Dependência e independência linear

Álgebra Linear – Videoaula 5

Luiz Gustavo Cordeiro

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Seja $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$.

- Será que S tem "gente demais"?
- Será que existe $S' \subsetneq S$ com $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$?
- Será que algum elemento de S **depende** dos outros?

Definição

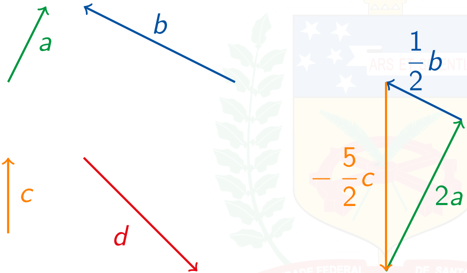
Uma coleção de vetores $v_1, \ldots, v_n$ é **linearmente dependente** (**LD**) se existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ não todos simultaneamente nulos tais que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0_V,$$

ou seja,

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V.$$

Será que os vetores abaixo são linearmente dependentes?



$$2a + \frac{1}{2}b - \frac{5}{2}c + 0d = 0_V$$

Os coeficientes não são todos nulos simultaneamente, logo a coleção é LD.

Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} x_1 &= (1, -1, 2) \\ x_2 &= (-3, 2, 1) \\ x_3 &= (1, 2, -3) \\ x_4 &= (2, 3, 1). \end{aligned}$$

Esta família é LD. Para provar isso, precisamos encontrar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ tais que

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0_3$$

ou seja,

$$\alpha_1(1, -1, 2) + \alpha_2(-3, 2, 1) + \alpha_3(1, 2, -3) + \alpha_4(2, 3, 1) = (0, 0, 0)$$

$$(\alpha_1, -\alpha_1, 2\alpha_1) + (-3\alpha_2, 2\alpha_2, \alpha_2) + (\alpha_3, 2\alpha_3, -3\alpha_3) + (2\alpha_4, 3\alpha_4, \alpha_4) = (0, 0, 0)$$

$$(\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4, -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4, 2\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 + \alpha_4) = (0, 0, 0)$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \alpha_1 & - & 3\alpha_2 & + & \alpha_3 & + & 2\alpha_4 & = & 0 \\ -\alpha_1 & + & 2\alpha_2 & + & 2\alpha_3 & + & 3\alpha_4 & = & 0 \\ 2\alpha_1 & + & \alpha_2 & - & 3\alpha_3 & + & \alpha_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Temos de escalonar completamente a matriz de coeficientes

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}
\xrightarrow{L_2+L_1\to L_2}
\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{L_3-2L_1\to L_3}
\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & -5 & -3 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{L_3+7L_2\to L_3}
\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 16 & 32 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\frac{1}{16}L_3\to L_3}
\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}
$$

Dependência linear
Um exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdots} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-L_2 \to L_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 + 3L_3 \to L_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 - L_3 \to L_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdots} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1+3L_2 \to L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

que nos dá o sistema equivalente

$$\begin{cases} \alpha_1 & + & 3\alpha_4 & = & 0 \\ \alpha_2 & + & \alpha_4 & = & 0 \\ \alpha_3 & + & 2\alpha_4 & = & 0 \end{cases}$$

A solução geral é

$$\begin{cases} \alpha_1 & = & -3\alpha_4 \\ \alpha_2 & = & -\alpha_4 \\ \alpha_3 & = & -2\alpha_4 \end{cases}$$

com variável livre α_4.

O problema era "encontrar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ não simultaneamente nulos [...]".

Para achar uma solução específica, escolha um valor (não-trivial) para a variável livre, e.g. $\alpha_4 = -1$:

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 2, \quad \alpha_4 = -1.$$

Dependência linear
Um exemplo

O problema era "encontrar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ tais que

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0_3''$$

Será que achamos?! Para

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 2, \quad \alpha_4 = -1$$

temos que

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 3(1,-1,2) + (-3,2,1) \\ &\qquad + 2(1,2,-3) - (2,3,1) \\ &= (3-3+2-2, -3+2+4-3, 6+1-6-1) \\ &= (0,0,0) = 0_3 \end{aligned}$$

As funções $f(x) = 2\sin^2(x)$, $g(x) = 3\cos^2(x)$ e $h(x) = \cos(2x)$ são linearmente dependentes? Da trigonometria sabemos que

$$\begin{aligned} h(x) &= \cos(2x) \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= \frac{1}{3}g(x) - \frac{1}{2}f(x), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{3}g - \frac{1}{2}f - h = 0.$$

Portanto, as funções f, g, h são LD.

Independência linear

Definição

Uma coleção $v_1, \dots, v_n$ de vetores é **linearmente independente (LI)** se a única solução da equação

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V$$

é $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (1, -1, 2) \\
x_2 &= (-3, 2, 1) \\
x_3 &= (1, 2, -3).
\end{aligned}
$$

Esta família é LI. Para provar isso, precisamos mostrar que a única solução de

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0_3$$

é $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

A equação

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0_3$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

A única solução deste sistema é $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, como queríamos demonstrar.

As funções

$$k(x) = 2^x, \quad p(x) = x^2 \quad \text{e} \quad c(x) = \cos(\pi x)$$

são linearmente independentes (em $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$).
Suponha α, β, γ são tais que

$$\alpha k + \beta p + \gamma c = 0$$

ou seja,

$$\alpha k(x) + \beta p(x) + \gamma c(x) = 0$$

$$\alpha 2^x + \beta x^2 + \gamma \cos(\pi x) = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$\alpha 2^x + \beta x^2 + \gamma \cos(\pi x) = 0$$

Sabemos que exponenciais crescem mais rápido do que polinomiais, e que $\cos(\pi x)$ é limitada.

Caso α fosse $\neq 0$, teríamos

$$2^x + \frac{\beta}{\alpha} x^2 + \frac{\gamma}{\alpha} \cos(\pi x) = 0 \qquad (\star)$$

Para x muito grande, o fato acima diz que

$$2^x \gg -\frac{\beta}{\alpha} x^2 + \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right| > -\frac{\beta}{\alpha} x^2 - \frac{\gamma}{\alpha} \cos(\pi x)$$

logo

$$2^x + \frac{\beta}{\alpha} x^2 + \frac{\gamma}{\alpha} \cos(\pi x) \gg 0,$$

contradizendo $(\star)$.

Portanto $\alpha = 0$, e

$$\beta x^2 + \gamma \cos(\pi x) = 0$$

Sabemos que polinomiais não constantes crescem "para infinito".

Caso β fosse $\neq 0$, teríamos

$$x^2 + \frac{\gamma}{\beta}\cos(\pi x) = 0 \qquad (\triangle)$$

Para x muito grande, o fato acima diz que

$$x^2 \gg \left|\frac{\gamma}{\beta}\right| > -\frac{\gamma}{\beta}\cos(\pi x)$$

logo

$$x^2 + \frac{\gamma}{\beta}\cos(\pi x) \gg 0,$$

contradizendo $(\triangle)$.

Portanto $\alpha = 0$ e também $\beta = 0$, e

$$\gamma \cos(\pi x) = 0$$

para todo x, o que implica que $\gamma = 0$ (caso contrário, teríamos $\cos(\pi x) = 0$, o que não é verdade).

Concluímos que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$$\alpha 2^x + \beta x^2 + \gamma \cos(\pi x) = 0. \tag{$\heartsuit$}$$

Use a equação acima com distintos valores de x:

$$\begin{aligned}
x = 0 \quad &\longrightarrow \quad \alpha \cdot 2^0 + \beta \cdot 0^2 + \gamma \cos(\pi \cdot 0) = 0 \\
&\qquad\qquad \alpha + \gamma = 0 \\
x = 1 \quad &\longrightarrow \quad \alpha \cdot 2^1 + \beta \cdot 1^2 + \gamma \cos(\pi \cdot 1) = 0 \\
&\qquad\qquad 2\alpha + \beta - \gamma = 0 \\
x = 2 \quad &\longrightarrow \quad \alpha \cdot 2^2 + \beta \cdot 2^2 + \gamma \cos(\pi \cdot 2) = 0 \\
&\qquad\qquad 4\alpha + 4\beta + \gamma = 0
\end{aligned}$$

$$\alpha 2^x + \beta x^2 + \gamma \cos(\pi x) = 0.. \qquad (\heartsuit)$$

Com $x = 0, 1, 2$, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \alpha & & & + & \gamma & = & 0 \\ 2\alpha & + & \beta & - & \gamma & = & 0 \\ 4\alpha & + & 4\beta & + & \gamma & = & 0, \end{cases}$$

cuja única solução é $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Teorema

Sejam $v_1, \dots, v_n$ vetores de $\mathbb{R}^m$, onde $n \leq m$
Considere a matriz $m \times n$

$$C = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

cujas colunas são os vetores $v_1, \dots, v_n$. São equivalentes:

1. *$v_1, \dots, v_n$ são linearmente independentes;*
2. *A forma escalonada reduzida de C tem n pivôs;*
3. *A forma escalonada reduzida de C tem n linhas não-nulas.*

3. A forma escalonada reduzida de C tem n linhas não-nulas.

$$\text{FormaEscalonadaReduzida}(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{*\times n} \end{bmatrix}$$

Independência linear em $\mathbb{R}^m$

Vamos escrever

$$\begin{aligned} v_1 &= (v_{11}, v_{21}, \ldots, v_{m1}) \\ v_2 &= (v_{12}, v_{22}, \ldots, v_{m2}) \\ &\vdots \\ v_n &= (v_{1n}, v_{2n}, \ldots, v_{mn}). \end{aligned}$$

($v_{ij} = i$-ésima coordenada do j-ésimo vetor). A equação

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = 0_n$$

é equivalente ao sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 v_{11} & + & x_2 v_{12} & + & \cdots & + & x_n v_{1n} & = & 0 \\ x_1 v_{21} & + & x_2 v_{22} & + & \cdots & + & x_n v_{2n} & = & 0 \\ & & & & & & & \vdots & \\ x_1 v_{m1} & + & x_2 v_{m2} & + & \cdots & + & x_n v_{mn} & = & 0, \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x_1 v_{11} & + & x_2 v_{12} & + & \cdots & + & x_n v_{1n} & = & 0 \\ x_1 v_{21} & + & x_2 v_{22} & + & \cdots & + & x_n v_{2n} & = & 0 \\ & & & & & & & \vdots & \\ x_1 v_{m1} & + & x_2 v_{m2} & + & \cdots & + & x_n v_{mn} & = & 0. \end{cases}$$

A matriz associada é

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = C.$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i v_i = 0_V \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 v_{11} & + & \cdots & + & x_n v_{1n} & = & 0 \\ & & & & & \vdots & \\ x_1 v_{n1} & + & \cdots & + & x_n v_{nn} & = & 0. \end{array} \right. \qquad (*)$$

Da Geometria Analítica, sabemos que

$v_1, \dots, v_n$ são LI $\iff$ a única solução de $(*)$ é $x_1 = \cdots = x_n = 0$
$\iff$ a forma escalonada (reduzida) da matriz de coeficientes C tem n pivôs.

Independência linear em $\mathbb{R}^m$

Teorema

Sejam $v_1, \ldots, v_n$ vetores de $\mathbb{R}^n$ (o mesmo tanto de vetores do que a dimensão do espaço!).

Considere a matriz

$$C = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

cujas colunas são os vetores $v_1, \ldots, v_n$. São equivalentes:

1. *$v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes;*
2. *A forma escalonada reduzida de C é a matriz identidade $n \times n$;*
3. *C é inversível;*
4. $\det(C) \neq 0$.

Independência linear em $\mathbb{R}^m$

Teorema

Sejam $v_1, \ldots, v_n$ *vetores de* $\mathbb{R}^n$*. Considere:*

- C*: A matriz cujas colunas são* $v_1, \ldots, v_n$.
- L*: A matriz cujas linhas são* $v_1, \ldots, v_n$.

Note que $L = C^T$*. São equivalentes:*

1. $v_1, \ldots, v_n$ *são linearmente independentes;*
2. C *é inversível;*
3. *A forma escalonada reduzida de* C *é a matriz identidade;*
4. $\det(C) \neq 0$.
5. L *é inversível;*
6. *A forma escalonada reduzida de* L *é a matriz identidade;*
7. $\det(L) \neq 0$

Independência linear em $\mathbb{R}^m$

"É só botar os vetores nas linhas e escalonar?!"

NÃO (do jeito que está). Os vetores $(1,0), (0,1), (1,1)$ são LD, mas a forma escalonada da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que tem dois pivôs.

Fato (sem prova por enquanto)

As linhas de uma matriz são LI se, e somente se, a forma escalonada reduzida não tem linhas nulas.

Os vetores

$$(1,2,-1), \quad (4,1,0), \quad \text{e} \quad (2,-3,2)$$

são LD, pois

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = (2+12+0)-(-2+16+0)=0.$$

Mas os vetores

$$(1,2,-1), \quad (4,1,0), \quad \text{e} \quad (2,-3,3)$$

são LI, pois

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = (3+12+0)-(-3+16+0)=2.$$

Teorema

Vetores $v_1, \ldots, v_n \in V$ vetores de um espaço vetorial de um espaço vetorial V são linearmente dependentes se, e somente se, um dos v_i é combinação linear dos outros.

(SE)

SE um vetor v_i é combinação linear dos outros, então

$$v_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j v_j,$$

logo

$$v_i + \sum_{j \neq i} (-\lambda_j) v_j = 0_V$$

é uma combinação linear nula dos vetores com coeficientes não todos nulos. Portanto $v_1, \ldots, v_n$ é LD.

Teorema

Vetores $v_1, \ldots, v_n \in V$ vetores de um espaço vetorial de um espaço vetorial V são linearmente dependentes se e somente se, um dos v_i é combinação linear dos outros.

(SOMENTE SE)

Por outro lado, se $v_i, \ldots, v_n$ são LD, então pode-se encontrar uma combinação linear da forma

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_V,$$

onde os λ_i não são todos nulos ao mesmo tempo.
Escolha J tal que $\lambda_J \neq 0$. Então

$$v_J = \sum_{i \neq J} -\frac{\lambda_i}{\lambda_J} v_i,$$

portanto v_J é combinação linear dos outros v_i.

E famílias infinitas?

Definição

$S \subseteq V$ é:

- **linearmente dependente (LD)**, se algum subconjunto finito de S é LD, ou se pudermos escrever
$$0_V = \sum_{s \in S} \lambda_s \cdot s$$
com λ_s não todos nulos.
- **linearmente independente (LI)**, se todo subconjunto finito de S é LI, ou se a equação
$$0_V = \sum_{s \in S} \lambda_s \cdot s$$
só tem solução $\lambda_s = 0$ para todo $s \in S$.