

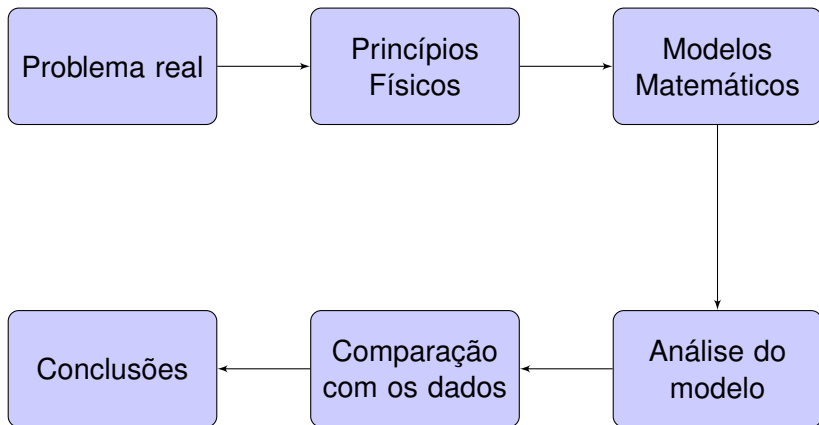
Equações diferenciais e oscilações em estruturas elásticas

Vanderley Ferreira Junior ¹

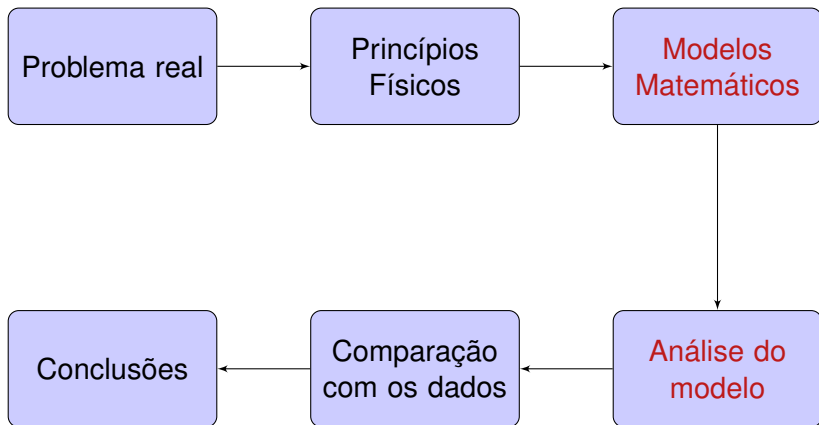
Colóquio de Matemática
15 de setembro de 2017

¹Trabalho realizado com apoio da FAPESP

Introdução



Introdução



Pontes suspensas

Este tipo de estrutura apresenta fenômenos interessantes



Figura: “Golden Gate Bridge Aerial”, CC BY-SA 2.0, via Wikimedia Commons

Pontes suspensas

Pontes suspensas são estruturas elásticas



Figura: “Golden Gate Bridge Aerial”, CC BY-SA 2.0, via Wikimedia Commons

Pontes suspensas

Pontes suspensas são estruturas elásticas



Figura: “Ponte Hercílio Luz” por Rodrigo Soldon, CC BY 2.0, via Wikimedia Commons

Problema: Pontes suspensas

Pontes suspensas são estruturas elásticas.

Problema: Pontes suspensas

Às vezes, até demais.

Equação não-local para a placa

Deflexão de uma placa retangular

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} + \delta u_t + \Delta^2 u + P u_{xx} - S \left(\int_{\Omega} u_x^2 \right) u_{xx} = f, \\ u = u_{xx} = 0, \\ u_{yy} + \sigma u_{xx} = u_{yyy} + (2 - \sigma) u_{xxy} = 0, \\ u(0) = u_0 \in H_*^2(\Omega), \quad u_t(0) = v_0 \in L^2(\Omega) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{em } \Omega \\ \text{nas bordas curtas} \\ \text{nas bordas longas} \end{array}$$



Equação não-local para a placa

Deflexão de uma placa retangular

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} + \delta u_t + \Delta^2 u + P u_{xx} - S \left(\int_{\Omega} u_x^2 \right) u_{xx} = f, \\ u = u_{xx} = 0, \\ u_{yy} + \sigma u_{xx} = u_{yyy} + (2 - \sigma) u_{xxy} = 0, \\ u(0) = u_0 \in H_*^2(\Omega), \quad u_t(0) = v_0 \in L^2(\Omega) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{em } \Omega \\ \text{nas bordas curtas} \\ \text{nas bordas longas} \end{array}$$

Formulação fraca

Para qualquer $v \in H_*^2(\Omega)$, para cada $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \langle u'', v \rangle + \delta \langle u', v \rangle_0 + (u, v)_2 \\ - P \langle u_x, v_x \rangle_0 + S \|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2 \langle u_x, v_x \rangle_0 = (f, v)_0. \end{aligned}$$

Resultados principais

Existência e Unicidade

Se $u_0 \in H_*^2(\Omega)$, $v_0 \in L^2(\Omega)$ e $f \in C^0([0, T], L^2(\Omega))$, então **existe uma única** solução fraca do problema anterior.

Vale uma identidade de energia

$$E(u(t), u'(t)) = E(u_0, v_0) - \int_0^t \delta \|u'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t (f(s), u')_0 ds$$

Resultados principais

Existência e Unicidade

Se $u_0 \in H_*^2(\Omega)$, $v_0 \in L^2(\Omega)$ e $f \in C^0([0, T], L^2(\Omega))$, então **existe uma única** solução fraca do problema anterior.

Sem carga externa, sem amortecimento

$$E(u(t), u'(t)) = E(u_0, v_0)$$

Modos simples de oscilação

Existem soluções com forma especial:

Modo simples

$$u(x, y, t) = \phi(t)w(x, y)$$

Modos simples de oscilação

Modo simples

$$u(x, y, t) = \phi(t)w(x, y)$$

Um modo simples é obtido quando os dados iniciais são múltiplos de uma autofunção de

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 w + \Lambda w_{xx} = 0, \\ w = w_{xx} = 0, \\ w_{yy} + \sigma w_{xx} = w_{yyy} + (2 - \sigma)w_{xyy} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{em } \Omega \\ \text{nas bordas curtas} \\ \text{nas bordas longas} \end{array}$$

Modos simples de oscilação

Modo simples

$$u(x, y, t) = \phi(t)w(x, y)$$

Teorema

Modos simples com energia suficientemente grande são linearmente instáveis.

Viga apoiada

Problema inicial

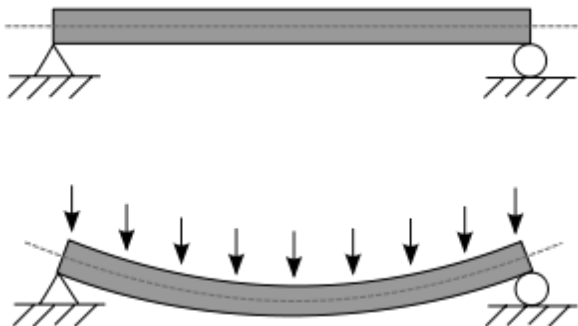


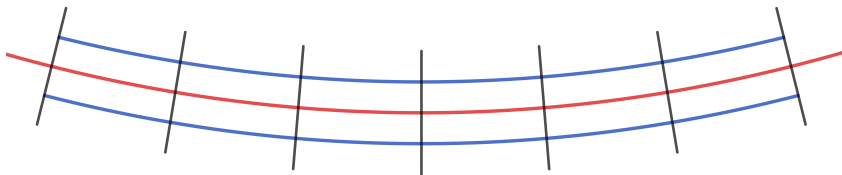
Figura: Qual a deformação em uma viga elástica devido ao próprio peso?

Viga

Teoria de Euler-Bernoulli (Sécuro XVIII)

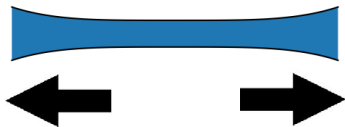
Hipóteses físicas:

- Cargas transversais apenas
- Durante a deformação, seções planas normais continuam planas
- seções planas normais continuam normais

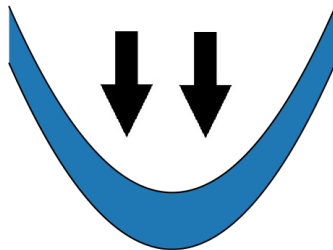


De onde vem a elasticidade?

Energia elástica é armazenada de duas formas



Alongamento



Flexão

Um pouco de geometria

Energia de flexão - depende da curvatura

$$E_{fletir} = \int_0^L (\text{Curvatura})^2$$

Um pouco de geometria

Energia de flexão - depende da curvatura

$$E_{\text{fletir}} = \int_0^L \frac{u_{xx}^2}{(1 + u_x^2)^3}$$

Um pouco de geometria

Energia de flexão - depende da curvatura

$$E_{\text{fletir}} = \int_0^L \frac{u_{xx}^2}{(1 + u_x^2)^3}$$

Hipótese

Assumindo que a deformação é pequena, $u_x \approx 0$

$$\text{Curvatura} = \frac{|u_{xx}|}{(1 + u_x^2)^{3/2}} \approx |u_{xx}|$$

Cálculo Variacional

Energia mecânica

$$E(u) = \int_0^L (u_{xx})^2 - f u$$

Princípio variacional

A solução do problema é um ponto crítico do funcional energia

Cálculo Variacional

Energia mecânica

$$E(u) = \int_0^L (u_{xx})^2 - f u$$

Princípio variacional

A solução do problema é um ponto crítico do funcional energia

Equação da viga de Euler-Bernoulli

$$u_{xxxx} = f$$

Placa

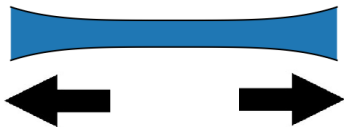
Teoria de Kirchhoff-Love (Século XIX)

Hipóteses físicas:

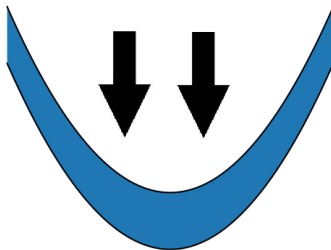
- Cargas transversais apenas
- Durante a deformação, retas normais continuam retas
- E também continuam normais
- A espessura da placa não varia

De onde vem a elasticidade?

Energia elástica é armazenada de duas formas



Alongamento



Flexão

Mais um pouco de geometria

Alongamento - proporcional à mudança na Área

$$E_{alongar} = S \int_{\Omega} (\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} - 1)$$

Flexão - proporcional à Curvatura

$$E_{fletir} = \int_{\Omega} (2 (\text{Curvatura média})^2 + \sigma \text{Curvatura Gaussiana})$$

Modelando a energia elástica

Curvatura média

$$\frac{(1 + u_x^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{yy}}{2(1 + u_x^2 + u_y^2)^{3/2}}$$

Curvatura Gaussiana

$$\frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^2}$$

Modelando a energia elástica

Curvatura média

$$\frac{(1 + u_x^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{yy}}{2(1 + u_x^2 + u_y^2)^{3/2}} \approx \frac{u_{xx} + u_{yy}}{2}$$

Curvatura Gaussiana

$$\frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^2} \approx u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2$$

Modelando a energia elástica

Curvatura média

$$\frac{(1 + u_x^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{yy}}{2(1 + u_x^2 + u_y^2)^{3/2}} \approx \frac{u_{xx} + u_{yy}}{2}$$

Curvatura Gaussiana

$$\frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^2} \approx u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2$$

Aproximação da energia

$$E_{fletir} = \int_{\Omega} \frac{1}{2}(u_{xx} + u_{yy})^2 + \sigma(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2)$$

Modelando a energia elástica

Varição da área

$$\int_{\Omega} (\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} - 1)$$

Modelando a energia elástica

Varição da área - Hipótese de deformação pequena

$$\int_{\Omega} (\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} - 1) \approx \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2)$$

Aproximação linear

$$E_{alongar} = P \int_{\Omega} \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2)$$

Modelo final

Energia potencial elástica

$$E = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\Delta u)^2 + (1 - \sigma)(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2) + \frac{1}{2} P |\nabla u|^2$$

Equação da placa

$$\Delta^2 u - P \Delta u = f$$

Resultados recentes - Pontes suspensas



P. McKenna and C. Ó Tuama.

Large torsional oscillations in suspension bridges visited again:
vertical forcing creates torsional response.

Amer. Math. Monthly, 108 (2001).

- Equação da viga (sistema cabo-ponte)
- Análise de oscilações torcionais

Resultados recentes - Pontes suspensas



D. Smets and J. van den Berg.

Homoclinic solutions for Swift-Hohenberg and suspension bridge type equations.

J. Diff. Equations, 184 (2002).

- Equação da viga semilinear
- Uso do Teorema do Passo da Montanha

Resultados recentes - Pontes suspensas



C. Zhong, Q. Ma and C. Sun.

Existence of strong solutions and global attractors for the suspension bridge equations.

J. Diff. Equations, 246 (2009).

- Equação da placa
- Estudo de atratores

Resultados recentes - Pontes suspensas



A. Ferrero and F. Gazzola.

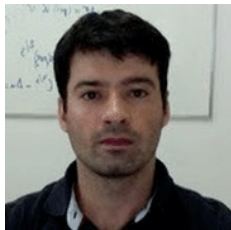
A partially hinged rectangular plate as a model for suspension bridges.

Discrete Contin. Dyn. Systems, 35 (2015).

- Equação da placa
- Voltaremos a este depois

Modelo não-local para uma placa sob protensão

Trabalho em conjunto com Ederson Moreira dos Santos e Filippo Gazzola.



Equação diferencial

Modelo não local para placa sob protensão

$$u_{tt} + \delta u_t + \Delta^2 u + P u_{xx} - S \left(\int_{\Omega} u_x^2 \right) u_{xx} = f$$



H. M. Berger.

A new approach to the analysis of large deflections of plates.

J. Appl. Mech., 22: 465–472, 1955.

Equação diferencial

Modelo não local para placa sob protensão

$$u_{tt} + \delta u_t + \Delta^2 u + P u_{xx} - S \left(\int_{\Omega} u_x^2 \right) u_{xx} = f$$

- P é a protensão
- S depende da elasticidade
- f é a força externa
- δ é o fator de amortecimento

Condição de contorno

Considere as coordenadas na ponte $\Omega = [0, L] \times [-l, l]$



Condições de bordo - suportada e livre

$$\begin{cases} u = u_{xx} = 0, \\ u_{yy} + \sigma u_{xx} = u_{yyy} + (2 - \sigma)u_{xxy} = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{nas bordas curtas} \\ \text{nas bordas longas} \end{array}$$

Condição de contorno

Considere as coordenadas na ponte $\Omega = [0, L] \times [-l, l]$



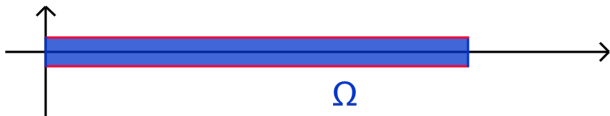
Condições de bordo - suportada e livre

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u_{xx} = 0, \\ u_{yy} + \sigma u_{xx} = u_{yyy} + (2 - \sigma)u_{xxy} = 0 \end{array} \right.$$

nas bordas curtas
nas bordas longas

Condição de contorno

Considere as coordenadas na ponte $\Omega = [0, L] \times [-l, l]$



Condições de bordo - suportada e livre

$$\begin{cases} u = u_{xx} = 0, \\ u_{yy} + \sigma u_{xx} = u_{yyy} + (2 - \sigma)u_{xxy} = 0 \end{cases}$$

nas bordas curtas
nas bordas longas

Existência, unicidade

Sejam $\delta \in \mathbb{R}$, $S > 0$, $P > 0$, $T > 0$.

Teorema

Se $u_0 \in H_*^2(\Omega)$, $v_0 \in L^2(\Omega)$ e $f \in C^0([0, T], L^2(\Omega))$, então **existe uma única** solução fraca.

Existência, unicidade

Sejam $\delta \in \mathbb{R}$, $S > 0$, $P > 0$, $T > 0$.

Teorema

Se $u_0 \in H_*^2(\Omega)$, $v_0 \in L^2(\Omega)$ e $f \in C^0([0, T], L^2(\Omega))$, então **existe uma única** solução fraca.

Existência - Galerkin

A unicidade depende da existência de solução.

Identidade de energia

Identidade de energia

A solução verifica, para todo $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u\|_2^2 - \frac{P}{2} \|u_x\|^2 + \frac{S}{4} \|u_x\|^4 \\ & + \frac{1}{2} \|u'\|^2 + \delta \int_0^t \|u'\|^2 = \int_0^t \int_{\Omega} f u' + \frac{1}{2} \|v_0\|^2 \\ & + \frac{1}{2} \|u_0\|_2^2 - \frac{P}{2} \|(u_0)_x\|^2 + \frac{S}{4} \|(u_0)_x\|^4 . \end{aligned}$$

Identidade de energia

Identidade de energia

A solução verifica, para todo $t \in [0, T]$:

$$\text{Energia}(t) = \text{Energia}(0) + \int_0^t \int_{\Omega} f u' - \delta \int_0^t \|u'\|^2$$

Comportamento assintótico

Influência de P

Sejam $\delta > 0$ e $f \in L^2(\Omega)$.

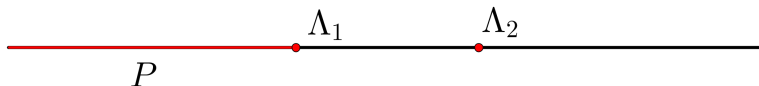
Energia elástica

$$\frac{1}{2} \|u\|_2^2 - \frac{P}{2} \|u_x\|^2 + \frac{S}{4} \|u_x\|^4$$

Primeiro autovalor

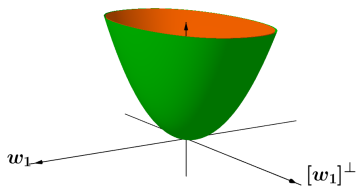
$$\Lambda_1 = \inf_{w \in H_*^2(\Omega), w \neq 0} \frac{\|w\|^2}{\|w_x\|^2}$$

Para $P < \Lambda_1$ a energia é convexa.



Comportamento assintótico

Influência do amortecimento δ vs. efeito de P



- Sejam $\delta > 0$ e $S > 0$.
- Tome $u_0 \in H_*^2(\Omega)$, $v_0 \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^2(\Omega)$.

Teorema

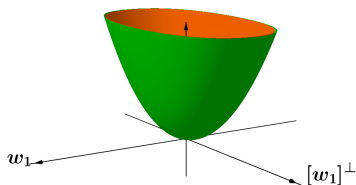
Se $0 \leq P \leq \Lambda_1$, então $u(t) \rightarrow U$ em $H_*^2(\Omega)$ e $u'(t) \rightarrow 0$ em $L^2(\Omega)$, quando $t \rightarrow \infty$, onde

$$\Delta^2 U + P U_{xx} - S \left(\int_{\Omega} U_x^2 \right) U_{xx} = f$$

 Λ_1
 Λ_2

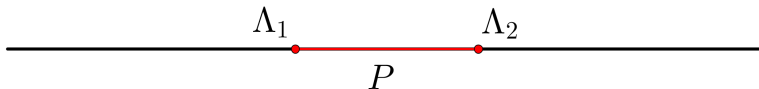
Comportamento assintótico

Influência do amortecimento δ vs. efeito de P



- Sejam $\delta > 0$ e $S > 0$.
- Tome $u_0 \in H_*^2(\Omega)$, $v_0 \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^2(\Omega)$.

O que acontece quando P fica maior que Λ_1 ?

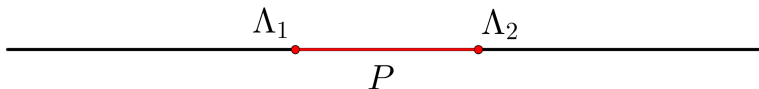


Comportamento assintótico

Influência do amortecimento δ vs. efeito de P

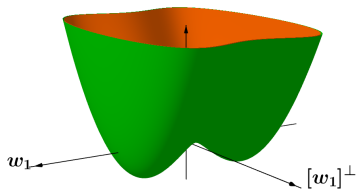
- Sejam $\delta > 0$ e $S > 0$.
- Tome $u_0 \in H_*^2(\Omega)$, $v_0 \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^2(\Omega)$.

O que acontece quando P fica maior que Λ_1 ?



Comportamento assintótico

Influência do amortecimento δ vs. efeito de P

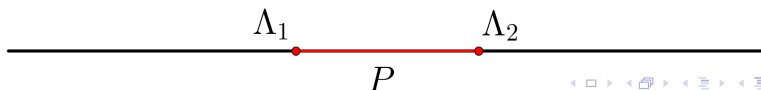


- Sejam $\delta > 0$ e $S > 0$.
- Tome $u_0 \in H_*^2(\Omega)$, $v_0 \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^2(\Omega)$.

Teorema

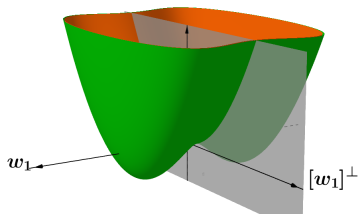
Se $\Lambda_1 < P \leq \Lambda_2$, $f = 0$ e $E(u_0, v_0) < 0$, então $u(t) \rightarrow U$ em $H_*^2(\Omega)$ e $u'(t) \rightarrow 0$ em $L^2(\Omega)$ quando $t \rightarrow \infty$, onde

$$U = \pm \frac{\sqrt{P - \Lambda_1}}{S} w_1$$



Comportamento assintótico

Influência do amortecimento δ vs. efeito de P



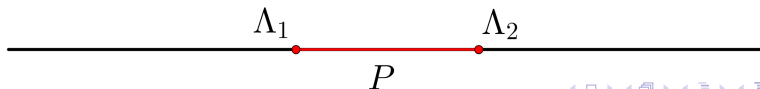
- Sejam $\delta > 0$ e $S > 0$.
- Tome $u_0 \in H_*^2(\Omega)$, $v_0 \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^2(\Omega)$.

Teorema

Se $\Lambda_1 < P \leq \Lambda_2$, $f = 0$ e

$$(u_0, w_1)_2 = 0, \quad (v_0, w_1)_0 = 0,$$

então $u(t) \rightarrow 0$ e $u'(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.



Autofunções

Problema de autovalor

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 u + \Lambda u_{xx} = 0, \\ u = u_{xx} = 0, \\ u_{yy} + \sigma u_{xx} = u_{yyy} + (2 - \sigma)u_{xxy} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{em } \Omega \\ \text{nas bordas curtas} \\ \text{nas bordas longas} \end{array}$$



A. Ferrero and F. Gazzola.

A partially hinged rectangular plate as a model for suspension bridges.

Discrete Contin. Dyn. Systems, 35 (2015).

Autofunções

Problema de autovalor

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 u + \Lambda u_{xx} = 0, \\ u = u_{xx} = 0, \\ u_{yy} + \sigma u_{xx} = u_{yyy} + (2 - \sigma)u_{xyy} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{em } \Omega \\ \text{nas bordas curtas} \\ \text{nas bordas longas} \end{array}$$

Todas as autofunções são do tipo

$$w_{m,k}(x, y) = \varphi_{m,k}(y) \sin(m\pi x/L)$$

Decomposição do problema

Problema de autovalor

$$\Delta^2 w + \Lambda w_{xx} = 0, \quad w \neq 0$$

Teorema

Se $f \in [w]^\perp$, $u_0 \in [w]^\perp$ e $v_0 \in [w]^\perp$, então

$$u(t) \in [w]^\perp, \quad \forall t \geq 0$$

Decomposição do problema

Tomando $u_0 = aw$, $v_0 = bw$ e $f = 0$, temos

$$u(x, y, t) = \phi(t)w(x, y).$$

Neste caso u é um **modo simples** de (NLM).

Famílias de autofunções

Primeiro modo longitudinal

Famílias de autofunções

Segundo modo longitudinal

Famílias de autofunções

Quarto modo longitudinal

Famílias de autofunções

Primeiro modo torcional

Famílias de autofunções

Segundo modo torcional

O caso mais famoso

Transição entre modos de oscilação

O caso mais famoso

Transição entre modos de oscilação

Perturbação por outro modo simples

Para dados iniciais

$$u_0 = a w + \varepsilon w_*,$$

teremos

$$u(x, y, t) = \phi(t) w(x, y) + \psi(t) w_*(x, y)$$

Sistema de equações para ϕ e ψ

$$\phi'' + (\Lambda - P + S(m^2 \phi^2 + n^2 \psi^2))\phi = 0$$

$$\psi'' + (\Lambda_* - P + S(m^2 \phi^2 + n^2 \psi^2))\psi = 0$$

$$\phi(0) = a, \phi'(0) = 0, \psi(0) = \varepsilon, \psi'(0) = 0$$

O sistema obtido

Sistema após mudança de variáveis

$$\begin{aligned}\Phi'' + (\mu + \Phi^2 + \Psi^2)\Phi &= 0 \\ \Psi'' + \gamma(\nu + \Phi^2 + \Psi^2)\Psi &= 0\end{aligned}$$

Dados iniciais: $\Phi(0) = \bar{a}$, $\Psi(0) = \bar{\varepsilon}$

O sistema obtido

Sistema após mudança de variáveis

$$\begin{aligned}\Phi'' + (\mu + \Phi^2 + \Psi^2)\Phi &= 0 \\ \Psi'' + \gamma(\nu + \Phi^2 + \Psi^2)\Psi &= 0\end{aligned}$$

Linearizando em torno de $(\Phi, 0)$, obtemos o sistema

Sistema linearizado

$$\begin{aligned}\Phi'' + (\mu + \Phi^2)\Phi &= 0 \\ \Psi'' + \gamma(\nu + \Phi^2)\Psi &= 0\end{aligned}$$

O sistema obtido

Sistema linearizado

$$\begin{aligned}\Phi'' + (\mu + \Phi^2)\Phi &= 0 \\ \Psi'' + \gamma(\nu + \Phi^2)\Psi &= 0\end{aligned}$$

Estabilidade linear

O modo simples ϕw é linearmente estável com relação à autofunção w_* quando 0 é uma solução estável da equação

$$\Psi'' + \gamma(\nu + \Phi^2)\Psi = 0$$

Teorema de instabilidade

$$I_j = (j(2j + 1), (j + 1)(2j + 1))$$

$$K_j = ((j + 1)(2j + 1), (j + 1)(2j + 3))$$



T. Cazenave and F. B. Weissler.

Unstable simple modes of the nonlinear string.

Quart. Appl. Math., 54(2):287–305, 1996.



Teorema de instabilidade

$$I_j = (j(2j + 1), (j + 1)(2j + 1))$$

$$K_j = ((j + 1)(2j + 1), (j + 1)(2j + 3))$$

Parâmetros

$$\mu = \frac{\Lambda_{m,i} - P}{S}, \quad \nu = \frac{\Lambda_{n,k} - P}{S}, \quad \gamma = \frac{n^2}{m^2}$$



Teorema de instabilidade

Parâmetros

$$\mu = \frac{\Lambda_{m,i} - P}{S}, \quad \nu = \frac{\Lambda_{n,k} - P}{S}, \quad \gamma = \frac{n^2}{m^2}$$

Teorema

Sejam $f \equiv 0$, $\delta = 0$, $S > 0$, $P < \Lambda_1$, $m, n, i, k \in \mathbb{N}$ e defina $\gamma = \frac{n^2}{m^2}$.

- Se $\gamma \in I_j$, então qualquer modo (m, k) -simples com energia grande é (n, k) -linearmente estável.
- Se $\gamma \in K_j$, então qualquer modo (m, k) -simples com energia grande é (n, k) -linearmente instável.

Teorema de instabilidade



Teorema

Sejam $f \equiv 0$, $\delta = 0$, $S > 0$, $P < \Lambda_1$, $m, n, i, k \in \mathbb{N}$ e defina $\gamma = \frac{n^2}{m^2}$.

- Se $\gamma \in I_j$, então qualquer modo (m, k) -simples com energia grande é (n, k) -linearmente estável.
- Se $\gamma \in K_j$, então qualquer modo (m, k) -simples com energia grande é (n, k) -linearmente instável.

Obrigado