Exemplo 2: Para achar a figura dada pela equação

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 81$$

devemos resolver

$$[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 81$$

Calculando os autovalores e autovetores respectivos (já normalizados) obtemos

$$\lambda_1 = 1, \mathbf{v}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$\lambda_2 = 1, \mathbf{v}_2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$\lambda_3 = 4, \mathbf{v}_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Ainda,

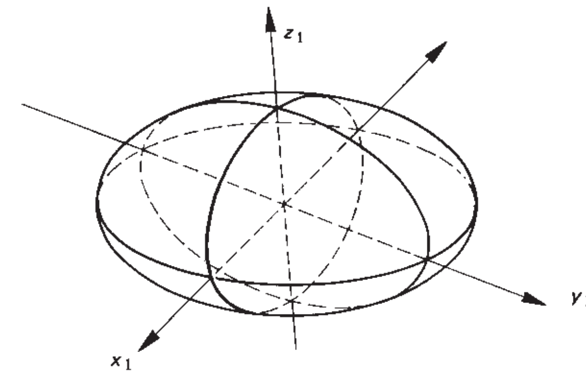
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [I]^{\textit{autovetores}}_{\textit{canônica}} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{\textit{autovetores}}$$

$$\text{onde } [I]^{\textit{autovetores}}_{\textit{canônica}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

Então, a equação se torna

$$[x_1 \quad y_1 \quad z_1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = 81$$

ou $x_1^2 + y_1^2 + 4z_1^2 = 81$, que é um *elipsóide*.



Como não aparecem os termos lineares, se não estivermos interessados na posição dos novos eixos mas apenas no formato da figura, bastaria calcular os autovalores, escrever a equação $x_1^2 + y_1^2 + 4z_1^2 = 81$ e já teríamos identificado a quádrica.

Também no estudo das quádricas em geral, se tivermos problemas onde somente a classificação destas seja importante, não interessando suas dimensões ou posição no espaço, poderemos resolvê-los apenas estudando os sinais dos autovalores associados à forma quadrática. Seria muito interessante que você discutisse todas as possibilidades, de modo análogo ao que foi feito em 11.4.5 para cônicas.

11.6 EXERCÍCIOS

Identifique a figura e ache sua posição quando a sua equação é:

1. $3x^2 + 2xy + 3y^2 - \sqrt{2}x = 0$

2. $4x^2 + 4xy + y^2 - x = 0$

3. $xy + x + y = 0$

4. $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$

5. $3x^2 - 4\sqrt{3}xy - y^2 + 20y - 25 = 0$

6. $4xy + 3y^2 + 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y = 0$

7. $-5y^2 + 2xy - 8xz + 2yz = 0$

8. $y^2 + 2z^2 + 2\sqrt{3}\,yz = 0$

9. $9x^2 + 16y^2 + 25z^2 + 24xy - 40x + 30y = 0$

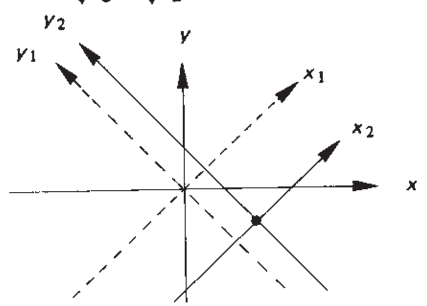
Identifique a figura. Não é necessário dar a posição.

10. $3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz = 2$

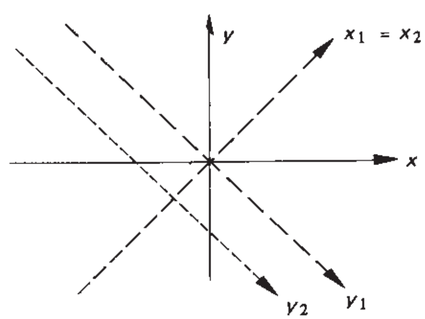
11. $y^2 + 2z^2 + 2\sqrt{3}\,yz = 0$

11.6.1 Respostas

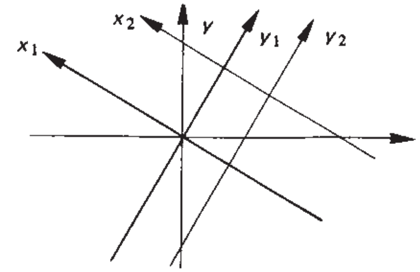
1. Elipse: $\dfrac{x_2^2}{\frac{3}{64}} + \dfrac{y_2^2}{\frac{3}{32}} = 1$ em relação ao referencial de centro no ponto $(\frac{3}{8\sqrt{2}}, \frac{-1}{8\sqrt{2}})$ e eixos x_2 na direção de $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e y_2 na direção de $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.



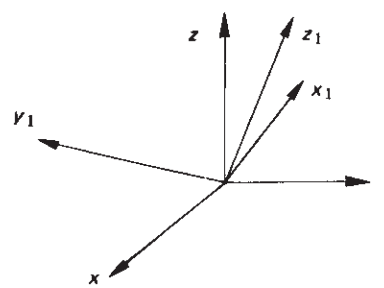
3. Hipérbole: $\dfrac{x_2^2}{2} - \dfrac{y_2^2}{2} = 1$ em relação ao referencial de centro no ponto $(x_1, y_1) = (-\sqrt{2}, 0)$ e eixos x_2 na direção de $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e y_2 na direção de $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.



5. Hipérbole: $x_2^2 - \dfrac{y_2^2}{\frac{5}{3}} = 1$ em relação ao referencial com centro no ponto $(x_1, y_1) = (-1, \frac{5}{\sqrt{3}})$ e eixos x_2 na direção de $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ e y_2 na direção $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.



7. Hiperbolóide de 2 folhas de equação $-3x_1^2 - 6y_1^2 + 4z_1^2 = 1$ em relação ao referencial, com centro no ponto (0, 0, 0) e eixos x_1 na direção de $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, y_1 na direção $(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ e z_1 na direção de $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.



9. Elipsóide de equação $125x_2^2 + 125y_2^2 + 106z_2^2 = 3125$ em relação ao referencial, com centro no ponto $(x_1, y_1, z_1) = (0, -\frac{54}{125}, 0)$ e eixos x_2 na direção de (0, 0, 1), y_2 na direção de $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$ e z_2 na direção de $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0)$.

*11.7 PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DAS CÔNICAS

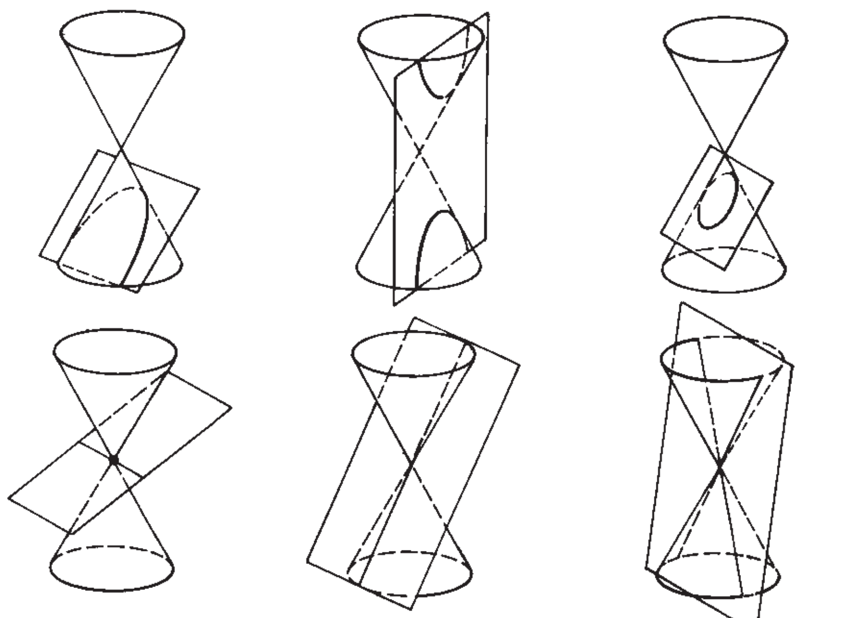


Figura 11.7.1

As cônicas, ou secções cônicas, foram estudadas pelos gregos e desenvolvidas a partir das suas propriedades geométricas. Muitos resultados aparecem resumidos nos trabalhos de Apollonius (260–170 A. C).

Para apresentar estas propriedades e definir as cônicas a partir delas vamos estudar alguns pontos e retas especiais.

Consideremos as cônicas na forma padrão:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{(elipse)} \quad \text{(E)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{(hipérbole)} \quad \text{(H)}$$

$$y^2 = 4ax \quad \text{(parábola)} \quad \text{(P)}$$

Suponhamos ainda $a > b > 0$.

Para a elipse e a hipérbole, definimos os pontos: $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ denominamos *focos* à esquerda e à direita.

Na elipse tomamos a *distância focal* $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ e para a hipérbole $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Na parábola definimos o foco como sendo $F(a, 0)$; i.e $c = a$ (veja 11.7.1):

11.7.1

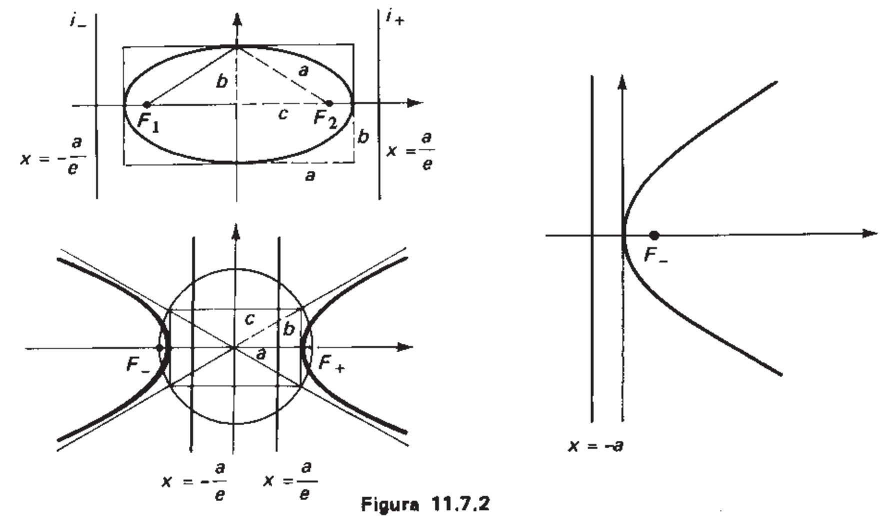


Figura 11.7.2

A *excentricidade* e é definida pela relação $e = \dfrac{c}{a}$.

Então, $0 \leqslant e < 1$ para uma elipse ($e = 0$ para a circunferência); $e > 1$ para a hipérbole e $e = 1$ para a parábola.

As diretrizes da elipse E ou da hipérbole H são as retas:

$$x = -\frac{a}{e} \quad \text{e} \quad x = \frac{a}{e}$$

(O círculo não tem diretriz.)

A *diretriz* da parábola P é única e é a reta $x = -a$.

Se na elipse ou hipérbole tivermos $b > a$, a distância focal fica sendo $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ e $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, respectivamente, e os focos $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$. A extremidade passa a ser $e = \dfrac{c}{b}$ e as diretrizes $y = \pm \dfrac{b}{e}$.

11.7.2 Exercícios

1. Esboce o gráfico das cônicas a seguir, determinando seus focos, diretrizes e excentricidade. Observe depois o papel geométrico da excentricidade.

a) $x^2 + 4y^2 = 100$
b) $2x^2 + y^2 = 100$
c) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$
d) $x^2 + y^2 = 4$
e) $x^2 - 4y^2 = 100$
f) $x^2 - 2y^2 = 100$