Transformações lineares

Álgebra Linear – Videoaula 9

Luiz Gustavo Cordeiro

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Transformações lineares são funções que **preservam** toda a estrutura de espaço vetorial.

Definição

Sejam V e W espaços vetoriais. Uma função $T\colon V \to W$ é uma **transformação linear** se

- $T(u+v) = T(u) + T(v)$ para todos $u, v \in V$;
- $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ para todos $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in V$.

(Dizemos que T *preserva* a soma e a multiplicação por escalar.)

A função **identidade**

$$\mathrm{id}_V \colon V \to V, \qquad \mathrm{id}_V(v) = v$$

é linear: para todos $v, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $\mathrm{id}_V(v + w) = v + w$
  $= \mathrm{id}_V(v) + \mathrm{id}_V(w)$
- $\mathrm{id}_V(\lambda v) = \lambda v$
  $= \lambda\, \mathrm{id}_V(v)$

Se V, W são espaços vetoriais, a **função nula**

$$\mathbf{0}\colon V \to W, \qquad \mathbf{0}(v) = 0_W$$

é linear: Para todos $v, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $$\begin{aligned}\mathbf{0}(v+w) &= 0_W \\ &= 0_W + 0_W \\ &= \mathbf{0}(v) + \mathbf{0}(w)\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\mathbf{0}(\lambda v) &= 0_W \\ &= \lambda 0_W \\ &= \lambda \mathbf{0}(v)\end{aligned}$$

Se V é um espaço vetorial e α é um escalar fixo, então a função

$$M = M_\alpha \colon V \to V, \qquad M(v) = \alpha v$$

é linear: para todos $v, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $$\begin{aligned} M(v+w) &= \alpha(v+w) \\ &= \alpha v + \alpha w \\ &= M(v) + M(w) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} M(\lambda v) &= \alpha(\lambda v) \\ &= (\alpha\lambda)v \\ &= (\lambda\alpha)v \\ &= \lambda(\alpha v) \\ &= \lambda M(v) \end{aligned}$$

E as funções da forma

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = ax + b?$$

Não são lineares (para $b \neq 0$)!

$$f(x+y) = a(x+y) + b \qquad \Bigg| \qquad \begin{aligned} f(x) + f(y) &= (ax+b) + (ay+b) \\ &= a(x+y) + 2b \end{aligned}$$

E.g. $f(0+0) = f(0) = b$ mas $f(0) + f(0) = 2b$.

Teorema

Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. Então

1. $T(0_V) = 0_W$;
2. $T(-v) = -T(v)$ *para todo* $v \in V$

1. $$\begin{aligned} T(0_V) &= T(0 \cdot 0_V) \\ &= 0 \cdot T(0_V) \\ &= 0_W \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} T(-v) &= T((-1) \cdot v) \\ &= (-1) \cdot T(v) \\ &= -T(v) \end{aligned}$$

Teorema

Uma função $F\colon V \to W$ entre dois espaços vetoriais é linear se, e somente se,

$$F(u + \lambda v) = F(u) + \lambda F(v)$$

para todos $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se F é linear, então

$$\begin{aligned} F(u + \lambda v) &= F(u) + F(\lambda v) && (F \text{ preserva somas}) \\ &= F(u) + \lambda F(v) && (F \text{ preserva multiplicação}) \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que

$$F(u + \lambda v) = F(u) + \lambda F(v) \qquad (\star)$$

para todos $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $$\begin{aligned} F(0_V) &= F(0_V + 1 \cdot 0_V) \\ &= F(0_V) + 1 \cdot F(0_V) \quad \text{(por } (\star) \text{ com } u = v = 0_V,\ \lambda = 1) \\ &= 2F(0_V). \end{aligned}$$

   Portanto, $F(0_V) = 0_W$.

Suponha que

$$F(u+\lambda v) = F(u) + \lambda F(v) \qquad (\star)$$

para todos $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $F(0_V) = 0_W$. ($\checkmark$)
2. $$\begin{aligned} F(u+v) &= F(u+1\cdot v) \\ &= F(u) + 1F(v) \quad \text{(por } (\star) \text{ com } \lambda = 1\text{)} \\ &= F(u) + F(v) \end{aligned}$$

Suponha que

$$F(u + \lambda v) = F(u) + \lambda F(v) \qquad (\star)$$

para todos $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $F(0_V) = 0_W$. ($\checkmark$)
2. $F(u + v) = F(u) + F(v)$. ($\checkmark$)
3. $$\begin{aligned} F(\lambda v) &= F(0_V + \lambda v) \\ &= F(0_V) + \lambda F(v) \quad \text{(por } (\star) \text{ com } u = 0_V) \\ &= 0_W + \lambda F(v) \quad \text{(por (1))} \\ &= \lambda F(v) \end{aligned}$$

Se $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $p \in \mathbb{N}$, então

$$L_A\colon\ \mathrm{M}_{n\times p}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$$

$$L_A(M) = AM$$

é linear

$$\begin{aligned} L_A(M+\lambda N) &= A(M+\lambda N) \\ &= AM + A(\lambda N) \\ &= AM + \lambda(AN) \\ &= L_A(M) + \lambda L_A(N). \end{aligned}$$

Para $p = 1$: Se $A \in \mathrm{M}_{m\times n}$,

$$L_A\colon\ \mathrm{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$$

i.e.,

$$L_A\colon \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{m\times 1}, \qquad L_A\begin{pmatrix} \vert \\ x \\ \vert \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \vert \\ x \\ \vert \end{pmatrix}$$

é linear.

Se quisermos escrever vetores de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ como linhas:

Se $A = \left[a_{ij}\right]_{i,j} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned} L_A(x_1, \ldots, x_n) &\cong \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \end{bmatrix} \\ &\cong \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j, \ldots, \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \right) \end{aligned}$$

A função

$$T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$$

$$T(x,y,z,w) = (3x + y - 2z + w, x - z + w)$$

é linear, pois

$$T = L_A$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Seja $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. A função

$$E\colon \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, \qquad E(f) = f(-2)$$

é linear: Para todas $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $E(f+g) = (f+g)(-2) = f(-2) + g(-2) = E(f) + E(g)$
- Similarmente, $E(\lambda f) = \lambda f(-2) = \lambda E(f)$.

Sejam

- $\mathbb{R}^{[0,1]}$ os espaço vetorial das funções reais sobre o intervalo $[0,1]$.
- $C[0,1]$ o subespaço de $\mathbb{R}^{[0,1]}$ consistindo das funções contínuas.
- $C^1[0,1]$ o subespaço de $C[0,1]$ consistindo das funções diferenciáveis com derivada contínua.

A transformação de "diferenciação"

$$D\colon C^1[0,1] \to C[0,1], \qquad D(f) = f'$$

é linear.

Dadas $f, g \in C^1[0,1]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos, para todos $x \in [0,1]$,

- $$\begin{aligned} D(f+\lambda g)(x) &= (f+\lambda g)'(x) \\ &= f'(x) + \lambda g'(x) \\ &= D(f)(x) + \lambda D(g)(x) \\ &= (D(f) + \lambda D(g))(x). \end{aligned}$$

  Portanto, $D(f+\lambda g) = D(f) + \lambda D(g)$.

Definimos
$$\mathcal{R}\colon C[0,1] \to C^1[0,1],$$
onde, para $f \in C[0,1]$, $\mathcal{R}(f) \in C^1[0,1]$ é dada por
$$\mathcal{R}(f)|_x = \mathcal{R}(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$$
para qualquer $x \in [0,1]$.
Então $\mathcal{R}$ é linear.

- $$\begin{aligned}\mathcal{R}(f+\lambda g)(x) &= \int_0^x (f+\lambda g)(t)dt \\ &= \int_0^x (f(t)+\lambda g(t))dt \\ &= \left(\int_0^x f(t)dt\right) + \lambda \left(\int_0^x g(t)dt\right) \\ &= \mathcal{R}(f)(x) + \lambda \mathcal{R}(g)(x) \\ &= (\mathcal{R}(f) + \lambda \mathcal{R}(g))(x)\end{aligned}$$

  Portanto, $\mathcal{R}(f+\lambda g) = \mathcal{R}(f) + \lambda \mathcal{R}(g)$

Teorema (Teorema Fundamental do Cálculo)

$D(\mathcal{R}(f)) = f$ *para toda* $f \in C[0,1]$.

A função

$$\mathsf{I}\colon C[0,1] \to \mathbb{R}, \qquad \mathsf{I}(f) = \int_0^1 f(t)dt$$

é linear.

A função

$$p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad p(x) = x^2 + 1$$

não é linear

$$\begin{aligned} p(x+y) &= (x+y)^2 + 1 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + 1 \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} p(x) + p(y) &= x^2 + 1 + y^2 + 1 \\ &= x^2 + y^2 + 2 \end{aligned}$$

Tome $x = y = 0$:

$$p(0+0) = p(0) = 1 \qquad \text{mas} \qquad p(0) + p(0) = 1 + 1 = 2$$

Similarmente,

$$p(\lambda x) = \lambda^2 x^2 + 1, \qquad \lambda p(x) = \lambda x^2 + \lambda$$

ara $\lambda = x = 0$,

$$p(0 \cdot 0) = p(0) = 1, \qquad \text{mas} \qquad 0 \cdot p(0) = 0.$$

A função p não preserva nem somas nem produto por escalar!

A função

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y}, & \text{se } y \neq 0 \\ 0, & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

não é linear.

- $f(\lambda(x,y)) = f(\lambda x, \lambda y)$

$$= \begin{cases} \dfrac{(\lambda x)^2}{(\lambda y)} & \text{se } \lambda y \neq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} \lambda \cdot \dfrac{x}{y} & \text{se } \lambda = 0 \text{ ou } y = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lambda \cdot \dfrac{x}{y} & \text{se } y = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \lambda f(x,y).$$

Mas para $y, z, y+z \neq 0$,

$$f(x,y) + f(w,z) = \frac{x^2}{y} + \frac{w^2}{z} = \frac{x^2 z + w^2 y}{yz},$$

mas

$$f((x,y)+(w,z)) = f(x+w, y+z) = \frac{(x+w)^2}{y+z}$$

As expressões são diferentes, em geral. amos achar um caso expícito onde elas diferem: $y = z = 1$, $x = 0$, $w = 1$.

$$f(0,1) + f(1,1) = \frac{0^2}{1} + \frac{1^2}{1} = 1$$

$$f((0,1)+(1,1)) = f(1,2) = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

f preserva o produto por escalar, mas não a soma.

Fato

Existem funções em $\mathbb{R}$ que preservam a soma mas não preservam o produto por escalar.

(Mas não existe nenhuma fórmula que define tal função.)

Teorema

Se duas transformações lineares
Sejam $T, S\colon V \to W$ *duas transformações lineares e* G *um conjunto gerador de* V*.*
Se $T(g) = S(g)$ *para todo* $g \in G$*, então* $T = S$

Em termos mais simples, para verificar que duas transformações lineares são iguais, basta verificar em um conjunto gerador.

Supomos $T(g) = S(g)$ para todo $g \in G$ (gerador).

Dado $v \in V$, temos

$$v = \sum_{g \in G} \lambda_g \cdot g$$

para certos $\lambda_g \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned} T(v) &= T\left(\sum_{g \in G} \lambda_g \cdot g\right) \\ &= \sum_{g \in G} T(\lambda_g \cdot g) \\ &= \sum_{g \in G} \lambda_g T(g) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} S(v) &= S\left(\sum_{g \in G} \lambda_g \cdot g\right) \\ &= \sum_{g \in G} S(\lambda_g \cdot g) \\ &= \sum_{g \in G} \lambda_g S(g) \end{aligned}$$

Assim,

$$T(v) = \sum_{g \in G} \lambda_g T(g) = \sum_{g \in G} \lambda_g S(g) = S(v),$$

qualquer que seja $v \in V$.

Teorema

Sejam V e W espaços vetoriais, $\mathcal{B}$ uma base de V e $f\colon \mathcal{B} \to W$ uma função.

Então existe uma única transformação linear $F\colon V \to W$ que estende f, no sentido de que $F(b) = f(b)$ para todo $b \in \mathcal{B}$.

Unicidade segue do teorema anterior.

Vamos assumir $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$. (O caso de dimensão finita é completamente análogo)

Dado $v \in V$, há um único modo de se escrever

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \\ &= \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n \end{aligned}$$

Defina

$$\begin{aligned} F(v) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(b_i) \\ &= \lambda_1 f(b_1) + \cdots + \lambda_n f(b_n). \end{aligned}$$

Há duas propriedades a serem verificadas.

- F estende f: se $b = b_i \in \mathcal{B}$, então

$$\begin{aligned} b &= 0b_1 + \cdots + 0b_{i-1} + 1b_i + 0b_{i+1} + \cdots + 0b_n \\ &= 1b_i + \sum_{j \neq i} 0b_j \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned} F(b) &= 0f(b_1) + \cdots + 0f(b_{i=1}) + 1f(b_i) + 0f(b_{i+1}) + \cdots + 0f(b_n) \\ &= 1f(b_i) + \sum_{j \neq i} 0f(b_j) \\ &= f(b_i) \\ &= f(b) \end{aligned}$$

- F estende f. ($\checkmark$)
- F é linear: Se

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$$
$$w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i$$
$$\lambda \in \mathbb{R},$$

então

$$v + \lambda w = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \lambda_i \beta_i) b_i$$

Transformações lineares

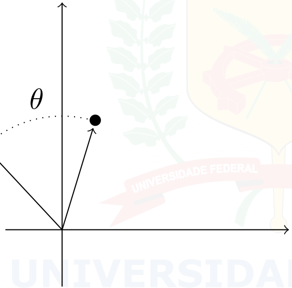
Estendendo funções em bases linearmente

$$v + \lambda w = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \lambda_i \beta_i) b_i$$

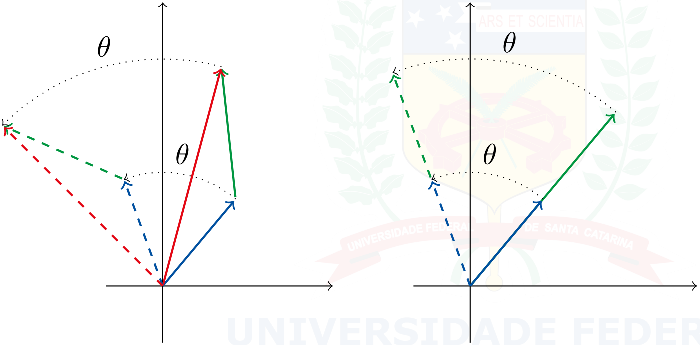
e portanto

$$\begin{aligned} F(v + \lambda w) &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \lambda \beta_i) f(b_i) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(b_i) \right) + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i f(b_i) \right) \\ &= F(v) + \lambda F(w). \end{aligned}$$

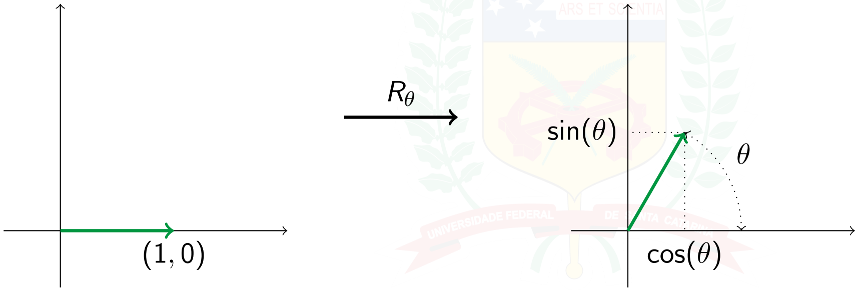
Dado $\theta \in \mathbb{R}$, consideremos a **rotação** de ângulo θ ao redor da origem, denotada R_θ:



R_θ é linear:

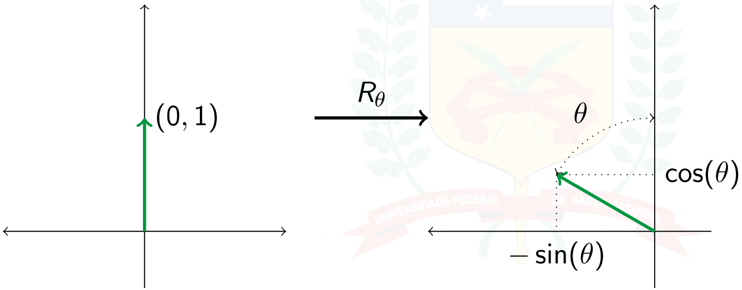


Como R_θ atua na base canônica de $\mathbb{R}^2$?



ou seja, $R_\theta(1,0) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$.

- $R_\theta(1,0) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$.



ou seja, $R_\theta(0,1) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$.

Estendendo funções em bases linearmente

- $R_\theta(1,0) = (\cos(\theta), \sin(theta))$.
- $R_\theta(0,1) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$.
- $$\begin{aligned} R_\theta(x,y) &= R_\theta(x(1,0) + y(0,1)) \\ &= xR_\theta(1,0) + yR_\theta(0,1) \\ &= x(\cos(\theta), \sin(\theta)) + y(-\sin(\theta), \cos(\theta)) \\ &= (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta)) \end{aligned}$$

Portanto, R_θ é a transformação associada à **matriz de rotação**

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Tipos especiais de transformações lineares

- transformações lineares $=$ funções lineares
  $=$ aplicações lineares
  $=$ "mapas" lineares
- $T\colon V \to V$ linear (mesmo domínio e contradomínio) é às vezes chamado de **operador** linear.
- Às vezes "operador" é usado como sinônimo de "função"
- $T\colon V \to \mathbb{R}$ linear é chamado **funcional**.