# Existência [1] de soluções globais fortes para o escoamento de fluidos magnéticos em domínios exteriores tridimensionais

Jáuber C. Oliveira (MTM-UFSC)

06 de abril de 2018

[1] Colóquio (2018.1)

# 1. Introdução

Consideremos um sistema de equações diferenciais parciais que modelam o escoamento de fluidos magnéticos - denominado “**modelo de Shliomis**” para ferrofluidos.

- o fluido ocupa um domínio exterior.
- Não incluimos o termo de regularização na equação de magnetização, *ausente na obtenção das equações governantes*, e normalmente considerado em investigações anteriores para o problema correspondente em domínio limitado.

O resultado principal deste trabalho, a existência de soluções globais fortes, é obtido ao preço de assumir hipóteses de que os dados e parâmetros de acoplamento sejam suficientemente pequenos.

# 1. Introdução (Cont.)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \mathbf{u} - \eta \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mu_0\, \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} + \frac{\mu_0}{2}\, \mathrm{rot}\,(\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \quad \text{in } Q \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\, \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } Q \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \mathbf{M} + \frac{1}{\delta}\, (\mathbf{M} - \chi_0\, \mathbf{H}) = \frac{1}{2}\, [\mathrm{rot}\, \mathbf{u}] \times \mathbf{M} - \beta_0\, \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \quad \text{in } Q \tag{3}$$

$\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}$: **força magnética.**

$\mathbf{M} \times \mathbf{H}$: **torque.**

(3) **é a equação de magnetização, proposta por Shliomis em** 1972.

# 1. Introdução

$$\operatorname{div}\,(\mathbf{H}+\mathbf{M}) = F \quad \text{in } Q \tag{4}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0 \quad \text{in } Q \tag{5}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0,\ \nabla\cdot\mathbf{u}_0 = 0,\ \mathbf{M}(0) = \mathbf{M}_0 \quad \text{in } \Omega \tag{6}$$

$$\mathbf{u} = 0,\ \mathbf{H}\cdot\mathbf{n} = -\mathbf{M}\cdot\mathbf{n} \text{ in } \Sigma \tag{7}$$

# 1. Introdução (cont.)

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio exterior simplesmente conexo com fronteira regular,
$Q = \Omega \times (0,\infty)$, $\Sigma = \partial\Omega \times (0,\infty)$, e
**n** denota o vetor unitário normal à fronteira apontando para fora.
**u** e *p* denotam a velocidade do fluido e a pressão, respectivamente.
**M** e **H** representam a magnetização e o campo magnético, respectivamente, definidos em $\Omega$.

Dois Modelos Matemáticos para Ferrofluidos ...

- S. Odenbach, Colloidal magnetic fluids: Basics, development and application of ferrofluids, Lecture Notes in Physics, Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- R.E. Rosensweig, Ferrohydrodynamics, Dover Books on Physics, Dover Publications, 2013.
- M. I. Shliomis, Effective viscosity of magnetic suspensions, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 61 (1972), no. 6, 2411–2418.
- M. I. Shliomis, Magnetic fluids, Soviet Physics Uspekhi 17 (1974), no. 2, 153–169.
- M. I. Shliomis, Comment on magnetoviscosity and relaxation in ferrofluids, Phys. Rev. E 64 (2001), 063501.

... tem sido investigados recentemente em relação à existência de soluções: o modelo de Rosensweig e o modelo de Shliomis.

**Modelo de Rosensweig** (MR):

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\cdot\nabla u\right)-(\eta+\xi)\Delta u=\mu_0 M\cdot\nabla u+2\xi\,\mathrm{rot}\,w$$

$$\mathrm{div}\;u=0$$

$$\rho\kappa\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}+u\cdot\nabla\omega\right)-\eta^{'}\Delta\omega-\left(\eta^{'}+\lambda^{'}\right)\nabla\mathrm{div}\omega$$

$$=\mu_0 M\times H+2\xi(\mathrm{rot}\,u-2\omega)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t}+u\cdot\nabla M=\omega\times M-\frac{1}{\tau}(M-H)$$

$$\mathrm{rot}\,H=0,\quad \mathrm{div}\,(H+4\pi M)=F$$

# 2. Pesquisas Anteriores (cont.)

- Youcef Amirat and Kamel Hamdache, Global weak solutions to a ferrofluid flow model, Mathematical Methods in the Applied Sciences 31 (2008), no. 2, 123–151.
  **existência local de única solução forte para MR** sem **TR** e **DL**.
  **existência global de soluções fracas para MR em domínio limitado (DL) com termo de regularização (TR)** $-\sigma\Delta M$ **adicionado à equação de magnetização**.
- Youcef Amirat and Kamel Hamdache, Strong solutions to the equations of a ferrofluid flow model, Journal of Mathematical Analysis and Applications 353 (2009), no. 1, 271–294.
  **existência e unicidade local no tempo de soluções fortes para o MS**, sem **TR** e com **DL**.

# 2. Pesquisas Anteriores (cont.)

- Zhong Tan and Yanjin Wang, Global analysis for strong solutions to the equations of a ferrofluid flow model, Journal of Mathematical Analysis and Applications 364 (2010), no. 2, 424–436.
  **MS, sem TR, em $\mathbb{R}^3$, mostraram existência local de soluções fortes para o problema de Cauchy e estabeleceram um critério de ”blowup” em tempo finito de soluções fortes** com dados iniciais pequenos e campo magnético externo também pequeno.
- Yanjin Wang and Zhong Tan, Global existence and asymptotic analysis of weak solutions to the equations of ferrohydrodynamics, Nonlinear Analysis: Real World Applications 11 (2010), no. 5, 4254 – 4268.
  **Modelo de Rosensweig, Domínio limitado, com Termo de Regularização, existência de solução global fraca e comportamento assintótico**.

# 3. Espaços de Funções (Cont.)

Notação:
$\| \ \|_{m,p} = \| \ \|_{m,p,\Omega} := \| \ \|_{W^{m,p}(\Omega)}$,
$\| \ \| := \| \ \|_{0,2}$ denota a norma $L^2$ e, em particular, $\| \ \|_{1,2}$ denota a normal usual do espaço $W^{1,2}(\Omega)$.
O produto interno em $L^2(\Omega)$ é denotado por $( \ , \ )$;
o produto interno em $W^{1,2}(\Omega)$ é denotado por $( \ , \ )_{1,2}$.
Seja $A$ o operador de Stokes, i.e. , $A = -\mathbb{P}_\sigma \Delta$, onde o operador de projeção $\mathbb{P}_\sigma : L^2(\Omega) \to L^2_\sigma(\Omega)$ está associado à decomposição

$$L^2(\Omega) = L^2_\sigma(\Omega) \oplus G_2(\Omega),$$

onde $L^2_\sigma(\Omega)$ denota o fecho com relação a $\| \ \|_{L^2(\Omega)}$ do conjunto

$$\mathbb{D}_\sigma(\Omega) = \left\{ v \in C^\infty_c(\Omega) : \nabla \cdot v = 0 \text{ in } \Omega \right\}.$$

e

$$G_2(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : v = \nabla \Pi, \ \Pi \in H^1_{\text{loc}}(\Omega) \right\}.$$

# 3. Espaços de Funções (Cont.)

O domínio do operador $A$ é :

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap L_\sigma^2(\Omega).$$

Definimos os seguintes espaços (com normas naturais associadas)

$$W(\Omega) = \left\{ g \in L^2(J; H^1(\Omega)) : \ \frac{dg}{dt} \in L^2(J; H^{-1}(\Omega) \right\},$$

e

$$V(\Omega) := H_0^1(\Omega) \cap L_\sigma^2(\Omega).$$

$$X_1 = \left\{ \mathbf{u} \in L^\infty(J; D(A)) : \mathbf{u} \in L^2(J; H^3(\Omega)), \mathbf{u}' \in L^\infty(J; L_\sigma^2(\Omega)) \cap L^2(J; V(\Omega)) \right\},$$

$$X_2 = \left\{ \nabla p \in L^2(J; H^1(\Omega)) \right\},$$

$$X_3 = \left\{ \mathbf{M} \in (L^\infty \cap L^2)(J; H^2(\Omega)) : \mathbf{M}' \in (L^\infty \cap L^2)(J; H^1(\Omega)) \right\},$$

$$X_4 = \left\{ \mathbf{H} \in (L^\infty \cap L^2)(J; H^2(\Omega)) : \mathbf{H}' \in (L^\infty \cap L^2)(J; H^1(\Omega)) \right\}.$$

# 3. Espaços de Funções (Cont.)

Definimos o conjunto

$$X = X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4$$

e $X_\varepsilon$ é o conjunto de $(\mathbf{u}, \nabla p, \mathbf{M}, \mathbf{H}) \in X$ tais que $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$, $\mathbf{M}(0) = \mathbf{M}_0$, $\mathbf{H}(0) = \mathbf{H}_0$ e $\|(\mathbf{u}, \nabla p, \mathbf{M}, \mathbf{H})\|_X \leq \varepsilon$.

**Teorema**: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio exterior simplesmente conexo de classe $C^3$. Seja $\mathbf{u}_0 \in D(A)$, $\mathbf{M}_0 \in H^2(\Omega)$ e considere as hipóteses anteriores sobre o campo magnético exterior $\tilde{\mathbf{H}}$ e o campo magnético inicial $\mathbf{H}_0$. Então, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que se

$$\|\mathbf{u}_0\|_{D(A)} + \|\mathbf{M}_0\|_{H^2} + \|\tilde{\mathbf{H}}'\|_{L^\infty(L^2)} + \|\text{div}\, \tilde{\mathbf{H}}'\|_{L^\infty(L^2)} + \|\text{div}\, \tilde{\mathbf{H}}\|_{L^\infty(H^1)} \leq \varepsilon_0$$

and

$$\chi_0 \leq \varepsilon_0$$

então existe funções únicas $\mathbf{u} \in L^\infty(J; D(A)) \cap L^2(J; H^3(\Omega))$ com

$\mathbf{u}' \in L^\infty(J; L^2_\sigma(\Omega)) \cap L^2(J;\ V(\Omega))$,
$p \in L^2(J, H^2_{\text{loc}}(\Omega))$ com $\nabla p \in L^2(J;\ H^1(\Omega))$,
$\mathbf{M} \in (L^\infty \cap L^2)(J; H^2(\Omega))$ com $\mathbf{M}' \in (L^\infty \cap L^2)(J,\ H^1(\Omega))$ e
$\mathbf{H} \in (L^\infty \cap L^2)(J; H^2(\Omega))$ com $\mathbf{H}' \in (L^\infty \cap L^2)(J,\ H^1(\Omega))$
tais que $(\mathbf{u}, p, \mathbf{M}, \mathbf{H})$ é a única solução das equações (1)-(7).

4.1 A equação de magnetização linearizada
Dados $\mathbf{v} \in X_1$, $\mathbf{m} \in X_3$ e $\mathbf{h} \in X_4$, resolvemos

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{M} + \frac{1}{\delta}\mathbf{M} = \mathbf{Z}, \\ \mathbf{M}(0) = \mathbf{M}_0 \text{ in } \Omega \end{cases}$$

em que

$$\mathbf{Z} = \frac{\chi_0}{\delta}\mathbf{h} + \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{v} \times \mathbf{m} - \beta_0\, \mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{h})\,.$$

Existe uma única solução forte $\mathbf{M}$ em $X_3$. Então, podemos definir

$$\Phi_1 : X_1 \times X_4 \times X_3 \to X_3$$

por

$$\mathbf{M} = \Phi_1(\mathbf{v}, \mathbf{h}, \mathbf{m}).$$

**Proposição**: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio exterior com fronteira de classe $C^1$. Supomos que $\mathbf{M}_0 \in H^2(\Omega)$, $\mathbf{v} \in L^1(J; H^3(\Omega) \cap V(\Omega))$ e $\mathbf{Z} \in L^2(J; H^2(\Omega))$. Então, existe uma única solução $\mathbf{M} \in L^\infty(J;\ H^2(\Omega))$ da equação linearizada da magnetização e uma constante positiva $C$ tais que

$$\|\mathbf{M}\|_{L^\infty(J;H^2)} \leq \left( \|\mathbf{M}_0\|_{2,2} + \sqrt{\delta}\, \|\mathbf{Z}\|_{L^2(H^2)} \right) \exp\left( C\, \|\mathbf{v}\|_{L^1(V)} + \|\mathbf{v}\|_{L^1(H^3)} \right) \tag{8}$$

Se $\mathbf{v} \in L^\infty(J; D(A))$ e $\mathbf{Z} \in L^\infty(J; H^2(\Omega))$, então $\mathbf{M}' \in L^\infty(J; H^1(\Omega))$ e

$$\begin{aligned} \|\mathbf{M}'\|_{L^\infty(H^1)} \leq{}& C\, \|\mathbf{Z}\|_{L^\infty(H^2)} + C \left\{ \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(D(A))} + \frac{1}{\delta} \right\} \\ &\times \left( \|\mathbf{M}_0\|_{2,2} + \sqrt{\delta}\, \|\mathbf{Z}\|_{L^2(H^2)} \right) \exp\left( C\ \left( \|\mathbf{v}\|_{L^1(V)} + \|\mathbf{v}\|_{L^1(H^3)} \right) \right). \end{aligned} \tag{9}$$

Além disso, para uma constante positiva suficientemente pequena $\tilde{C}_\delta$, se $\|\mathbf{v}\|_{X_1} \le \tilde{C}_\delta$, então

$$\|\mathbf{M}\|_{L^\infty(H^2)} \le \|\mathbf{M}_0\|_{2,2} + \sqrt{\delta}\;\; \|\mathbf{Z}\|_{L^2(H^2)}, \tag{10}$$

$\mathbf{M} \in L^2(J; H^2(\Omega))$ com

$$\|\mathbf{M}\|_{L^2(H^2)} \le \sqrt{2\delta}\, \|\mathbf{M}_0\|_{2,2} + \sqrt{2}\,\delta\, \|\mathbf{Z}\|_{L^2(H^2)}, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{M}'\|_{L^\infty(H^1)} \le\; & C_e\, \|\mathbf{Z}\|_{L^\infty(H^2)} \\ & + \frac{C_e}{2\delta(C_e+2)} \left(\sqrt{2\delta}\, \|\mathbf{M}_0\|_{2,2} + \sqrt{2}\,\delta\, \|\mathbf{Z}\|_{L^2(H^2)}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

e

$$\begin{aligned} \|\mathbf{M}'\|_{L^2(H^1)} \le\; & \left\{ \|(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{M}\|_{L^2(H^1)} + \frac{1}{\delta}\|\mathbf{M}\|_{L^2(H^1)} + C\, \|\mathbf{Z}\|_{L^2(H^2)} \right\} \\ & \le C\, \|\mathbf{Z}\|_{L^2(H^2)} + C \left\{ \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(D(A))} + \frac{1}{\delta} \right\} \\ & \times \left(\sqrt{2\delta}\, \|\mathbf{M}_0\|_{2,2} + \sqrt{2}\,\delta\, \|\mathbf{Z}\|_{L^2(H^2)}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

# 5. Equação de Magnetização Linearizada

Portanto, $\mathbf{M} \in X_3$ e

$$\|\mathbf{M}\|_{X_3} \leq C\left(1+\|\mathbf{v}\|_{X_1}\right)\left\{\|\mathbf{M}_0\|_{2,2}+\chi_0\ \|\mathbf{h}\|_{X_4}+\|\mathbf{m}\|_{X_3}^2\|\mathbf{h}\|_{X_4}+\|\mathbf{m}\|_{X_3}\ \|\mathbf{v}\|_{X_1}\right\}$$

4.2 O problema para o campo magnético

O segundo problema auxiliar é descrito como segue: dados $\mathbf{M} \in X_3$ (obtido do problema anterior) e $F \in L^\infty(J; L^2_0(\Omega) \cap H^1(\Omega))$ com $\partial F/\partial t \in L^\infty(J; L^2(\Omega))$, resolvemos

$$\begin{cases} -\Delta\Psi = -F + \operatorname{div}\mathbf{M}, \\ \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{n}} = -\mathbf{M}\cdot\mathbf{n} \text{ in } \Sigma \end{cases}$$

obtendo $\Psi$ in $L^\infty(J; H^3(\Omega))$ com $\partial\Psi/\partial t \in L^\infty(J; H^2(\Omega))$, representado por $\Psi \in Z_3$. Como existe uma única solução $\Psi \in L^\infty(J; H^3(\Omega))$, definimos a função $\Phi_2 : X_3 \to Z_3$ por $\Phi_2(M) = \Psi$.

# 6. Problema para o Campo Magnético

Definimos o campo magnético $\mathbf{H}$ por:

$$\mathbf{H} = \nabla \Psi.$$

Então,
(i) $\operatorname{div} \mathbf{H} = F - \operatorname{div} \mathbf{M}$ em $Q$,
(ii) $\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$ sobre $\Sigma$,
(iii) $\mathbf{H} \in L^\infty(J; L^2(\Omega))$ pois segue de

$$\|\mathbf{H}\|_{L^2}^2 = \left(\operatorname{div} \mathbf{H}^{ext}, \Psi\right)_{L^2} - (\mathbf{M}, \mathbf{H})_{L^2}$$

que

$$\|\mathbf{H}\|_{L^\infty(L^2)} \leq \|\mathbf{H}^{ext}\|_{L^\infty(L^2)} + \|\mathbf{M}\|_{L^\infty(L^2)}$$

e

$$\|\mathbf{H}\|_{L^2(L^2)} \leq \|\mathbf{H}^{ext}\|_{L^2(L^2)} + \|\mathbf{M}\|_{L^2(L^2)}.$$

(iv) $\mathbf{H} \in L^\infty(J; H^1(\Omega))$ pelo item anterior e

$$\|\text{div}\,\mathbf{H}\|_{L^\infty(L^2)} \leq \|F\|_{L^\infty(L^2)} + \|\mathbf{M}\|_{L^\infty(H^2)},$$

$$\|\text{div}\,\mathbf{H}\|_{L^2(L^2)} \leq \|F\|_{L^2(L^2)} + \|\mathbf{M}\|_{L^2(H^2)},$$

$$\|\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}\|_{L^\infty(H^{1/2})(\partial\Omega)} = \|\mathbf{M}\cdot\mathbf{n}\|_{L^\infty(H^{1/2})(\partial\Omega)} \leq C\,\|\mathbf{M}\|_{L^\infty(H(\text{div},\Omega))} \leq C\,\|\mathbf{M}\|_{L^\infty(H^2)}$$

$$\|\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}\|_{L^2(H^{1/2})(\partial\Omega)} = \|\mathbf{M}\cdot\mathbf{n}\|_{L^2(H^{1/2})(\partial\Omega)} \leq C\,\|\mathbf{M}\|_{L^2(H(\text{div},\Omega))} \leq C\,\|\mathbf{M}\|_{L^2(H^2)}$$

(v) $\mathbf{H} \in L^\infty(J; H^2(\Omega))$. Sabemos que div $\mathbf{H} \in L^\infty(J;\ H^1(\Omega))$ (imediato, por (i)) e $\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}$ pertence a $L^\infty(J;\ H^{3/2}(\partial\Omega))$ (imediato, por (ii) e $\mathbf{M} \in L^\infty(H^2)$).

(vi) $\mathbf{H}^{'} \in L^{\infty}(J; H^{1}(\Omega))$, pois

$$\|\mathbf{H}^{'}\|_{L^{\infty}(L^2)} \leq \|\tilde{\mathbf{H}}^{'}\|_{L^{\infty}(L^2)} + \|\mathbf{M}^{'}\|_{L^{\infty}(L^2)},$$

$$\|\mathrm{div}\,\mathbf{H}^{'}\|_{L^{\infty}(L^2)} \leq \|F^{'}\|_{L^{\infty}(L^2)} + \|\mathbf{M}^{'}\|_{L^{\infty}(H^1)},$$

$$\|\mathbf{H}^{'} \cdot \mathbf{n}\|_{L^{\infty}(H^{1/2})(\partial\Omega)} = \|\mathbf{M}^{'} \cdot \mathbf{n}\|_{L^{\infty}(H^{1/2})(\partial\Omega)} \leq C\,\|\mathbf{M}'\|_{L^{\infty}(H(\mathrm{div},\,\Omega))} \leq C\,\|\mathbf{M}'\|_{L^{\infty}(H^1)}$$

and

$$\|\mathbf{H}^{'}\|_{L^{\infty}(H^1)} \leq C\left\{\|\mathbf{H}^{'}\|_{L^{\infty}(L^2)} + \|\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}^{'}\|_{L^{\infty}(L^2)}\right\} + C\left\{\|\mathrm{div}\,\mathbf{H}^{'}\|_{L^{\infty}(L^2)} + \|\mathbf{H}^{'} \cdot \mathbf{n}\|_{L^{\infty}(H^{1/2}(\partial\Omega))}\right\}$$

# 6. Problema para o Campo Magnético

Então,
$\|\mathbf{H}'\|_{L^\infty(H^1)} \leq C \left\{ \|\tilde{\mathbf{H}}'\|_{L^\infty(L^2)} + \|\mathbf{M}'\|_{L^\infty(L^2)} + \|\text{div}\, \tilde{\mathbf{H}}_t\|_{L^\infty(L^2)} + \|\mathbf{M}'\|_{L^\infty(H^1)} \right\}$,
$\mathbf{H} \in X_4$ e

$$\|\mathbf{H}\|_{X_4} \leq C \left\{ \|\tilde{\mathbf{H}}'\|_{L^\infty(L^2)} + \|\text{div}\, \tilde{\mathbf{H}}'\|_{L^\infty(L^2)} + \|\text{div}\, \tilde{\mathbf{H}}\|_{L^\infty(H^1)} + \|\mathbf{M}\|_{X_3} \right\}. \tag{14}$$

4.3 O problema de Stokes (M. Hieber, Y. Naito e Y. Shibata, 2012)
Definimos a função $\Phi_3 : X_1 \times X_3 \times X_4 \to X_1 \times X_2$ por

$$\Phi_3((\mathbf{v}, \mathbf{m}, \mathbf{h})) = (\mathbf{u}, \nabla p),$$

usando o seguinte terceiro problema auxiliar: dado $\mathbf{v} \in X_1$, $\mathbf{m} \in X_3$ e $\mathbf{h} \in X_4$, resolvemos para $\mathbf{u}$ e $\nabla p$.

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \Delta \mathbf{u} + \nabla p = G, \\ \text{div}\, \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } Q \\ \mathbf{u} = 0 \text{ in } \Sigma \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \in D(A) \text{ in } \Omega \end{cases}$$

onde

$$G = -(\mathbf{v} \cdot \nabla)\, \mathbf{v} + \mu_0\, \mathbf{m} \cdot \nabla \mathbf{h} + \frac{\mu_0}{2}\, \text{rot}\, (\mathbf{m} \times \mathbf{h}).$$

Inferimos que $\mathbf{u} \in X_1$, $\nabla p \in X_2$ e

$$\|\mathbf{u}\|_{X_1}^2 + \|\nabla p\|_{X_2}^2 \leq C \left\{ \|\mathbf{u}_0\|_{D(A)}^4 + \|\mathbf{u}_0\|_{D(A)}^8 + \|\mathbf{m}\|_{X_3}^4 \; \|\mathbf{h}\|_{X_4}^4 \right\}$$

$$+ C \left\{ \|\mathbf{v}\|_{X_1}^4 + \|\mathbf{m}\|_{X_3}^2 \; \|\mathbf{h}\|_{X_4}^2 \right\}$$

# 8. Aplicação para determinar ponto fixo

Usando a sequência de problemas auxiliares definidos anteriormente, definimos uma aplicação $\Phi : X \to X$ por

$$\Phi(\mathbf{v}, \nabla q, \mathbf{m}, \mathbf{h}) := (\mathbf{u}, \nabla p, \mathbf{M}, \mathbf{H})$$

para mostrar que ela tem um único ponto fixo.

# 5. Referências


- Y. Amirat and K. Hamdache, *Global weak solutions to a fer- rofluid flow model*, Mathematical Methods in the Applied Sciences 31 (2008), no. 2, 123–151.
- Y. Amirat and K. Hamdache, *Strong solutions to the equations of a ferrofluid flow model*, Journal of Mathematical Analysis and Ap- plications 353 (2009), no. 1, 271– 294.
- Y. Amirat, K. Hamdache, and F. Murat, *Global weak solutions to equations of motion for magnetic fluids*, Journal of Mathematical Fluid Mechanics 10 (2007), no. 3, 326–351.

# 5. Referências


- A. Friedman, Partial differential equations of parabolic type, Dover Books on Mathematics Series, Dover Publications, 2008.
- Matthias Hieber, Yuka Naito, and Yoshihiro Shibata, Global existence results for oldroyd-b fluids in exterior domains, Journal of Differential Equations 252 (2012), no. 3, 2617 – 2629.
- R.E. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics*, Dover Books on Physics, Dover Publications, 2013.
- Z. Tan and Y. Wang, *Global analysis for strong solutions to the equations of a ferrofluid flow model*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 364 (2010), no. 2, 424 – 436.
- Y. Wang and Z. Tan, *Global existence and asymptotic analysis of weak solutions to the equations of ferrohydrodynamics*, Nonlinear Analysis: Real World Applications 11 (2010), no. 5, 4254 – 4268.

**Obrigado**!