Núcleo e imagem

Álgebra Linear – Videoaula 10

Luiz Gustavo Cordeiro

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Transformações lineares e subespaços

- Uma função $f: X \to Y$ também "opera" sobre subconjuntos de X, por **imagens diretas**:

$$A \subseteq X \Longrightarrow f(A) = \{f(a) : a \in A\} \subseteq Y$$

- Uma função $f: X \to Y$ também "opera" sobre subconjuntos de Y, por **imagens inversas**:

$$B \subseteq Y \Longrightarrow f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X.$$

- Transformações lineares fazem o mesmo com subespaços.

Teorema

Se $T : V \to W$ é linear e $E \subseteq V$ é subespaço, então $T(E)$ é subespaço de W.

- $0_W = T(0_V) \in T(E)$ ✓
- Se $x, y \in T(E)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$x = T(e), \qquad y = T(f)$$

para certos $e, f \in E$. Assim,

$$x + \lambda y = T(e) + \lambda T(f) = T(\underbrace{e + \lambda f}_{\in E}) \in T(E). ✓$$

Subespaços imagens inversas

Teorema

Se $T: V \to W$ é linear e $F \subseteq W$ é subespaço, então $T^{-1}(F)$ é subespaço de V.

- $T(0_V) = 0_W \in F$, logo $0_V \in T^{-1}(F)$ ✓
- Se $x, y \in T^{-1}(F)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$T(x + \lambda y) = \underbrace{T(x)}_{\in F} + \lambda \underbrace{T(y)}_{\in F} \in F$$

Logo, $x + \lambda y \in T^{-1}(F)$ ✓

Imagens diretas e spans

Teorema

Se $A \subseteq V$, então $\operatorname{span}(T(A)) = T(\operatorname{span}(A))$.

Se $y \in \operatorname{span}(T(A))$, então

$$y = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$$

para certos $b_i \in T(A)$ e $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Como $b_i \in T(A)$, então

$$b_i = T(a_i)$$

para certos $a_i \in A$.
Assim,

$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$$

Imagens diretas e spans

$$
\begin{aligned}
y &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(a_i) \\
&= T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right)
\end{aligned}
$$

Pondo $a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \in \operatorname{span}(A)$, temos

$$y = T(a) \in T(\operatorname{span}(A)).$$

Isto prova que $\operatorname{span} T(A) \subseteq T(\operatorname{span}(A))$.

Imagens diretas e spans

Reciprocamente, se $z \in T(\mathrm{span}(A))$, então $z = T(x)$ para algum $x \in \mathrm{span}(A)$. Neste caso,

$$x = \sum_{j=1}^{m} \mu_j a_j$$

para certos $a_j \in A$, e assim

$$\begin{aligned} z = T(x) &= T\left(\sum_{j=1}^{m} \mu_j a_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \mu_j T(a_j). \end{aligned}$$

Como $T(a_j) \in T(A)$ para cada j, então $z \in \mathrm{span}\, T(A)$.

Isto prova que $T(\mathrm{span}(A)) \subseteq \mathrm{span}\, T(A)$.

Será que vale que $T^{-1}(\mathrm{span}(B)) = \mathrm{span}(T^{-1}(B))$?

Não!

Por exemplo, se

$$V = \mathbb{R}, \qquad W = \mathbb{R}^2, \qquad B = \mathcal{E}_2,$$

$$T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad T(x) = (x, x),$$

Então

- $T^{-1}(\mathrm{span}(\mathcal{E}_2)) = T^{-1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$, mas
- $\mathrm{span}(T^{-1}(\mathcal{E}_2)) = \mathrm{span}(\varnothing) = \{0\}$.

Imagens diretas e inversas de subespaços triviais

Seja $T\colon V \to W$ linear.

- $T(\{0_V\}) = \{T(0_V)\} = \{0_W\}$
- $T(V) = ?$
- $T^{-1}(\{0_W\}) = ?$
- $T^{-1}(W) = \{v \in V : T(v) \in W\} = V$

Núcleo/Kernel e imagem

Definição

Seja $T\colon V \to W$ uma transformação linear

- O **núcleo** ou **kernel** de $T\colon V \to W$ é o subespaço de V

$$\ker(T) = T^{-1}(\{0_W\}) = \{v \in V : T(v) = 0_W\}$$

A **nulidade** de T é $\dim(\ker(T))$.

- A **imagem** de T é o subespaço de V

$$\mathrm{im}(T) = T(V) = \{w \in W : w = T(x) \text{ para algum } x \in V\}$$

O **posto** ou **rank** de T é $\dim(\mathrm{im}(T))$.

Exemplos em espaços de polinômios

Considere $\mathbb{R}[x]$, o espaço dos polinômios reais. Seja $a(x)$ um polinômio fixo.

A transformação de "multiplicação por $a(x)$",

$$M_{a(x)}\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \qquad M_{a(x)}\,(p(x)) = a(x)p(x)$$

é linear. (Exercício)

- $$\begin{aligned}\operatorname{im}(M_{a(x)}) &= \left\{M_{a(x)}(p(x)) : p(x) \in \mathbb{R}[x]\right\} \\ &= \{a(x)p(x) : p(x) \in \mathbb{R}[x]\}\end{aligned}$$

  ou seja, $\operatorname{im}(M_{a(x)})$ consiste dos polinômios $q(x)$ tais que $q(x) = a(x)p(x)$ para algum $p(x)$; Estes são os **múltiplos de** $a(x)$:

  $$\operatorname{im}(M_{a(x)}) = \{\text{múltiplos de } a(x)\}\,.$$

Exemplos em espaços de polinômios

$$M_{a(x)}: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \qquad M_{a(x)}\left(p(x)\right) = a(x)p(x)$$

- $\operatorname{im}(M_{a(x)}) = \{\text{múltiplos de } a(x)\}$.
- $\ker(M_{a(x)}) = \left\{p(x) : p(x)a(x) = 0_{\mathbb{R}[x]}\right\}$

$$= \begin{cases} \mathbb{R}[x], & \text{se } a(x) = 0 \\ \left\{0_{\mathbb{R}[x]}\right\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplos em $\mathbb{R}[x]$

Seja α um escalar fixo. A transformação

$$\mathrm{ev}_\alpha \colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ev}_\alpha(p(x)) = p(\alpha)$$

é linear. (Exercício)

- $\mathrm{im}(\mathrm{ev}_\alpha) = \{p(\alpha) : p(x) \in \mathbb{R}[x]\}$

  Mas todo número real r é da forma $r = p(\alpha)$ para algum $p(x)$.

  Por exemplo $p_1(x) = r$ constante, ou $p_2(x) = x - \alpha + r$, etc.

  Assim, $\mathrm{im}(\mathrm{ev}_\alpha) = \mathbb{R}$.

Exemplos em $\mathbb{R}[x]$

$$\mathrm{ev}_\alpha\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ev}_\alpha(p(x)) = p(\alpha)$$

- $\mathrm{im}(\mathrm{ev}_\alpha) = \mathbb{R}$ ✓
- $\ker(\mathrm{ev}_\alpha) = \{p(x) : p(\alpha) = 0\}$ consiste dos polinômios que têm α como raiz.

  Lembre-se de que

  $$\alpha \text{ é raiz de } p(x) \iff p(x) = (x-\alpha)q(x) \text{ para algum } q(x).$$

  ou seja,

  $$\begin{aligned}\ker(\mathrm{ev}_\alpha) &= \{(x-\alpha)q(x) : q(x) \in \mathbb{R}[x]\} \\ &= \mathrm{im}(M_{(x-\alpha)})\end{aligned}$$

  consiste dos múltiplos de $(x-\alpha)$.

Exemplo em $\mathbb{R}^n$

Considere a transformação

$$T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

dada por

$$T(x,y,z,w) = (12x + 2y - 20z - 12w, -18x - 3y + 30z + 18w, -6x - y + 10z + 6w)$$

Em forma de coluna:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x + 2y - 20z - 12w \\ -18x - 3y + 30z + 18w \\ -6x - y + 10z + 6w \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 2 & -20 & -12 \\ -18 & -3 & 30 & 18 \\ -6 & -1 & 10 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Exemplo em $\mathbb{R}^n$

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 2 & -20 & -12 \\ -18 & -3 & 30 & 18 \\ -6 & -1 & 10 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Ou seja, $T = L_A$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 2 & -20 & -12 \\ -18 & -3 & 30 & 18 \\ -6 & -1 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

Vamos determinar $\mathrm{im}(T)$ de quatro formas.

$$T(x,y,z,w) = (12x + 2y - 20z - 12w, -18x - 3y + 30z + 18w, -6x - y + 10z + 6w)$$

Por definição,

$$\operatorname{im}(T) = T(\mathbb{R}^4)$$

Considere a base canônica de $\mathbb{R}^4$: $\mathcal{E}_4 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, onde

$$e_1 = (1,0,0,0), \quad e_2 = (0,1,0,0), \quad e_3 = (0,0,1,0), \quad e_4 = (0,0,0,1).$$

Então $\operatorname{span} \mathcal{E}_4 = \mathbb{R}^4$.

Como spans(=subespaços gerados) são preservados por transformações lineares,

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(T) = T(\mathbb{R}^4) = T(\operatorname{span} \mathcal{E}_4) &= \operatorname{span} T(\mathcal{E}_4) \\ &= \operatorname{span} \{ T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4) \} \end{aligned}$$

Achamos um conjunto gerador!

Exemplo em $\mathbb{R}^n$

Primeira forma de determinar imagem

$$T(x, y, z, w) = (12x + 2y - 20z - 12w, -18x - 3y + 30z + 18w, -6x - y + 10z + 6w)$$

im(T) é gerado pelos vetores.

$$T(e_1) = T(1, 0, 0, 0) = (12, -18, -6) \qquad T(e_3) = T(0, 0, 1, 0) = (-20, 30, 10)$$
$$T(e_2) = T(0, 1, 0, 0) = (2, -3, -1) \qquad T(e_4) = T(0, 0, 0, 1) = (-12, 18, 6)$$

Para achar uma base, faça o mesmo processo de sempre:

- Adicione o primeiro (não-nulo), $T(e_1)$, à base: $\{T(e_1)\}$;
- Tente adicionar $T(e_2)$: construa a matriz que tem eles como colunas e escalone:

$$\begin{bmatrix} 12 & 2 \\ -18 & -3 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{escalona}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Falta um pivô, logo eles são LD; Não adiciona $T(e_2)$ à base.

$$
\begin{aligned}
T(e_1) &= (12, -18, -6) \qquad & T(e_3) &= (-20, 30, 10) \\
T(e_2) &= (2, -3, -1) \qquad & T(e_4) &= (-12, 18, 6)
\end{aligned}
$$

Alternativamente, note que $T(e_1) = 6T(e_2)$, logo eles são LD (sem fazer nenhum escalonamento).

- Repita o proceso; tente adicionar $T(e_3)$. Note que $T(e_3) = -\frac{5}{3}T(e_1)$, logo eles são LD e não adicionamos $T(e_3)$ à base.
- Tente adicionar $T(e_4)$. Note que $T(e_4) = -T(e_1)$, logo eles são LD e não adicionamos $T(e_4)$ à base.

No fim, ficamos só com $\{T(e_1)\} = \{(12, -18, -6)\}$, que é uma base de $\operatorname{im}(T)$.

Os vetores

$$\begin{array}{ll} T(e_1) = (12, -18, -6) & T(e_3) = (-20, 30, 10) \\ T(e_2) = (2, -3, -1) & T(e_4) = (-12, 18, 6) \end{array}$$

geram $\text{im}(T)$.

Ou seja, $\text{im}(T)$ é o espaço coluna da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 2 & -20 & -12 \\ -18 & -3 & 30 & 18 \\ -6 & -1 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

Já sabemos encontrar base para espaço coluna!

Encontrar base para espaço coluna:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 2 & -20 & -12 \\ -18 & -3 & 30 & 18 \\ -6 & -1 & 10 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{escalona} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\xRightarrow{\text{Teorema da aula 8.7}}$ "*As colunas correspondentes às colunas da forma escalonada que contêm os pivôs formam uma base para* $\mathrm{col}(A) = \mathrm{im}(T)$".

Encontramos a base $\{(12, -18, -6)\}$ de $\mathrm{im}(T)$.

Exemplo em $\mathbb{R}^n$

Terceira forma de determinar imagem

Os vetores

$$\begin{aligned} T(e_1) &= (12, -18, -6) \qquad & T(e_3) &= (-20, 30, 10) \\ T(e_2) &= (2, -3, -1) \qquad & T(e_4) &= (-12, 18, 6) \end{aligned}$$

geram $\mathrm{im}(T)$.

Ou seja, $\mathrm{im}(T)$ é o espaço linha da matriz

$$A^T = \begin{bmatrix} 12 & -18 & -6 \\ 2 & -3 & -1 \\ -20 & 30 & 10 \\ -12 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

Já sabemos encontrar base para espaço linha!

Encontrar base para espaço linha:

$$A^T = \begin{bmatrix} 12 & -18 & -6 \\ 2 & -3 & -1 \\ -20 & 30 & 10 \\ -12 & 18 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{escalona} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\xRightarrow{\text{Teorema da aula 8.4}}$ "*As linhas não-nulas da forma escalonada formam uma base de* $\operatorname{lin}(A^T) = \operatorname{im}(T)$".

Encontramos a base $\left\{\left(1, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$ de $\operatorname{im}(T)$.

Exemplo em $\mathbb{R}^n$

Quarta forma de determinar imagem

$$T(x, y, z, w) = (12x + 2y - 20z - 12w, -18x - 3y + 30z + 18w, -6x - y + 10z + 6w)$$

Temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(T) = \big\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z, w) = (a, b, c) \\ \text{para algum } (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4\big\} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} (a, b, c) \in \operatorname{im}(T) &\iff T(x, y, z, w) = (a, b, c) \text{ tem solução em } x, y, z, w \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 12x & + & 2y & - & 20z & - & 12w & = & a \\ -18x & - & 3y & + & 30z & + & 18w & = & b \\ -6x & - & y & + & 10z & + & 6w & = & c \end{array} \right. \\ &\qquad \text{tem solução em } x, y, z, w \end{aligned}$$

$$(a,b,c) \in \operatorname{im}(T) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 12x & + & 2y & - & 20z & - & 12w & = & a \\ -18x & - & 3y & + & 30z & + & 18w & = & b \\ -6x & - & y & + & 10z & + & 6w & = & c \end{array} \right.$$

tem solução em x, y, z, w

Para ver se um sistema (heterogêneo) tem solução, escalonamos a matriz aumentada de coeficientes

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 12 & 2 & -20 & -12 & a \\ -18 & -3 & 30 & 18 & b \\ -6 & -1 & 10 & 6 & c \end{array}\right] \xrightarrow{\text{escalona}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{3} & -1 & \frac{a}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+\frac{3}{2}a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c+\frac{a}{2} \end{array}\right]$$

Exemplo em $\mathbb{R}^n$

Quarta forma de determinar imagem

A forma "escalonada" da matriz aumentada do sistema "$T(x,y,z,w) = (a,b,c)$" é

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{3} & -1 & \frac{a}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b + \frac{3}{2}a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c + \frac{a}{2} \end{array}\right]$$

$\xRightarrow{\text{Geometria Analítica}}$ "O sistema linear heterogêneo tem solução se, e somente se, a forma escalonada da matriz aumentada não possui nenhum pivô na última coluna".

Portanto,

$$\begin{aligned} (a,b,c) \in \mathrm{im}(T) &\iff T(x,y,z,w) = (a,b,c) \text{ tem solução} \\ &\iff \begin{cases} b + \frac{3}{2}a = 0 \\ c + \frac{a}{2} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, descrevemos $\mathrm{im}(T)$ como um espaço solução de um sistema linear homogêneo:

$$(a,b,c) \in \mathrm{im}(T) \iff \begin{cases} b + \frac{3}{2}a = 0 \\ c + \frac{a}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = -\frac{3}{2}a \\ c = -\frac{1}{2}a \end{cases}$$

$$\iff (a,b,c) = a\left(1, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Encontramos uma base para $\mathrm{im}(T)$: $\left\{\left(1, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$.

Exemplo em $\mathbb{R}^n$

Determinando dimensão da imagem

De todo modo, $\dim(\mathrm{im}(T)) = 1$.

$$T(x,y,z,w) = (12x + 2y - 20z - 12w, -18x - 3y + 30z + 18w, -6x - y + 10z + 6w)$$

$$\ker(T) = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : T(x,y,z,w) = (0,0,0)\right\},$$

ou seja, $\ker(T)$ é o espaço solução de

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 12x & + & 2y & - & 20z & - & 12w & = & 0 \\ -18x & - & 3y & + & 30z & + & 18w & = & 0 \\ -6x & - & y & + & 10z & + & 6w & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{\text{solução geral}} \left\{x = -\frac{1}{6}y + \frac{5}{3}z + w\right.$$

$$\xrightarrow{\text{forma paramétrica}} (x,y,z,w) = y\left(-\frac{1}{6}, 1, 0, 0\right) + z\left(\frac{5}{3}, 0, 1, 0\right) + w(1,0,0,1)$$

$$\xRightarrow{\text{forma paramétrica}} (x, y, z, w) = y(-\frac{1}{6}, 1, 0, 0) + z(\frac{5}{3}, 0, 1, 0) + w(1, 0, 0, 1)$$

Encontramos uma base para $\ker(T)$: $\{(-\frac{1}{6}, 1, 0, 0), (\frac{5}{3}, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$, e assim $\dim(\ker(T)) = 3$.