subgrupo libre del teorema anterior.

- Cada elemento de F fija 2 puntos de S^2
- El conjunto de puntos fijos D de F es numerable

Teorema (Paradoja de Hausdorff)

Existe un conjunto numerable de modo que $S^2 \backslash D$ es SO_3-paradójico.

Paradoja de Banach-Tarski

Teorema

S^2 y $S^2 \setminus D$ son SO_3-equidescomponibles.

Paradoja de Banach-Tarski

Teorema

S^2 y $S^2 \backslash D$ son SO_3-equidescomponibles.

Escogemos un eje que no toque a D y un ángulo θ de modo que para todo n, $\rho_\theta^n(D) \cap D = \emptyset$.

Luego si $A = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} \rho_\theta^n(D)$ y $B = S^2 \backslash A$, tenemos que:

$$S^2 = B \cup \rho_\theta^{-1}(A)$$

Paradoja de Banach-Tarski

Teorema (Paradoja de Banach-Tarski)

B^3 es G_3-paradójica.

Paradoja de Banach-Tarski

De lo anterior hemos visto que S^2 es SO_3 paradójico. Esta descomposición se puede extender a cualquier cascarón grueso, en particular para $B^3 \backslash \{0\}$.

Paradoja de Banach-Tarski

De lo anterior hemos visto que S^2 es SO_3 paradójico. Esta descomposición se puede extender a cualquier cascarón grueso, en particular para $B^3 \backslash \{0\}$.

Si consideramos cualquier circunferencia que pase por el origen dentro de B^3, por un teorema ya antes visto, tenemos que $B^3 \sim B^3 \backslash \{0\}$.

Paradoja de Banach-Tarski

De lo anterior hemos visto que S^2 es SO_3 paradójico. Esta descomposición se puede extender a cualquier cascarón grueso, en particular para $B^3 \backslash \{0\}$.

Si consideramos cualquier circunferencia que pase por el origen dentro de B^3, por un teorema ya antes visto, tenemos que $B^3 \sim B^3 \backslash \{0\}$.

Nota: G_3 será el grupo generado por todas las rotaciones utilizadas.

Cantidad de piezas

Si analizamos el proceso de partición podemos ver que no se utilizaron más de 16 piezas:

Cantidad de piezas

Si analizamos el proceso de partición podemos ver que no se utilizaron más de 16 piezas:

- De B^3 a $B^3 \backslash \{0\}$ partimos en 2

Cantidad de piezas

Si analizamos el proceso de partición podemos ver que no se utilizaron más de 16 piezas:

- De B^3 a $B^3 \setminus \{0\}$ partimos en 2
- De $B^3 \setminus \{0\}$ a $B^3 \setminus (\{0\} \cup D)$ partimos en 2

Cantidad de piezas

Si analizamos el proceso de partición podemos ver que no se utilizaron más de 16 piezas:

- De B^3 a $B^3 \setminus \{0\}$ partimos en 2
- De $B^3 \setminus \{0\}$ a $B^3 \setminus (\{0\} \cup D)$ partimos en 2
- Para duplicar $B^3 \setminus (\{0\} \cup D)$ partimos en 4

Cantidad de piezas

Si analizamos el proceso de partición podemos ver que no se utilizaron más de 16 piezas:

- De B^3 a $B^3 \backslash \{0\}$ partimos en 2
- De $B^3 \backslash \{0\}$ a $B^3 \backslash (\{0\} \cup D)$ partimos en 2
- Para duplicar $B^3 \backslash (\{0\} \cup D)$ partimos en 4

sin embargo se ha demostrado que se puede realizar utilizando 5 piezas!!

Referencias

- Francis Edward Su, *The Banach-Tarski Paradox*. Harvard University, 1990.
- Serge Lang, *Algebra*. Springer, 2005.
- Tom Weston, *The Banach-Tarski Paradox*. University of Massachusetts.