Fractional Noether's Theorem with Classical and Caputo Derivatives: constants of motion for non-conservative systems

Gastão S. F. Frederico
gastao.frederico{@ua.pt, @ufsc.br}

Departmento de Matemática
Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil

Colóquio de Matemática
Florianópolis, 01 de setembro de 2017

Um pouco de História

O Cálculo das Variações é um ramo da Matemática cujo objetivo é solucionar problemas de optimalidade em espaços de funções, descrevendo as propriedades essenciais de tais soluções. O Cálculo das Variações teve origem com o problema da braquistócrona. A questão foi proposta por Johann Bernoulli como se segue:

Problema da Braquistócrona

Dados dois pontos A e B num plano vertical, determinar o caminho para que um corpo, sob a força única do seu próprio peso e na ausência do atrito, desça de A a B em tempo mínimo.

Equações de Euler–Lagrange

Problema Fundamental

O problema fundamental do Cálculo das Variações consiste na determinação de uma função que minimize a seguinte funcional integral:

$$I[q(\cdot)] = \int_a^b L\left(t, q(t), \dot{q}(t)\right) dt \longrightarrow \min \tag{P}$$

sob as condições de fronteira

$$q(a) = q_a \quad e \quad q(b) = q_b \,, \tag{1}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\dot{q}(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ e quer as funções admissíveis $q : t \mapsto q(t)$ quer o *Lagrangiano* $L : (t, q(t), v(t)) \mapsto L(t, q(t), v(t))$ pertencem à classe C^2.

Equações de Euler–Lagrange (Cont.)

Suponhamos que $q(\cdot)$ é solução do Problema Fundamental. Então todas as funções admissíveis numa vizinhança de $q(\cdot)$, podem ser definidas por

$$q(t) + \varepsilon h(t) \tag{2}$$

onde $h(\cdot) \in C^2([a,b];\mathbb{R}^n)$ e satisfaz $h(a) = h(b) = 0$. Nestas condições, (P) representa uma família de curvas uniparamétrica e o cálculo do valor da funcional integral (P) para essa família de funções resulta numa função em ε

$$I(\varepsilon) = I\left[(q + \varepsilon h)(\cdot)\right] = \int_a^b L\left(t,\, q(t) + \varepsilon h(t),\, \dot{q}(t) + \varepsilon \dot{h}(t)\right) dt$$

que, por hipótese, atinge o mínimo para $\varepsilon = 0$. Temos então como condição necessária para mínimo que

$$\left.\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0\,. \tag{3}$$

Equações de Euler–Lagrange (Cont.)

Lemma

Lema fundamental do Cálculo das Variações Seja $f(t) \in C^2([a,b];\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int_a^b f(t) \cdot g(t) dt = 0$$

para a toda função $g \in C^2([a,b];\mathbb{R}^n)$ e $g(a) = g(b) = 0$. Então

$$f(t) = 0, \qquad t \in [a,b] .$$

Equações de Euler–Lagrange (Cont.)

Theorem

Equações de Euler–Lagrange Se $q(\cdot)$ é um minimizante do Problema Fundamental, então $q(\cdot)$ satisfaz as equações de Euler–Lagrange

$$\partial_2 L(t, q(t), \dot{q}(t)) - \frac{d}{dt}\partial_3 L(t, q(t), \dot{q}(t)) = 0. \tag{4}$$

Cálculo Fracionário

O cálculo fracionário, envolvendo derivadas e integrais de ordem não-inteiras, teve seu início a mais de três séculos atrás. Em 1695 l'Hôpital escreveu uma carta à Leibniz perguntando qual seria o significado da expressão $\dfrac{d^{1/2}y}{dx^{1/2}}$, ou seja, qual seria o significado de uma derivada de ordem $\dfrac{1}{2}$. Leibniz respondeu a carta de l'Hôpital dizendo que o valor de $d^{\frac{1}{2}}x$ é $x\sqrt{dx : x}$. Apesar de ser quase tão antigo quanto o cálculo usual de derivadas e integrais de ordem inteira, só nas últimas três décadas o cálculo fracionário despertou maior atenção devido a suas aplicações em vários campos da Física e da Engenharia.

Cálculo Fracionário (cont.)

Esta demora no surgimento de aplicações do cálculo fracionário se explica devido as dificuldades de se interpretar física e geometricamente as derivadas e integrais não inteiras. Até hoje, mais de trezentos anos após sua criação, ainda não temos uma interpretação física e geométrica consistente para essas derivadas e integrais. Recentemente foi proposta uma interpretação geométrica como "sombras de uma área" e uma interpretação física como "sombras do passado". Derivadas fracionárias são, em geral, operadores não-locais e historicamente aplicadas para estudar processos não-locais ou com efeitos de memória, e para estudar espaços granulares ou fractais. Como exemplos, aplicações do Cálculo Fracionário em espaços granulares e fractais são encontradas no contexto de difusão anômala e teorias de campo.

Cálculo Fracionário (cont.)

Atualmente a definição mais utilizada em matemática é a formulação de Riemann-Liouville

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt,$$

onde o inteiro n satisfaz $n \leq \alpha < n+1$ e a um número real arbitrário, enquanto a formulação mais popular em Física é a de Caputo

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{d^n y(t)}{dt^n} \frac{1}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt.$$

Tanto o cálculo fracionário de Riemann-Liouville como o de Caputo são construídos a partir da continuação analítica da fórmula de Cauchy para integrais repetidas.

Cálculo Fracionário (cont.)

Nota

A derivada fracionária de Riemann–Liouville de uma constante é geralmente diferente de zero, ao passo que a derivada fracionária de Caputo de uma constante é sempre igual a zero.

Exemplo

A derivada fracionária de Riemann–Liouville de ordem $p > 0$ da função $(t-a)^{\upsilon}$, $\upsilon > -1$, é dada por

$$ {}_aD_t^p (t-a)^{\upsilon} = \frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(-p+\upsilon+1)} (t-a)^{\upsilon-p} \, . $$

Simetrias

- O conceito de simetria tem um papel muito importante na Física e Matemática .
- As simetrias são definidas através de transformações do sistema que deixam o problema invariante.

Importância das simetrias

Elas estendem os aspectos fundamentais e teóricos às aplicações concretas, tendo implicações profundas no comportamento dinâmico dos sistemas e das suas propriedades qualitativas básicas.

Leis de Conservação

- Uma outra noção muito importante na Física e Matemática é a da lei de conservação.
- As leis de conservação podem ser utilizadas para baixar a ordem das equações diferenciais de Euler–Lagrange, o que pode simplificar bastante o processo de resolução dos problemas do Cálculo das Variações e Controle Óptimo.

Leis de Conservação

são quantidades que são preservadas ao longo das soluções das equações de Euler-Lagrange $q(\cdot)$ do problema.

Amalie Emmy Noether (1882–1935)

- Emmy Noether provou, in 1918, que as noções de simetria e lei de conservação estão relacionadas: se um problema é invariante através de uma simetria, então existe uma lei de conservação.
- Uma das mais conhecidas aplicações deste conceito é dado pela conservação de energia em Mecânica: o Lagrangiano autónomo $L(q(t), \dot{q}(t))$ de um sistema de pontos conservativo é invariante sob a translação do tempo, e

$$-L(q, \dot{q}) + \partial_2 L(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} \equiv \text{constant} \tag{5}$$

a partir do teorema de Noether.

Fractional variational problems with classical and Caputo derivatives

The fractional problem of the calculus of variations with classical and Caputo derivatives in Lagrange form consists to find the stationary functions of the functional

$$I[q(\cdot)] = \int_a^b L\left(t, q(t), \dot{q}(t), {}_a^C D_t^\alpha q(t)\right) dt \qquad (P_C)$$

subject to given appropriate boundary conditions, where $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, $0 < \alpha < 1$, $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$, and the admissible functions $q : t \mapsto q(t)$ and the Lagrangian $L : (t, q, v, v_l) \mapsto L(t, q, v, v_l)$ are assumed to be C^2:

$$q(\cdot) \in C^2\left([a, b]; \mathbb{R}^n\right);$$
$$L(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot) \in C^2\left([a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}\right).$$

Fractional Euler–Lagrange equations

Definition

(Space of variations) We denote by $S_h(a, b)$ the set of functions $h(\cdot) \in C^2([a, b]; \mathbb{R}^n)$ such that $h(a) = h(b) = 0$.

Definition

The funcional $I[(\cdot)]$ is $S_h(a, b)$-differentiable on a curve $q(\cdot) \in C^2([a, b]; \mathbb{R}^n)$ if and only if its *Fréchet differential*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{I[q + \epsilon h] - I[q]}{\epsilon}$$

exists in any direction $h(\cdot) \in S_h(a, b)$, then DI is called its differential and is given by

$$DI[q](h) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{I[q + \epsilon h] - I[q]}{\epsilon}.$$

Fractional Euler–Lagrange equations-Cont.

Definition

(Fractional S_h-extremal with classical and Caputo derivatives). We say that $q(\cdot)$ is an S_h-extremal with classical and Caputo derivatives for funcional (P_C) if for any $h(\cdot) \in S_h(a, b)$

$$DI[q](h) = 0\,.$$

Theorem

The differential of $I[(\cdot)]$ on $q(\cdot) \in C^2([a, b]; \mathbb{R}^n)$ is given by

$$DI[q](h) = \int_a^b \Big[\partial_2 L\left(t, q, \dot{q}, {}_a^C D_t^\alpha q\right) \cdot h + \partial_3 L\left(t, q, \dot{q}, {}_a^C D_t^\alpha q\right) \cdot \dot{h} + \partial_4 L\left(t, q, \dot{q}, {}_a^C D_t^\alpha q\right) \cdot {}_a^C D_t^\alpha h\Big] dt\,. \quad (6)$$

Fractional Euler–Lagrange equations-Cont.

Theorem

(Fractional least-action principle). If $q(\cdot)$ is a S_h-extremal, then it satisfies the following Euler–Lagrange equation with classical and Caputo derivatives:

$$\partial_2 L\left(t, q(t), \dot{q}(t), {}_a^C D_t^\alpha q(t)\right) - \frac{d}{dt}\partial_3 L\left(t, q(t), \dot{q}(t), {}_a^C D_t^\alpha q(t)\right) + {}_t D_b^\alpha \partial_4 L\left(t, q(t), \dot{q}(t), {}_a^C D_t^\alpha q(t)\right) = 0, \quad t \in [a, b]. \quad (7)$$

If $\alpha = 1$, one obtains the standard Euler–Lagrange equations:

$$\partial_2 F\left(t, q, \dot{q}\right) = \frac{d}{dt}\partial_3 F\left(t, q, \dot{q}\right).$$

Fractional Noether's theorem

Definition

(Group of symmetries) For any real ε, let $\psi(\varepsilon,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be a diffeomorphism. Then $\Psi = \{\psi(\varepsilon,\cdot)\}_{\varepsilon\in\mathbb{R}}$ is a one parameter group of diffeomorphisms of $\mathbb{R}^n$ if it satisfies:

1. $\psi(0,\cdot) = Id_{\mathbb{R}^n}$;
2. $\forall\varepsilon,\varepsilon' \in \mathbb{R},\ \psi(\varepsilon,\cdot)\circ\psi(\varepsilon',\cdot) = \psi(\varepsilon+\varepsilon',\cdot)$;
3. $\psi(\cdot,\cdot)$ is of class C^2 with respect to ε.

Fractional Noether's theorem-Cont.

Definition

(Invariance without transforming the time). Functional (P_C) is said to be ε-invariant under the action of one parameter group of diffeomorphisms $\Psi_2 = \{\psi_2(\varepsilon, \cdot)\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ of $\mathbb{R}^n$ if it satisfies for any solution $q(\cdot)$ of (7)

$$\begin{aligned}
&\int_{t_a}^{t_b} L\left(t, q(t), \dot{q}(t), {}_a^C D_t^\alpha q(t)\right) dt \\
&= \int_{t_a}^{t_b} L\left(t, \psi_2(\varepsilon, q(t)), \frac{d\psi_2}{dt}(\varepsilon, q(t)), {}_a^C D_t^\alpha \psi_2(\varepsilon, q(t))\right) dt \qquad (8)
\end{aligned}$$

for any subinterval $[t_a, t_b] \subseteq [a, b]$.

Fractional Noether's theorem-Cont.

Theorem

(Transfer formula).
Consider functions $f, g \in C^\infty([a,b];\mathbb{R}^n)$ *and assume the following condition* $(\mathcal{C})$*: the sequences* $\left(g^{(k)} \cdot {}_a I_t^{k-\alpha}(f - f(a))\right)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ *and* $\left(f^{(k)} \cdot {}_t I_b^{k-\alpha} g\right)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ *converge uniformly to* 0 *on* $[a,b]$*. Then, the following equality holds:*

$$g \cdot {}_a^C D_t^\alpha f - f \cdot {}_t D_b^\alpha g$$
$$= \frac{d}{dt}\left[\sum_{r=0}^{\infty}\left((-1)^r g^{(r)} \cdot {}_a I_t{}^{r+1-\alpha}(f - f(a)) + f^{(r)} \cdot {}_t I_b{}^{r+1-\alpha} g\right)\right]$$

Fractional Noether's theorem-Cont.

where

$$
{}_aI_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\theta)^{\alpha-1} f(\theta) d\theta,
$$
$$
{}_tI_b^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\theta-t)^{\alpha-1} f(\theta) d\theta,
$$

Γ is the Euler gamma function and $0 < \alpha < 1$.

Fractional Noether's theorem-Cont.

Theorem

(Fractional Noether's theorem without transformation of time). If functional (P_C) *is invariant in the sense of Definition 9 and functions* $\frac{\partial\psi_2}{\partial\varepsilon}(0,q)$ *and* $\partial_4 L$ *satisfy condition* $(\mathcal{C})$ *of Theorem 10, then*

$$\frac{d}{dt}\left[f_2 \cdot \partial_3 L + \sum_{r=0}^{\infty}\left((-1)^r \partial_4 L^{(r)} \cdot {}_aI_t{}^{r+1-\alpha}(f_2 - f_2(a)) \right.\right.$$
$$\left.\left. + f_2^{(r)} \cdot {}_tI_b{}^{r+1-\alpha}\partial_4 L\right)\right] = 0 \quad (9)$$

along any fractional S_h*-extremal with classical and Caputo derivatives* $q(\cdot)$*,* $t \in [a,b]$ *(Definition 5). In* (9) f_2 *denote* $\frac{\partial\psi_2}{\partial\varepsilon}(0,q)$.

Fractional Noether's theorem-Cont.

Definition

Functional (P_C) is said to be ε-invariant under the action of one parameter group of diffeomorphisms $\Psi_{i=1,2} = \{\psi_i(\varepsilon,\cdot)\}_{\varepsilon\in\mathbb{R}}$ of $\mathbb{R}^{1+n}$ if it satisfies for any solution $q(\cdot)$ of (7)

$$\int_{t_a}^{t_b} L\left(t, q(t), \dot{q}(t), {}_a^C D_t^\alpha q(t)\right) dt$$
$$= \int_{\psi_1(\varepsilon,t_a)}^{\psi_1(\varepsilon,t_b)} L\left(\psi_1(\varepsilon,t), \psi_2(\varepsilon,q(t)), \frac{\dot{\psi}_2(\varepsilon,q(t))}{\dot{\psi}_1(\varepsilon,t)}, {}_{\bar{a}}^C D_{\bar{t}}^\alpha \psi_2(\varepsilon,q(t))\right) \dot{\psi}_1(\varepsilon,q(t))dt \quad (10)$$

for any subinterval $[t_a,t_b]\subseteq[a,b]$, where $\dot{\psi}_i = \frac{d\psi_i}{dt}$, $i=1,2$, $\bar{a}=\psi_1(\varepsilon,t_a)$ and $\bar{t}=\psi_1(\varepsilon,t)$.

Fractional Noether's theorem-Cont.

Theorem

(Fractional Noether's theorem with classical and Caputo derivatives). If functional (P_C) is invariant, in the sense of Definition 12, and functions $\frac{\partial \psi_2}{\partial \varepsilon}(0,q)$ and $\partial_4 L$ satisfy condition $(\mathcal{C})$ of Theorem 10, then

$$\frac{d}{dt}\left[f_2 \cdot \partial_3 L + \sum_{r=0}^{\infty}\left(\left(-1\right)^r \partial_4 L^{(r)} \cdot {}_aI_t{}^{r+1-\alpha}(f_2 - f_2(a))\right.\right.$$
$$\left. + f_2^{(r)} \cdot {}_tI_b{}^{r+1-\alpha}\partial_4 L\right)$$
$$\left. + \tau\left(L - \dot{q} \cdot \partial_3 L - \alpha \partial_4 L \cdot {}_a^C D_t{}^{\alpha} q\right)\right] = 0 \quad (11)$$

along any fractional S_h-extremal.

Fractional Optimal Noether's theorem

The fractional optimal control problem with classical and Caputo derivatives is introduced, without loss of generality, in Lagrange form:

$$I[q(\cdot),u(\cdot),\mu(\cdot)] = \int_a^b L\left(t,q(t),u(t),\mu(t)\right) dt \longrightarrow \min \tag{12}$$

subject to the differential system

$$\dot{q}(t) = \varphi\left(t,q(t),u(t)\right), \tag{13}$$

$${}_a^C D_t^{\alpha} q(t) = \rho\left(t,q(t),\mu(t)\right) \tag{14}$$

and initial condition

$$q(a) = q_a\,. \tag{15}$$

Fractional Optimal Noether's theorem

For convenience of notation, we introduce the following operator:

$$[q, u, \mu, p, p_\alpha](t) = (t, q(t), u(t), \mu(t), p(t), p_\alpha(t))$$

Theorem

(Fractional Pontryagin Maximum Principle). If $(q(\cdot), u(\cdot), \mu(\cdot))$ is a process for problem (12)–(15) then there exists co-vector functions $p(\cdot) \in PC^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$ and $p_\alpha(\cdot) \in PC^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$ such that for all $t \in [a, b]$ the quadruple $(q(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), p_\alpha(\cdot))$ satisfies the following conditions: the Hamiltonian system

$$\begin{cases} \partial_5 \mathcal{H}[q, u, \mu, p, p_\alpha](t) = \dot{q}(t)\,, \\ \partial_6 \mathcal{H}[q, u, \mu, p, p_\alpha](t) = {}_a^C D_t^{\alpha} q(t)\,, \\ \partial_2 \mathcal{H}[q, u, \mu, p, p_\alpha](t) = -\dot{p}(t) + {}_t D_b^\alpha p_\alpha(t)\,; \end{cases} \tag{16}$$

Fractional Optimal Noether's theorem

the stationary conditions

$$\begin{cases} \partial_3 \mathcal{H}[q, u, \mu, p, p_\alpha](t) = 0 \, , \\ \partial_4 \mathcal{H}[q, u, \mu, p, p_\alpha](t) = 0 \, ; \end{cases} \tag{17}$$

where the Hamiltonian $\mathcal{H}$ is given by

$$\begin{gathered} \mathcal{H}\left[t, q, u, \mu, p, p_\alpha\right](t) \\ = L\left(t, q(t), u(t), \mu(t)\right) + p(t) \cdot \varphi\left(t, q(t), u(t)\right) + p_\alpha(t) \cdot \rho\left(t, q(t), \mu(t)\right) . \end{gathered} \tag{18}$$

Fractional Optimal Noether's theorem

Theorem

(Noether's theorem in Hamiltonian form for optimal control problems with classical and Caputo derivatives). If (12)–(14) *is variationally invariant and functions f_2 and p_α satisfy condition* ($\mathcal{C}$) *of Theorem 10, then*

$$\frac{d}{dt}\Bigg[-f_2\cdot p-\sum_{r=0}^{\infty}\Big((-1)^r p_\alpha^{(r)}\cdot {}_aI_t{}^{r+1-\alpha}(f_2-f_2(a)) + f_2^{(r)}\cdot {}_tI_b{}^{r+1-\alpha}p_\alpha\Big)+\tau\left(\mathcal{H}-(1-\alpha)p_\alpha\cdot {}_a^C D_t^\alpha q\right)\Bigg]=0 \quad (19)$$

along any Pontryagin S_h-extremal with classical and Caputo derivatives.

OBRIGADO!