

Somatórios

Álgebra Linear – Videoaula complementar 2

Luiz Gustavo Cordeiro



Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Somatórios

A letra “sigma”



Um exemplo

Qual o valor da soma?

$$1 + 2 + 4 + \dots + 16$$

Temos que descobrir qual a regra que define os termos dessa soma.

- A regra pode ser “dobre o termo anterior”:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$$

$\underbrace{\quad}_{\times 2}$ $\underbrace{\quad}_{\times 2}$ $\underbrace{\quad}_{\times 2}$ $\underbrace{\quad}_{\times 2}$

- A regra também poderia ser “some 1, depois 2, depois 3, depois 4, ...”

$$1 + 2 + 4 + 7 + 11 + 16 = 41$$

$\underbrace{\quad}_{+1}$ $\underbrace{\quad}_{+2}$ $\underbrace{\quad}_{+3}$ $\underbrace{\quad}_{+4}$ $\underbrace{\quad}_{+5}$

Reticências não são precisas!

Regra geradora

Quando sabemos a “regra” que cria os elementos da sequência, podemos deixá-la explícita:

$$1 + 2 + \cdots + 2^n + \cdots + 16$$

Os termos da soma são as potências de 2.



UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Regra geradora

Mas e se fosse

$$3 + 6 + \dots + (2n^3 - 9n^2 + 10n + 3) + \dots + 1203?$$

Qual o “ n ” inicial? Qual o “ n ” inicial?

n	0	1	2	3	4	...	10
$2n^3 - 9n^2 + 10n + 3$	3	6	3	6	27	...	1203

Começa em $n = 0$ ou $n = 2$?

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Utilizamos a letra “ Σ ” para denotar “soma”:

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n$$

- i : variável
- a_i : “regra” de formação do i -ésimo termo
- m : onde a soma inicia
- n : onde a soma termina



UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Somatórios

Exemplo

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^4 2^i &= 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \\ &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 \\ &= 31\end{aligned}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Somatórios

Exemplo

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{10} (2k^3 - 9k^2 + 10k + 3) &= (2 \cdot 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 10 \cdot 0 + 3) \\ &+ (2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 + 3) \\ &+ (2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 + 3) \\ &\dots \\ &+ (2 \cdot 10^3 - 9 \cdot 10^2 + 10 \cdot 1 + 3) \\ &= 3 + 6 + 3 + \dots + 1203 \\ &= 3168.\end{aligned}$$

Somatórios

Propriedades de somatórios

- $\sum_{i=1}^n 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$

- $\sum_{i=0}^n 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n + 1$

- $\sum_{i=m}^{m+1} 1 = 1 + 1 = 2$

- $\sum_{i=m}^n 1 = n - m + 1.$



UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Somatórios

Propriedades de somatórios

$$\bullet \sum_{i=m}^n (ca_i) = c \left(\sum_{i=m}^n a_i \right)$$

$$\bullet \sum_{i=m}^n (a_i + b_i) = (a_m + b_m) + \cdots + (a_n + b_n)$$

$$= (a_m + \cdots + a_n) + \cdots + (b_m + \cdots + b_n)$$

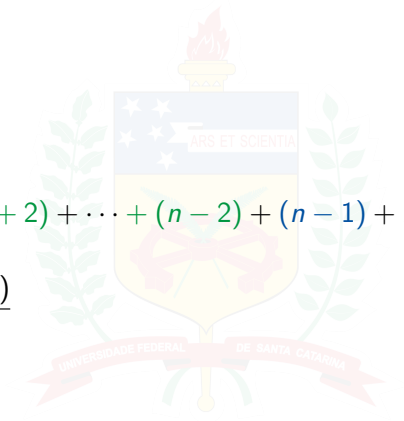
$$= \left(\sum_{i=m}^n a_i \right) + \left(\sum_{i=m}^n b_i \right)$$

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Somatórios

Exemplos

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{j=m}^n j &= m + (m+1) + (m+2) + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\ &= \frac{(m+n)(n-m+1)}{2} \end{aligned}$$



UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Somatórios

Exemplos

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{j=m}^n r^j &= \sum_{j=m}^n r^j \frac{(1-r)}{(1-r)} \\ &= \frac{\sum_{j=m}^n r^j (1-r)}{(1-r)} \\ &= \frac{\sum_{j=m}^n (r^j - r^{j+1})}{(1-r)} \\ &= \frac{(r^m - r^{m+1}) + (r^{m+1} - r^{m+2}) + \cdots + (r^{n-1} + r^n) + (r^n - r^{n+1})}{(1-r)} \\ &= \frac{r^m - r^{n+1}}{(1-r)} \end{aligned}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Somatórios

Troca de variáveis

Se p é um número e $a_i = b_{i+p}$

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^n a_i &= a_m + \cdots + a_n \\ &= b_{m+p} + \cdots + b_{n+p} \\ &= \sum_{j=m+p}^{n+p} b_j \\ &= \sum_{j=m+p}^{n+p} a_{j-p}\end{aligned}$$

Somatórios

Troca de variáveis

Mais simples: Pondo $j = i + p$, temos

- $j = m + p$ quando $i = m$;
- $j = n + p$ quando $i = n$;
- $i = j - p$

e assim

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{j=m+p}^{n+p} a_{j-p}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

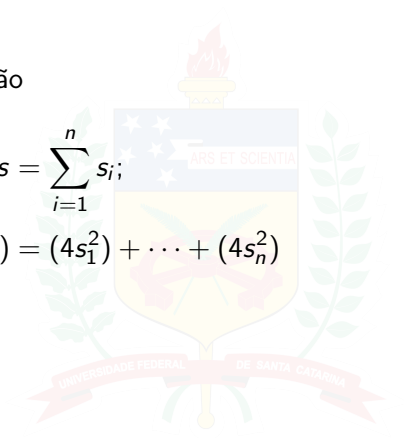
- Se $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, então

$$\sum_{s \in S} s = \sum_{i=1}^n s_i;$$

$$\sum_{s \in S} (4s^2) = (4s_1^2) + \dots + (4s_n^2)$$

- $\sum_{s \in \emptyset} s = 0$

- $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n.$



UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA