



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

SUMÁRIO

Requerente(s): **Prof^ª. Camila Aparecida Benedito Rodrigues de Lima**
Título do Projeto: **Curvas Invariantes e Ciclos Limites em Sistemas Diferenciais**
Assunto: **Relatório Final de Projeto de Pesquisa.**



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Relatório Final em aprovação

Número: 201903629

1. Título:

Curvas Invariantes e Ciclos Limites em Sistemas Diferenciais

2. Resumo:

Sistemas diferenciais aparecem na modelagem de muitos fenômenos naturais em diferentes ramos da ciência, em aplicações biológicas e físicas, entre outras áreas. Eles geralmente possuem curvas invariantes, o que nos permite obter uma melhor descrição do comportamento qualitativo de suas soluções. Tais curvas invariantes podem ser algébricas ou não e, no caso de serem fechadas, isoladas no conjunto de órbitas periódicas e sem pontos singulares, são chamadas de ciclos limites. Há um problema muito famoso, proposto por David Hilbert em 1900, que questiona o número máximo de ciclos limites que os sistemas diferenciais polinomiais de um determinado grau poderiam apresentar.

Mesmo após centenas de estudos sobre os retratos de fase dos campos vetoriais reais planares e quadráticos, a caracterização completa de seus retratos de fase é uma tarefa bastante complexa. Eles dependem de doze parâmetros e após transformações afins e reescalamento de tempo, temos famílias com cinco parâmetros, o que ainda é um grande número. Assim muitas subclasses tem sido consideradas em vez do sistema completo. Neste projeto propomos investigar condições sob os parâmetros de um sistema planar quadrático de modo que ele apresente uma curva algébrica invariante de grau 3 (curva cúbica) e um invariante de Darboux e obter todos os seus retratos de fase não equivalentes. Além disso, motivados pelo crescente interesse na teoria dos campos de vetores suaves por partes, pretende-se investigar o número de órbitas periódicas que tais campos podem apresentar. Para este estudo, usaremos a teoria do averaging, juntamente com a redução de Lyapunov-Schmidt, em uma determinada classe de sistemas suaves por partes.

Palavras-chave:

Curva Algébrica Invariante; Invariante de Darboux; Método do Averaging; Sistemas Suaves por Partes; Redução de Lyapunov-Schmidt;

3. Coordenador:

Nome: Camila Aparecida Benedito Rodrigues de Lima

Departamento: MTM/CFM - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA / MTM/CFM

Tipo: Professor

Regime de Trabalho: DE

Valor Mensal: Sem remuneração

Forma de Remuneração: Sem bolsa

Carga Horária Semanal: 20.00h

4. Entidades Participantes:

Financiadores:

Valor Total: R\$ 0,00

Fundações:

Tipo de Instrumento Contratual: Não será celebrado instrumento jurídico com a UFSC.

5. Período:

Previsão de Início: 01/03/2019

Início Efetivo: 01/03/2019

Duração: 26 Meses

Término: 01/05/2021

Aprovação: 08/04/2019



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Relatório Final em aprovação

Número: 201903629

6. Área do Projeto:

Grande Área do Conhecimento: CIENCIAS EXATAS E DA TERRA

Área do Conhecimento: MATEMATICA

Subárea do conhecimento:ANALISE

Grupo de Pesquisa:

7. Comitê de Ética:

Não se aplica;



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Relatório Final em aprovação

Número: 201903629

8. Equipe do Projeto:

CPF / Nome	Tipo	Período	Depto/Curso	Valor Mensal / Valor Total	Teto Excedid	Carga Hora. Semanal	Paad	Situação
Camila Aparecida Benedito Rodrigues de Lima 367.200.528-29	Professor Coordenador	01/03/2019 à 01/05/2021	MTM/CFM - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA / MTM/CFM	R\$ 0,00 / R\$ 0,00		20.00h	Sim	Aprovado

Número total de participantes na equipe do projeto: 1

0 externos à UFSC (0,00%)

1 vinculados à UFSC (100,00%)



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Relatório Final em aprovação

Número: 201903629

9. Financiamento:

Não se aplica.

10. Propriedade Intelectual:

Não se aplica.

11. Relatório Final:

Data efetiva de término: 01/05/2021

Tipo		Descrição
Produção técnica	Trabalhos técnicos	Artigo publicado em periódico
Produção técnica	Trabalhos técnicos	Artigo publicado em periódico

Receita total (inclui rendimento): R\$ 0,00

Despesa realizada: R\$ 0,00

Saldo: R\$ 0,00

Após dois anos de projeto, resultados importantes foram alcançados, como podemos ver nos artigos publicados.

Sobre o estudo de órbitas periódicas em sistemas descontínuos conseguimos estender a técnica de usar a Redução de Lyapunov--Schmidt junto com o averaging para uma grande classe de sistemas. Com nosso trabalho, uma variedade de outros problemas pode ser investigada a partir de agora.

Em termos de classificação de sistemas polinomiais planares, conseguimos uma caracterização completa (com formas normais e retratos de fase) de todos os sistemas de grau 2 com cúbricas invariantes e invariantes de Darboux. Como consequência deste trabalho, podemos começar a investigar uma generalização, que trataria da classificação (via formas normais) de sistemas planares de grau n , com n ≥ 3 .

12. Movimentações:

Data	Responsável	Ação	Notificados	Comentários
27/03/2019 - 18:04h	Camila Aparecida Benedito Rodrigues de Lima	Criou o projeto		
27/03/2019 - 22:09h	Camila Aparecida Benedito Rodrigues de Lima	Enviou o projeto para aprovação	Cleverson Roberto da Luz	Durante o processo para anexar o projeto tive dificuldades para colocar a carga horária de 20 horas semanais, pois o sistema não aceitava. Acredito ter conseguido colocar, dado que agora consigo enviar o projeto para aprovação.
28/03/2019 - 09:09h	Cleverson Roberto da Luz	Solicitou alterações	Camila Aparecida Benedito Rodrigues de Lima	Alterar período
28/03/2019 - 09:15h	Camila Aparecida Benedito Rodrigues de Lima	Reenviou o projeto para aprovação	Cleverson Roberto da Luz	
28/03/2019 - 16:47h	Cleverson Roberto da Luz	Aprovou o projeto	Aldrovando Luis Azeredo Araujo	Aprovado Ad-referendum
08/04/2019 - 15:36h	Aldrovando Luis Azeredo Araujo	Aprovou o projeto	Camila Aparecida Benedito Rodrigues de Lima	
08/04/2019 - 17:15h	Camila Aparecida Benedito Rodrigues de Lima	Informou o início efetivo		
01/04/2021 - 06:00h		Prazo do projeto de pesquisa quase encerrado	Camila Aparecida Benedito Rodrigues de	



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Relatório Final em aprovação

Número: 201903629

Data	Responsável	Ação	Notificados	Comentários
			Lima, formulariopesquisa@cont ato.ufsc.br	
23/04/2021 - 20:22h	Camila Aparecida Benedito Rodrigues de Lima	Enviou relatório final para aprovação	Cleverson Roberto da Luz	

Relatório de Pesquisa-Curvas Invariantes e Ciclos Limites em Sistemas Diferenciais

Professora: Camila Aparecida Benedito Rodrigues de Lima

Carga horária: 20 horas semanais

Período: 01/03/2019 a 01/05/2021

Área de concentração: Sistemas dinâmicos e equações diferenciais

Florianópolis-SC

Brasil

Abril de 2021

Sumário

1	Resultados	3
2	Palestras	3
3	Certificados	4
4	Considerações Finais Sobre o Projeto	10

1 Resultados

O projeto *Curvas Invariantes e Ciclos Limites em Sistemas Diferenciais* possuía dois objetivos principais. Abaixo resumimos os resultados alcançados.

1) **Estudar os sistemas diferenciais polinomiais de grau 2 que possuem uma curva algébrica invariante de grau 3:**

Resultado: 1 artigo que está submetido a um periódico internacional.

- J. LLIBRE, R. D. S. OLIVEIRA AND C. A. B. RODRIGUES, *Quadratic systems with an invariant algebraic curve of degree 3 and a Darboux invariant*, submetido.

2) **Investigar condições para a existência de órbitas periódicas em sistemas não autônomos, definidos em \mathbb{R}^n , $n \geq 3$:**

Resultado: 2 artigos publicados em periódicos internacionais.

- J. LLIBRE, R. D. S. OLIVEIRA AND C. A. B. RODRIGUES, *Limit cycles for two classes of control piecewise linear differential systems*, São Paulo Journal of Mathematical Sciences (B_3).
- J. LLIBRE, D. D. NOVAES AND C. A. B. RODRIGUES, *Bifurcations from families of periodic solutions in piecewise differential systems*, Physica D: Nonlinear Phenomena (A_1).

2 Palestras

Durante o período, foram apresentadas duas palestras, tanto para divulgação dos resultados quanto para exposição da área de pesquisa aos interessados.

- Colóquio do Departamento de Matemática

Título: Sistemas quadráticos com cúbicas invariantes e um invariante de Darboux

Local: UFSC

Data: 24/05/2019

- Virtual Workshop on Dynamical Systems 2020

Título: Bifurcations of periodic solutions in piecewise differential systems

Local: Ribeirão Preto/SP, FFCLRP-USP (Edição virtual)

Data: 10/11/2020

3 Certificados

Nas próximas páginas encontram-se os certificados correspondentes às seções 1 e 2.

QUADRATIC SYSTEMS WITH AN INVARIANT ALGEBRAIC CURVE OF DEGREE 3 AND A DARBOUX INVARIANT

JAUME LLIBRE, REGILENE OLIVEIRA AND CAMILA RODRIGUES

Abstract.

Denote by QS the class of the non-degenerate planar quadratic differential systems and by QS_3 its subclass formed by the systems possessing an invariant cubic $f(x, y) = 0$. In this paper, using the action of the group of real affine transformations and time rescaling on the class QS , we obtain all the possible normal forms for the quadratic systems in QS_3 . Working with these normal forms we complete the characterization of the phase portraits in the Poincaré disc of all planar quadratic polynomial differential systems having an invariant cubic $f(x, y) = 0$ and a Darboux invariant of the form $f(x, y)e^{st}$, with $s \in \mathbb{R}$.

Keywords quadratic vector fields, algebraic invariant curve, Darboux invariant, global phase portrait

Mathematics Subject Classification (2010) 34C05 · 34A34 · 34C23

1. INTRODUCTION AND STATEMENTS OF THE RESULTS

Even after hundreds of studies on the topology of real planar quadratic vector fields the complete characterization of their phase portraits is a quite complex task. This family of systems depends on twelve parameters but, after affine transformations and time rescaling, we arrive at families with five parameters, which is still a big number of parameters. Many subclasses have been considered.

Denote by $\mathbb{R}[x, y]$ the ring of the real polynomials in the variables x and y . Consider the differential system in \mathbb{R}^2 given by

$$(1) \quad \dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y),$$

where $P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$. Here the dot denotes derivative with respect to the *time* t and the degree of system (1) is $m = \max\{\deg P, \deg Q\}$.

Jaume Llibre
Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, 08193 Bellaterra,
Barcelona, Catalonia, Spain
Email: jllibre@mat.uab.cat

Regilene Oliveira
Instituto de Ciências Matemáticas e Computação, Universidade de São Paulo,
Avenida Trabalhador São-carlense, 400, 13.560-970,
São Carlos, SP, Brazil,
Email: regilene@icmc.usp.br

Camila A. B. Rodrigues
Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, 88040-900,
Florianópolis, Santa Catarina, Brazil,
Email: c.r.lima@ufsc.br



Limit cycles for two classes of control piecewise linear differential systems

Jaume Llibre¹ · Regilene D. Oliveira² · Camila Ap. B. Rodrigues³

© Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo 2020

Abstract

We study the bifurcation of limit cycles from the periodic orbits of $2n$ -dimensional linear centers $\dot{x} = A_0x$ when they are perturbed inside classes of continuous and discontinuous piecewise linear differential systems of control theory of the form $\dot{x} = A_0x + \varepsilon(Ax + \phi(x_1)b)$, where ϕ is a continuous or discontinuous piecewise linear function, A_0 is a $2n \times 2n$ matrix with only purely imaginary eigenvalues, ε is a small parameter, A is an arbitrary $2n \times 2n$ matrix, and b is an arbitrary vector of \mathbb{R}^n .

Keywords Limit cycles · Discontinuous piecewise linear differential system · Bifurcation

Mathematics Subject Classification Primary 58F15 · 58F17; Secondary 53C35

1 Introduction and statement of the main results

In control theory it is relevant to study the *continuous piecewise linear differential systems* of the form

Communicated by Luiz Antonio Barrera San Martin.

✉ Regilene D. Oliveira
regilene@icmc.usp.br

Jaume Llibre
jllibre@mat.uab.cat

Camila Ap. B. Rodrigues
c.r.lima@ufsc.br

¹ Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, 08193 Bellaterra, Barcelona, Catalonia, Spain

² Department of Mathematic, ICMC-Universidade de São Paulo, Avenida Trabalhador São-carlense, 400, 13566-590 São Carlos, SP, Brazil

³ Department of Mathematic, UFSC-Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Universitário Trindade, 88040-900 Santa Catarina, SC, Brazil



Bifurcations from families of periodic solutions in piecewise differential systems

Jaume Llibre^a, Douglas D. Novaes^b, Camila A.B. Rodrigues^{c,*}

^a Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, 08193 Bellaterra, Barcelona, Catalonia, Spain

^b Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Rua Sérgio Buarque de Holanda, 651, Cidade Universitária Zeferino Vaz, 13083-859, Campinas, São Paulo, Brazil

^c Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, 88040-900, Florianópolis, Santa Catarina, Brazil

ARTICLE INFO

Article history:

Received 24 January 2019

Received in revised form 9 January 2020

Accepted 11 January 2020

Available online 17 January 2020

Communicated by S. Coombes

Keywords:

Lyapunov–Schmidt reduction

Periodic solution

Averaging method

Non-smooth differential system

Piecewise smooth differential system

ABSTRACT

Consider a differential system of the form

$$x' = F_0(t, x) + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i F_i(t, x) + \varepsilon^{k+1} R(t, x, \varepsilon),$$

where $F_i : \mathbb{S}^1 \times D \rightarrow \mathbb{R}^m$ and $R : \mathbb{S}^1 \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ are piecewise C^{k+1} functions and T -periodic in the variable t . Assuming that the unperturbed system $x' = F_0(t, x)$ has a d -dimensional submanifold of periodic solutions with $d < m$, we use the Lyapunov–Schmidt reduction and the averaging theory to study the existence of isolated T -periodic solutions of the above differential system.

© 2020 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction and statement of the main result

1.1. Introduction

The study of invariant sets, in special isolated periodic solutions, is very important for understanding the dynamics of a differential system. In the present study, we are concerned about isolated T -periodic solutions of non-autonomous differential systems written in the form

$$x' = F(t, x; \varepsilon) = F_0(t, x) + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i F_i(t, x) + \varepsilon^{k+1} R(t, x, \varepsilon), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times D. \quad (1)$$

Here, the prime denotes the derivative with respect to the independent variable t , all the functions are assumed to be T -periodic in t , D is an open subset of \mathbb{R}^m , and ε is a small parameter. In this regard, the averaging theory serves as an important tool to detect periodic solutions of (1). A classical introduction to the averaging theory can be found in [1,2].

There are many studies concerning the periodic solutions of system (1). As a fundamental hypothesis, it is usually assumed that the unperturbed system $x' = F_0(t, x)$ has a submanifold

of initial conditions $\mathcal{Z} \subset D$ whose orbits are T -periodic. These studies differ among them depending on the regularity of system (1) and on the dimension of \mathcal{Z} . In what follows, we shall quote some of them.

For the case $\dim(\mathcal{Z}) = m$, the classical averaging theory [1,2] provides sufficient conditions for the existence of periodic solutions of (1) assuming $F_0 = 0$ and some smoothness and boundedness conditions. In [3], the authors extended the former results up to $k = 2$ assuming weaker conditions on the regularity of system (1). In [4], the authors dropped the condition $F_0 = 0$ and developed the averaging theory at any order ($k \geq 1$ being an arbitrary integer) assuming the analyticity of the system (1). The analyticity condition was relaxed in [5] by means of topological methods. The averaging theory was also extended to non-smooth differential systems [6–10]. The study of non-smooth differential systems is important in many fields of applied sciences since many problems of physics, engineering, economics, and biology are modeled using differential equations with discontinuous right-hand side, see for instance [11–13]. Thus, there is natural interest in studying the periodic solutions of system (1) when it is not smooth.

For the case $\dim(\mathcal{Z}) < m$, the averaging theory by itself is not enough to analyze the periodic solutions of system (1) and other techniques need to be employed with it, such as the *Lyapunov–Schmidt reduction method*. In the case that F_i 's are smooth functions, we may quote the studies [14–17]. If the functions F_i are not smooth or even continuous, we have studies [8,18], where the authors analyzed some classes of these systems.

* Corresponding author.

E-mail addresses: jllibre@mat.uab.cat (J. Llibre), ddnovaes@unicamp.br (D.D. Novaes), c.r.lima@ufsc.br (C.A.B. Rodrigues).



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA
CAMPUS UNIVERSITÁRIO REITOR JOÃO DAVID FERREIRA LIMA - TRINDADE
CEP: 88040-900 - FLORIANÓPOLIS - SC
TELEFONE (048) 3721-9232
E-mail: ppgmtm@contato.ufsc.br

DECLARAÇÃO

Declaramos, para os devidos fins, que a Professora Dr.^a Camila Aparecida Benedito Rodrigues de Lima participou do Colóquio do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina para ministrar a seguinte palestra:

Título: *"Sistemas quadráticos com cúbicas invariantes e um invariante de Darboux"*.

Local: Auditório Airton Silva, Departamento de Matemática.

Data: dia 24 de maio de 2019.

Horário: 14h00min às 15h00min.

Por ser verdade, firmamos o presente.

Florianópolis, 24 de maio de 2019.

Prof. Dr. Marcelo Sobottka
Coordenador do Programa Pós-Graduação
em Matemática Pura e Aplicada
Portaria nº 1099/2018/GR - UFSC

Oficina Virtual de Sistemas Dinâmicos 2020
Virtual Workshop on Dynamical Systems 2020
Ribeirão Preto/SP, FFCLRP-USP (virtual edition)
November 09, 10 and 11, 2020

CERTIFICATE

We hereby certify that **Camila Rodrigues** participated in the “**Virtual Workshop on Dynamical Systems 2020**”, held *virtually* at Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto - FFCLRP/USP, from November 09 to 11, and presented the talk “*Bifurcation of periodic solutions in piecewise differential systems*” .

Official website of the event:

<https://sites.google.com/view/osd2020virtual/>

Ribeirão Preto, November 12, 2020.



Benito Pires
On behalf of the Organizing Committee

4 Considerações Finais Sobre o Projeto

Após dois anos de projeto, resultados importantes foram alcançados, como podemos ver nos artigos publicados.

Sobre o estudo de órbitas periódicas em sistemas descontínuos conseguimos estender a técnica de usar a Redução de Lyapunov–Schmidt junto com o averaging para uma grande classe de sistemas. Com nosso trabalho, uma variedade de outros problemas pode ser investigada a partir de agora.

Em termos de classificação de sistemas polinomiais planares, conseguimos uma caracterização completa (com formas normais e retratos de fase) de todos os sistemas de grau 2 com cúbicas invariantes e invariantes de Darboux. Como consequência deste trabalho, podemos começar a investigar uma generalização, que trataria da classificação (via formas normais) de sistemas planares de grau n , com $n \geq 3$.

