Por definição, temos que $ma(\lambda)$ é o maior índice j tal que $(x \quad \lambda)^j$ divide $p_T(x)$. Portanto, $mg(\lambda) = s \leq ma(\lambda)$, como queríamos. □

5.1.13 Seja $T \quad V \to V$ um operador linear, onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita, tal que $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \quad (x - \lambda_t)^{n_t}$, onde $\lambda_1, \quad \lambda_t \in \mathbb{K}$ são distintos. Segue da definição de p_T que $dim_{\mathbb{K}} \ V = n_1 + \quad + n_t$. Usando-se o resultado acima é fácil ver que $dim_{\mathbb{K}} \ V = \sum_{i=1}^{t} dim_{\mathbb{K}} \ \mathrm{Aut}_T(\lambda_i)$ se e somente se, para cada i, $ma(\lambda_i) = mg(\lambda_i)$. O próximo resultado resume o que de principal foi discutido nesta seção.

TEOREMA. *Seja $T \quad V \to V$ um operador linear, onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e sejam $\lambda_1, \quad , \lambda_t$ os seus autovalores distintos. As seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) T é diagonalizável.

(b) $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \quad (x - \lambda_t)^{n_t}$, $n_i \geq 1$ e $mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i)$, para cada $i = 1, \quad , t$.

(c) $dim_{\mathbb{K}} \ V = \sum_{i=1}^{t} dim_{\mathbb{K}} \ Aut_T(\lambda_i)$

5.1.14 EXERCÍCIOS

(1) Em cada um dos casos abaixo, decida se o operador linear $T \quad \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ dado por sua matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ é diagonalizável. Em caso positivo, calcule uma base de autovetores e a sua forma diagonal.

$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbb{K} = \mathbb{C} \\ n = 2 \end{matrix}$ $\qquad (b) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbb{K} = \mathbb{C} \\ n = 2 \end{matrix}$

$(c) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbb{K} = \mathbb{C} \\ n = 2 \end{matrix}$ $\qquad (d) \begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ n = 3 \end{matrix}$

$(e) \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C} \\ n = 3 \end{matrix}$ $\qquad (f) \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ n = 2 \end{matrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -3 & -7 & -3 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ n = 3 \end{matrix}$ (h) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ -8 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ n = 3 \end{matrix}$

(2) Seja $T : V \to V$ um operador linear. Mostre que se todo vetor de V for autovetor de T, então existe um $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $T(v) = \lambda v,\ \forall\, v \in V$.

(3) Seja $T : V \to V$ operador e V espaço sobre $\mathbb{K}$. Mostre que se p_T tiver todas as suas raízes em $\mathbb{K}$ e se elas forem simples, isto é, com multiplicidade algébrica 1, então T é diagonalizável.

(4) Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Mostre que se $dim_{\mathbb{K}}\, Im\, T = m$, então T tem no máximo $m+1$ autovalores.

(5) Seja $T : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ tal que $T \circ T = 0$. Mostre que

(a) $Im\, T \subseteq Nuc\, T$

(b) Se $T \neq 0$, então existe uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^2$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(6) Mostre que se $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, então A é semelhante sobre $\mathbb{C}$ a uma matriz de um dos seguinte tipos

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ com } a, b \in \mathbb{C} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} \text{ com } a \in \mathbb{C}$$

(7) Seja A uma matriz 2×2 simétrica em $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ (isto é, tal que $A^t = A$). Mostre que A é diagonalizável.

(8) Determine, se existir, uma matriz P invertível tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal para cada uma das seguintes matrizes:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$, com $a \in \mathbb{K}$

(9) Seja T $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear que tem como autovetores $(3,1)$ e $(-2,1)$ associados aos autovalores -2 e 3, respectivamente. Calcule $T(x,y)$.

(10) Ache os autovalores de $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e de A^{-1}

(11) Sejam T $V \to V$ e S $V \to V$ transformações lineares. Suponha que $v \in V$ é um autovetor de T e de S associado aos autovalores λ_1 e λ_2 de T e S, respectivamente. Ache um autovetor e um autovalor de:

(a) $\alpha S + \beta T$ onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(b) $S \circ T$

(12) (a) Mostre que se B $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, com M invertível, então $(M^{-1}BM)^n = (M^{-1}B^nM)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Calcule A^n, $n \in \mathbb{N}$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$$

(13) Seja

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{C})$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, determine $B \in \mathbb{M}_3(\mathbb{C})$ tal que $B^n = A$. Existe uma matriz $B \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $B^n = A$?

(14) Seja T $\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear cuja matriz em relação à base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é dada por

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine uma matriz invertível $M \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ tal que $M^{-1}[T]_{\mathcal{B}}M$ seja uma matriz diagonal.

(15) Seja $T \colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

onde $\mathcal{B} = \{\frac{1}{2}x^2,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}x\}$ e $\mathcal{C} = \{x^2, x, 1\}$. Mostre que T é diagonalizável.

(16) Decida se as seguintes matrizes são ou não diagonalizáveis. Em caso afirmativo, encontre uma base de autovetores.

$(a) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad (b) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$(c) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad (d) \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

(17) Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão n e $\mathcal{B}$ uma base de U. Mostre que dada uma matriz $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ invertível existe uma base $\mathcal{C}$ de U tal que $[Id]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = M$

(18) Determine todos os valores de $a, b, c \in \mathbb{C}$ para os quais a matriz abaixo seja diagonalizável:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(19) Em $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, considere o subespaço $S = [e^{2x}\ sen\ x,\ e^{2x}\ cos\ x,\ e^{2x}]$ e o operador linear $D \colon S \to S$ definido por $D(f) = f'$. Considere ainda as funções $f_1(x) = e^{2x}$ sen x, $f_2(x) = e^{2x}$ cos x e $f_3(x) = e^{2x}$ em $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Determine:

(a) a matriz de D em relação à base $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ de S

(b) os autovalores de D e as funções de S que são autovetores de D