Subespaços Vetoriais

Álgebra Linear – Videoaula 2

Luiz Gustavo Cordeiro

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

- V: um espaço vetorial.

Subconjunto W de V que também são espaços vetoriais: subespaço vetorial

- Mesma soma: Se $x, y \in W$, então $x + y \in W$.
- Mesmo produto: Se $x \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $\lambda x \in W$.

Definição

Um **subespaço vetorial** de um espaço vetorial V é um subconjunto não-vazio W satisfazendo:

- Para quaisquer $x, y \in W$, vale que $x + y \in W$;
- Para qualquer $x \in W$ e qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, vale que $\lambda x \in W$.

Diz-se que W é **fechado** por soma e produto por escalar, respectivamente.

Se V é um espaço vetorial:

1. V é um subespaço vetorial de V;

Qualquer subespaço $W \subseteq V$ com $W \neq V$ é dito ser **próprio**.

2. $\{0_V\}$ é um subespaço vetorial de V:
   - Se $x, y \in \{0_V\}$, então $x = y = 0_V$, logo
$$x + y = 0_V + 0_V = 0_V \in \{0_V\};$$
   - Se $x \in \{0_V\}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $x = 0_V$ e
$$\lambda x = \lambda 0_V = 0_V.$$

$\{0_V\}$ é o **subespaço zero** ou **subespaço nulo**.

V e $\{0_V\}$ são chamados de subespaços **triviais**.

Seja $V = \mathbb{R}^2$.
O conjunto $W = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$:

- W é não-vazio, pois $(0, 0) \in W$.
- W é fechado por soma: Se $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ pertencem a W, então $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, e

  $$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0 + 0 = 0,$$

  logo $x + y \in W$.
- W é fechado por produto: Similarmente, se $x \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $\lambda x \in W$.

Seja $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, o espaço vetorial das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
O subconjunto P de V consistindo das funções **pares** é um subespaço:

$$P = \{f : f(x) = f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}.$$

- P é não-vazio, pois contém funções constantes;
- P é fechado pela soma: exercício.
- P é fechado por produto: Se $f \in P$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$(\lambda f)(-x) = \lambda \cdot f(-x) = \lambda \cdot f(x) = (\lambda f)(x)$$

para todo x, logo $\lambda f \in P$.

Similarmente, o conjunto I das funções ímpares também é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

O espaço $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ das funções polinomiais é um subespaço de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
Por exemplo: Se $f, g : \mathbb{R}$ são polinomiais, então

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \\
g(x) &= b_0 + b_1x + \cdots\cdots\cdots + b_mx^m
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\
&= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots) \\
&= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots \\
&= C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots,
\end{aligned}
$$

onde $C_j = a_j + b_j$.

O conjunto $[0, \infty)$ **não é** um subespaço de $\mathbb{R}$:

1. $[0, \infty)$ é não-vazio. (ok...)
2. $[0, \infty)$ é fechado por soma? Se $x, y \in [0, \infty)$, então $x, y \geq 0$, logo

$$x + y \geq x \geq 0$$

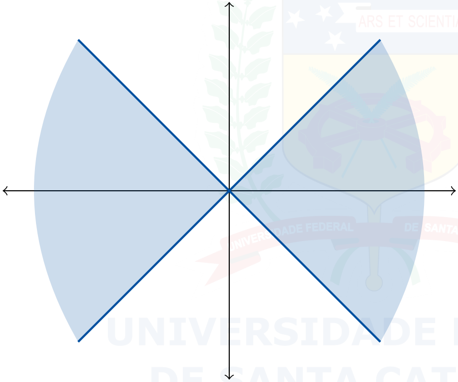
   e portanto $x + y \in [0, \infty)$. (ok...)
3. $[0, \infty)$ é fechado por produto? Não!
   Se $x = 1 \in [0, \infty)$ e $\lambda = -1 \in \mathbb{R}$, então

$$\lambda x = -1 \notin [0, \infty).$$

O conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq |y|\}$ não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

1. X é não-vazio. (ok...)
2. X é fechado por soma? Não!
   Se $v = (-1, 1)$ e $w = (1, 1)$, então $v, w \in X$, mas
   $$v + w = (0, 2) \notin X.$$
3. X é fechado por produto? Sim! (Exercício)

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq |y|\}$$



Subespaços de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

- Subespaços de $\mathbb{R}$:
    - $\{0\}\,,\mathbb{R}$.
- Subespaços de $\mathbb{R}^2$:
    - $\{(0,0)\}\,,\mathbb{R}^2$.
    - Retas que passam por $(0,0)$;
- Subespaços de $\mathbb{R}^3$:
    - $\{(0,0,0)\}\,,\mathbb{R}^3$.
    - Retas que passam por $(0,0,0)$;
    - Planos que passam por $(0,0,0)$;

Teorema

Um subconjunto não-vazio U de um espaço vetorial V é subespaço de V se, e somente se, para todos $x, y \in U$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, vale que $x + \lambda y \in U$

Teorema

Se U é um subespaço vetorial de V, então U é um espaço vetorial com as soma e produto restritos de V. Além disso:

1. $0_V \in U$;
2. *Se* $x \in U$ *então* $-x \in U$.

De fato, tome $x \in U$ qualquer. Então

1. $0_V = 0x \in U$;
2. $-x = (-1)x \in U$.

Teorema

Se U é um subespaço vetorial de V, então U é um espaço vetorial com as soma e produto restritos de V. Além disso:

1. $0_V \in U$;
2. *Se* $x \in U$ *então* $-x \in U$.

Associatividades, comutatividade, distributividades, unidade do produto são trivias.

1. O zero de V também é um zero de U, pois $0_V + x = x + 0_V = x$ para todo $x \in V$, e em particular para $x \in U$.
2. O oposto em V de um elemento de U é o oposto em U do mesmo elemento.

Teorema

Se $U_1, U_2, \ldots, U_n$ são subespaços vetoriais de V, então

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i := U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$$

também é subespaço vetorial de V.

1. $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ é não-vazio: De fato, $0_V \in U_i$ para todo i, logo

$$0_V \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i.$$

Teorema

Se $U_1, U_2, \ldots, U_n$ são subespaços vetoriais de V, então

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i := U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$$

também é subespaço vetorial de V.

2. $\underline{\bigcap_{i=1}^{n} U_i \text{ é fechado por soma}}$: Se $x, y \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$, então
   - Para todo i, $x, y \in U_i$, logo $x + y \in U_i$ (para todo i),

   ou seja, $x + y \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$.
3. $\underline{\bigcap_{i=1}^{n} U_i \text{ é fechado por produto}}$: Exercício

Se $U_1, \ldots, U_n$ são subespaços de V, então $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ é o **maior subespaço de V que está contido em todos os $U_1, \ldots, U_n$.**

E a união?

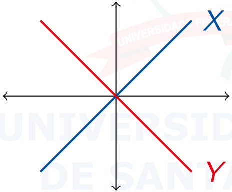
Em geral, a união de subespaços não é subespaço.
Por exemplo,

$$X = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$$

e

$$Y = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$$

são subespaços de $\mathbb{R}^2$, mas $X \cup Y$ não é subespaço.



Mais um exemplo

Considere uma equação linear

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = \alpha. \qquad (*)$$

O **conjunto solução** da equação $(*)$ é o subconjunto de $\mathbb{R}^4$

$$\mathrm{Sol}_* = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = \alpha\}$$

Exercício

Prove que Sol_* é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ se, e somente se, $\alpha = 0$.

Considere um sistema linear homogêneo

$$(*)\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & = 0 \quad (\heartsuit) \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = 0 \quad (\diamondsuit) \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & & & = 0 \quad (\clubsuit) \end{array}\right. .$$

O **conjunto solução** do sistema $(*)$ é o subconjunto Sol_* de $\mathbb{R}^4$ consistindo das 4-uplas (x_1, x_2, x_3, x_4) que satisfazem a todas as equações de $(*)$ simultaneamente.

Já sabemos que o conjunto solução de cada uma das equações $(\heartsuit)$ $(\diamondsuit)$ e $(\clubsuit)$, separadamente, é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$. Chamemo-los de $\mathrm{Sol}_\heartsuit$, $\mathrm{Sol}_\diamondsuit$ e $\mathrm{Sol}_\clubsuit$.

Então $\mathrm{Sol}_* = \mathrm{Sol}_\heartsuit \cap \mathrm{Sol}_\diamondsuit \cap \mathrm{Sol}_\clubsuit$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.