



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

SUMÁRIO

Requerente(s): **Prof. Ivan Pontual Costa e Silva**

Título do Projeto: **Rigidez e genericidade de singularidades na geometria Lorentziana**

Assunto: **Relatório Final de Projeto de Pesquisa.**



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Ativo

Número: 201805659

1. Título:

Rigidez e genericidade de singularidades na geometria Lorentziana

2. Resumo:

É bem sabido que a questão da incompletude geodésica de variedades Lorentzianas é bem mais complexa que sua contraparte Riemanniana. Por esta razão, até hoje, um dos aspectos distintivos da geometria Lorentziana é sua ênfase em obter condições suficientes (bem motivadas) que garantam que variedades Lorentzianas admitam singularidades, entendidas como existência de geodésicas causais incompletas. Nossa proposta concreta para este projeto continuará a ser investigar, de maneira mais concentrada, algumas questões relativas à rigidez e à genericidade da incompletude de geodésicas causais em espaços-tempos cosmológicos, em especial no contexto da chamada conjectura de Bartnik.

Palavras-chave:

rigidez; singularidades; Geometria de Lorentz;

3. Coordenador:

Nome: Ivan Pontual Costa e Silva

Departamento: MTM/CFM - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA / MTM/CFM

Tipo: Professor

Regime de Trabalho: DE

Valor Mensal: Sem remuneração

Forma de Remuneração: Sem bolsa

Carga Horária Semanal: 20.00h

4. Entidades Participantes:

Financiadores:

Valor Total: R\$ 0,00

Fundações:

Instituições não financiadoras envolvidas no projeto: Universidades de Málaga e Córdoba, Espanha

Tipo de Instrumento Contratual: Não será celebrado instrumento jurídico com a UFSC.

5. Período:

Previsão de Início: 30/04/2018

Início Efetivo: 30/04/2018

Duração: 36 Meses

Término: 30/04/2021

Aprovação: 07/05/2018

6. Área do Projeto:

Grupo de Pesquisa:

7. Comitê de Ética:

Não se aplica;



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Ativo

Número: 201805659

8. Equipe do Projeto:

CPF / Nome	Tipo	Período	Depto/Curso	Valor Mensal / Valor Total	Teto Excedid	Carga Hora. Semanal	Paad	Situação
Ivan Pontual Costa e Silva 754.450.424-72	Professor Coordenador	30/04/2018 à 30/04/2021	MTM/CFM - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA / MTM/CFM	R\$ 0,00 / R\$ 0,00		20.00h	Sim	Aprovado

Membros da equipe ainda não definidos:

0 externos à UFSC

1 vinculados à UFSC

Número total de participantes na equipe do projeto: 1

0 externos à UFSC (0,00%)

1 vinculados à UFSC (100,00%)



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Ativo

Número: 201805659

9. Financiamento:

Não se aplica.

10. Propriedade Intelectual:

Não se aplica.

11. Relatório Final:

Data efetiva de término: 30/04/2021

Tipo		Descrição
Produção bibliográfica	Artigos em periódicos internacional	I.P. Costa e Silva, J.L. Flores, and J.
Produção bibliográfica	Artigos em periódicos internacional	I.P. Costa e Silva, J.L. Flores and J.
Produção bibliográfica	Artigos em periódicos internacional	I.P. Costa e Silva, J.L. Flores and J.
Produção bibliográfica	Artigos em periódicos internacional	I.P. Costa e Silva, J.L. Flores, J.
Produção bibliográfica	Artigos em periódicos internacional	I.P. Costa e Silva, J.L. Flores, Geodesic
Produção bibliográfica	Artigos em periódicos internacional	I.P. Costa e Silva and E. Minguzzi, A note
Orientações	Dissertação de mestrado	Victor Luis Espinoza. LINHAS E RAIOS
Orientações	Dissertação de mestrado	Paulo André Müller. Teoria de
Orientações	Trabalho de conclusão de curso de	Luiz Henrique Suzana. A geometria do

Receita total (inclui rendimento): R\$ 0,00

Despesa realizada: R\$ 0,00

Saldo: R\$ 0,00

O Relatório detalhado com a descrição dos artigos citados e seus comprovantes será enviado diretamente aos membros da Câmara de Pesquisa juntamente com este resumo.

12. Movimentações:

Data	Responsável	Ação	Notificados	Comentários
15/04/2018 - 18:42h	Ivan Pontual Costa e Silva	Enviou o projeto para aprovação	Cleverson Roberto da Luz	Olá, Cleverson, conforme instruído por você via email, envio meu novo projeto para análise.
15/04/2018 - 18:42h	Ivan Pontual Costa e Silva	Criou o projeto		
01/05/2018 - 09:57h	Cleverson Roberto da Luz	Aprovou o projeto	Aldrovando Luis Azeredo Araujo	
07/05/2018 - 16:09h	Aldrovando Luis Azeredo Araujo	Aprovou o projeto	Ivan Pontual Costa e Silva	
31/03/2021 - 06:00h		Prazo do projeto de pesquisa quase encerrado	Ivan Pontual Costa e Silva, formulariopesquisa@contato.ufsc.br	

Relatório do Projeto *Rigidez e genericidade de singularidades na geometria Lorentziana*

I.P. Costa e Silva
Departamento de Matemática
Universidade Federal de Santa Catarina

April 20, 2021

Abstract

É bem sabido que a questão da incompletude geodésica de variedades Lorentzianas é bem mais complexa que sua contraparte Riemanniana. Por esta razão, até hoje, um dos aspectos distintivos da geometria Lorentziana é sua ênfase em obter condições suficientes (bem motivadas) que garantam que variedades Lorentzianas admitam *singularidades*, entendidas como existência de geodésicas causais incompletas. Essa filosofia motiva os vários teoremas de singularidade encontrados na literatura da área. Nossa proposta concreta para este projeto foi investigar, de maneira mais concentrada, algumas questões relativas à rigidez e à genericidade da incompletude de geodésicas causais em espaços-tempos. Neste relatório, indicamos brevemente os principais resultados dessa investigação até o momento.

1 Introdução

A proposta do projeto que ora se encerra tem sido o de estudar restrições geométricas e topológicas em certas variedades de Lorentz, os espaços-tempos, advindas de completude geodésica. Conforme discriminado ao início do projeto, entre os tópicos de interesse, estão

- a) A geometria de espaços-tempos cosmológicos munidos de um campo de Killing (conforme) temporal.
- b) Investigação da estrutura de bordos causais de espaços-tempo cosmológicos.
- c) Propriedades de geodésicas em variedades de Lorentz, em particular incompletude de geodésicas causais.

Neste relatório, reportamos brevemente os progressos feitos, com resultados coligidos nos artigos indicados nas referências (vide comprovantes de aceitação/publicação em anexo).

O restante do Relatório está organizado como segue:

Na Seção 2, apresentamos nossos principais resultados.

Na Seção 3 esboçamos algumas conclusões e discutimos perspectivas.

2 Resultados

Fizemos alguns progressos em cada um dos itens mencionados acima, neste relatório. Houve, infelizmente, pouco progresso com respeito a uma das questões levantadas na proposta de projeto, sobre condições naturais para existência de campos de Killing temporais. Entretanto, como sempre costuma ser o caso nessas situações, obtivemos diversos resultados paralelos em decorrência dessas investigações, não antecipados inicialmente.

No artigo [5] propomos uma nova definição matemática de buracos negros em Relatividade matemática. Essa definição depende dos chamados *bordos causais*, que ao contrário dos bordos conformes tradicionalmente utilizados, são invariantes conformes de espaços-tempos fortemente causais, estando portanto sempre bem-definidos neste contexto. Definimos sobre esses bordos conformes uma estrutura causal e uma topologia naturais, e a partir disto uma noção inteiramente nova de *infinito luz futuro*, que é crucial para definir buracos negros de forma matematicamente precisa. Mostramos a utilidade dessa construção rederivando um resultado clássico da teoria matemática de buracos negros, a saber a incomunicabilidade causal de superfícies fechadas aprisionadas com o infinito futuro.

Nos artigos [3, 4] particularizamos nossa construção do item anterior para o caso dos chamados espaços-tempos globalmente hiperbólicos com bordo temporal. Nessa situação, uma série de aspectos técnicos se simplifica, e podemos introduzir uma topologia Hausdorff (em geral, é somente T_1) no bordo causal. Isso nos permite demonstrar uma série de novos resultados relacionando a estrutura

do bordo causal com a do bordo conforme - quando este existe - caracterizando quando coincidem.

O artigo [6] estabelece condições sobre um campo de Killing conforme para que ocorra a decomposição preconizada na chamada *conjectura de decomposição de Bartnik*. Esta última propõe que se um espaço-tempo (M, g) tem hipersuperfícies de Cauchy compactas, geodésicas temporais completas e satisfaz a condição de convergência temporal, então deve ter a forma $(M, g) = (\mathbb{R} \times S, -dt^2 \oplus h)$, onde (S, h) é uma variedade Riemanniana compacta. Essa conjectura, ainda em aberto, é uma das mais importantes afirmações sobre rigidez de completude geodésica na geometria de Lorentz. Em nosso artigo provamos, entre outras coisas, que ela vale em espaços-tempos com campos de Killing conformes completos.

A construção de espaços de recobrimentos adequados é uma técnica tradicional na prova de diversos teoremas de singularidade na geometria de Lorentz. No artigo [1] construímos exemplos como algumas condições causais requeridas nesses teoremas podem deixar de transferir-se ao recobrimento. Damos também uma nova demonstração, com requerimentos causais muito reduzidos, de uma versão do teorema de singularidade de Gannon-Lee provada por mim em 2010.

Finalmente, o artigo [2] é uma contribuição a uma questão que tem me interessado bastante recentemente, a da conexidade geodésica em variedades afins e semi-Riemannianas. Sabe-se que ao contrário do caso Riemanniano, completude e/ou conexidade não são suficientes para garantir conexidade geodésica, e há poucos resultados gerais a respeito.

3 Conclusões e Perspectivas

Os resultados indicados acima de modo algum esgotam as possibilidades de investigação sobre os temas propostos, e como é a regra em pesquisa as diversas estratégias que usamos não apenas merecem análise mais aprofundada como nos sugeriram uma série de novos problemas. Estas estratégias e problemas serão tema de nosso próximo projeto, a ser submetido à Câmara de Pesquisa concomitantemente a este relatório.

References

- [1] I.P. Costa e Silva and E. Minguzzi, *A note on causality conditions on covering spacetimes*, Classical and Quantum Gravity, 37 (2020) 227001.
- [2] I.P. Costa e Silva, J.L. Flores, *Geodesic connectedness of affine manifolds*, Annali di Matematica (2020). <https://doi.org/10.1007/s10231-020-01028-8>
- [3] I.P. Costa e Silva, J.L. Flores and J. Herrera, *Hausdorff closed limits and the c -boundary I: a new topology for the c -completion of spacetimes*, Classical and Quantum Gravity 36 (2018) 175002. *Addendum in:* Class. Quantum Grav. 37 (2020) 029401.

- [4] I.P. Costa e Silva, J.L. Flores and J. Herrera, *Hausdorff closed limits and the c -boundary II: null infinity and black holes*, Classical and Quantum Gravity, 36 (2019) 185007.
- [5] I.P. Costa e Silva, J.L. Flores, and J. Herrera, *A novel notion of null infinity for c -boundaries and generalized black holes*, Journal of High Energy Physics, 2018:123 (2018).
- [6] I.P. Costa e Silva, J.L. Flores, J. Herrera, *Some remarks on conformal symmetries and Bartnik's splitting conjecture*, Mediterranean Journal of Mathematics (2019) 17-21.

A novel notion of null infinity for c-boundaries and generalized black holes

I.P. Costa e Silva,^a J.L. Flores^b and J. Herrera^c

^a*Department of Mathematics, Universidade Federal de Santa Catarina, 88.040-900 Florianópolis-SC, Brazil.*

^b*Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Facultad de Ciencias, Universidad de Málaga, Campus Teatinos, 29071 Málaga, Spain*

^c*Departamento de Matemáticas, Edificio Albert Einstein, Universidad de Córdoba, Campus de Rabanales, 14071 Córdoba, Spain*

E-mail: pontual.ivan@ufsc.br, floresj@uma.es, jherrera@uco.es

ABSTRACT: We give new definitions of null infinity and black hole in terms of causal boundaries, applicable to any strongly causal spacetime (M, g) . These are meant to extend the standard ones given in terms of conformal boundaries, and use the new definitions to prove a classic result in black hole theory for this more general context: if the null infinity is *regular* (i.e. well behaved in a suitable sense) and (M, g) obeys the null convergence condition, then any closed trapped surface in (M, g) has to be inside the black hole region. As an illustration of this general construction, we apply it to the class of *generalized plane waves*, where the conformal null infinity is not always well-defined. In particular, it is shown that (generalized) black hole regions do *not* exist in a large family of these spacetimes.

KEYWORDS: Black Holes, Differential and Algebraic Geometry, Spacetime Singularities

ARXIV EPRINT: 1807.00152

Addendum

Addendum to ‘Hausdorff closed limits and the c-boundary I: a new topology for the c-completion of spacetimes’

I P Costa e Silva¹, J L Flores^{2,4}  and J Herrera³ 

¹ Department of Mathematics, Universidade Federal de Santa Catarina, 88.040-900 Florianópolis-SC, Brazil

² Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Facultad de Ciencias, Universidad de Málaga, Campus Teatinos, 29071 Málaga, Spain

³ Departamento de Matemáticas, Edificio Albert Einstein, Universidad de Córdoba, Campus de Rabanales, 14071 Córdoba, Spain

E-mail: jherrera@uco.es

Received 9 October 2019, revised 6 November 2019

Accepted for publication 14 November 2019

Published 19 December 2019



CrossMark

Abstract

After publishing the research paper (Costa e Silva *et al* 2019 *Class. Quantum Grav.* **36** 175002), we learned in private discussions with Müller that some central ideas therein were actually anticipated in a 1977 paper by Beem 1977 (*Gen. Relativ. Gravit.* **8** 245–57). With a view to establishing Beem’s precedence where it is due, we present here a clear account of where the themes in these two papers overlap, as well as of their distinctive features. We also add a short revision of Beem’s approach based on recent developments, including the necessity to restrict the class of spacetimes considered by Beem and a counterexample to a conjecture in Beem 1977 (*Gen. Relativ. Gravit.* **8** 245–57).

Keywords: Hausdorff closed limit, causal boundary, causally continuous spacetimes, globally hyperbolic spacetimes

We have recently published in [1, 3] the results of our research on a very natural, metrizable (and in particular Hausdorff) topology on the causal completion of globally hyperbolic spacetimes with a smooth (maybe empty) timelike boundary. We called it *closed limit topology* (CLT) in the context of our papers. After the publication of these papers, we became aware of an old 1977 paper [2] by John Beem where he also seems to introduce the CLT topology in the context of *c*-boundaries.

After analyzing [2] in detail, we realized that the seminal idea of applying the CLT to *c*-boundaries is indeed originally Beem’s. In this regard, we hereby acknowledge that the precedence is entirely his. However, looking further beyond that first idea, we came at length

⁴ Author to whom any correspondence should be addressed.

PAPER

Hausdorff closed limits and the c -boundary II: null infinity and black holes

I P Costa e Silva¹, J L Flores²  and J Herrera³ 

Published 20 August 2019 • © 2019 IOP Publishing Ltd

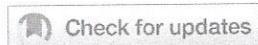
Classical and Quantum Gravity, Volume 36, Number 18

Citation I P Costa e Silva *et al* 2019 *Class. Quantum Grav.* **36** 185007jherrera@uco.es¹ Department of Mathematics, Universidade Federal de Santa Catarina, 88.040-900 Florianópolis-SC, Brazil² Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Facultad de Ciencias, Universidad de Málaga, Campus Teatinos, 29071 Málaga, Spain³ Departamento de Matemáticas, Edificio Albert Einstein, Universidad de Córdoba, Campus de Rabanales, 14071 Córdoba, SpainJ L Flores  <https://orcid.org/0000-0001-5732-5445>J Herrera  <https://orcid.org/0000-0003-3038-5514>

Received 10 May 2019

Accepted 24 July 2019

Published 20 August 2019



Method: Single-anonymous

Revisions: 1

Screened for originality? Yes

<https://doi.org/10.1088/1361-6382/ab34f2>

Buy this article in print





Some Remarks on Conformal Symmetries and Bartnik's Splitting Conjecture

I. P. Costa e Silva, J. L. Flores and J. Herrera

Abstract. Inspired by the results in a recent paper by Galloway and Vega (Lett Math Phys 108(10):2285–2292, 2018), we investigate a number of geometric consequences of the existence of a timelike conformal Killing vector field in a globally hyperbolic space-time with compact Cauchy hypersurfaces, especially in connection with the so-called Bartnik's splitting conjecture. In particular, we give a complementary result to the main theorem in [11].

Mathematics Subject Classification. 53C50, 83C75.

1. Introduction: Motivations and Statement of Main Results

In 1988, Bartnik [1] posed the following conjecture:

Conjecture 1.1. *Let (M^{n+1}, g) be a globally hyperbolic space-time with compact Cauchy hypersurfaces, satisfying the timelike convergence condition (TCC) $\text{Ric}(v, v) \geq 0$ for every $v \in TM$ timelike. Then either (M, g) is timelike geodesically incomplete or else it is globally isometric to a product space-time $(\mathbb{R} \times S, -dt^2 \oplus h)$, where (S, h) is a compact Riemannian manifold.*

Bartnik calls a globally hyperbolic space-time (of any dimension) possessing a compact Cauchy hypersurface and satisfying the TCC a *cosmological space-time*, because the “spatially closed” Robertson–Walker models in relativistic cosmology (with suitable matter content and cosmological constant) are obviously important examples of such space-times. The Bartnik's conjecture then becomes the statement that *a cosmological space-time is either timelike geodesically incomplete or else splits isometrically as a product of a Lorentz line and a compact Riemannian manifold.* (For simplicity, we shall simply say then that the pertinent space-time *splits*: in this paper, this phrase will always refer to the specific kind of isometric splitting appearing in the Bartnik conjecture.)

The importance of Bartnik's conjecture both for geometry and physics because it establishes a rigidity statement for the celebrated 1970 singularity theorem of Hawking and Penrose [16, 24]. The latter theorem implies, in par-

Note

A note on causality conditions on covering spacetimes

Ivan P Costa e Silva^{2,*}  and Ettore Minguzzi¹ 

¹ Dipartimento di Matematica e Informatica ‘U Dini’, Università degli Studi di Firenze, Via S. Marta 3, I-50139, Firenze, Italy

² Department of Mathematics, Universidade Federal de Santa Catarina, 88.040-900 Florianópolis-SC, Brazil

E-mail: ettore.minguzzi@unifi.it and pontual.ivan@ufsc.br

Received 16 May 2020, revised 31 August 2020

Accepted for publication 18 September 2020

Published 19 October 2020



CrossMark

Abstract

A number of techniques in Lorentzian geometry, such as those used in the proofs of singularity theorems, depend on certain smooth coverings retaining interesting global geometric properties, including causal ones. In this note we give explicit examples showing that, unlike some of the more commonly adopted rungs of the causal ladder such as strong causality or global hyperbolicity, less-utilized conditions such as causal continuity or causal simplicity *do not* in general pass to coverings, as already speculated by one of the authors (EM). As a consequence, any result which relies on these causality conditions transferring to coverings must be revised accordingly. In particular, some amendments in the statement and proof of a version of the Gannon–Lee singularity theorem previously given by one of us (IPCS) are also presented here that address a gap in its original proof, simultaneously expanding its scope to spacetimes with lower causality.

Keywords: Lorentzian geometry, covering manifolds, causal ladder

1. Introduction

Let (M^n, g) be a *spacetime*, i.e., a pair consisting of a connected C^∞ smooth manifold (Hausdorff and second-countable) M of dimension $n \geq 2$ and a time-oriented C^∞ Lorentz metric g . Let $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ be a smooth covering map, and endow \tilde{M} with the pullback metric $\tilde{g} := \pi^*g$ and the induced time-orientation. Since π is a local isometry, any *local* geometric condition that might hold on (M, g) , such as (say) $\text{Ric}_g(v, v) \geq 0$ for all lightlike vectors $v \in TM$, must hold on (\tilde{M}, \tilde{g}) as well.

* Author to whom any correspondence should be addressed.



Geodesic connectedness of affine manifolds

Ivan P. Costa e Silva¹ · José L. Flores²

Received: 21 May 2020 / Accepted: 31 July 2020 / Published online: 12 October 2020
© Fondazione Annali di Matematica Pura ed Applicata and Springer-Verlag GmbH Germany, part of Springer Nature 2020

Abstract

We discuss new sufficient conditions under which an affine manifold (M, ∇) is geodesically connected. These conditions are shown to be essentially weaker than those discussed in groundbreaking work by Beem and Parker and in recent work by Alexander and Karr, with the added advantage that they yield an elementary proof of the main result.

Keywords Affine manifolds · Semi-Riemannian manifolds · Geodesic connectivity

Mathematics Subject Classification Primary 53C22

1 Introduction

The geodesic connectedness of a (connected) Riemannian manifold (M, g) is of course directly linked with geodesic completeness via the Hopf–Rinow theorem, in which the existence of minimal geodesics connecting any two points of M is established. Even in the absence of geodesic completeness, the geodesic connectedness of Riemannian manifolds is fairly well understood [2, 19]. By contrast, it has long been known that for indefinite semi-Riemannian manifolds, where no analogue of the Hopf–Rinow theorem exists, the situation is much subtler.

A famous example by Bates [3] has shown that even *complete and compact* affine manifolds may fail to be geodesically connected. Even if one only considers the more restricted (but important) class of *Lorentzian* manifolds, it is well known that de Sitter and anti-de Sitter spaces are examples of geodesically complete, maximally symmetric Lorentz

✉ Ivan P. Costa e Silva
pontual.ivan@ufsc.br

José L. Flores
floresj@uma.es

¹ Department of Mathematics, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brazil

² Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Facultad de Ciencias, Universidad de Málaga, Campus Universitario de Teatinos, 29071 Málaga, Spain

