isso, l_2 é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o elemento $e_n = (\delta_{kn})_{k\in\mathbb{N}}$ em l_2. Observe que o conjunto $\mathcal{A} = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto linearmente independente de l_2 e, portanto, l_2 tem dimensão infinita. Vamos agora definir em l_2 o produto interno dado por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\overline{y_i}$$

para $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em l_2. Para que isto seja um produto interno, precisamos verificar inicialmente que a série acima é convergente. Para tanto, basta aplicar o Teorema 6.1.7 para o $\mathbb{K}$ −espaço vetorial $\mathbb{K}^n$ munido do produto interno canônico e $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n), v = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. Assim, teremos que

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y}_i| \leq (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto,

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y}_i| \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Como tal desigualdade independe de n, vamos ter que

$$|\sum_{i=1}^{\infty} x_i\overline{y}_i| \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Agora não é difícil verificar as propriedades (P_1) a (P_4).

6.1.10 Exercícios

(1) Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno.

(a) Mostre que $\langle 0, u\rangle = 0, \ \forall\, u \in V$.

(b) Mostre que se $\langle u, v\rangle = 0, \ \forall\, v \in V$, então $u = 0$.

(2) Mostre que a função $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle (a, b, c, d)\ ,\ (x, y, z, w)\rangle = 2ax + by + cz + dw$$

é um produto interno de $\mathbb{R}^4$.

(3) Use a desigualdade de Schwarz em $\mathbb{R}^3$ para provar que dados valores reais positivos a_1, a_2 e $a_3 \in \mathbb{R}$, vale

$$(a_1 + a_2 + a_3)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geq 9.$$

(4) Sejam $V = \mathbb{K}^n$ e $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$. Mostre que

$$\langle (x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \overline{y_i}$$

é um produto interno em V se e somente se a_i é um valor real positivo para cada $i = 1, \cdots, n$.

(5) Considere o $\mathbb{C}$-espaço vetorial $V = \mathbb{C}^2$ com base $\mathcal{B}$ e seja $\langle\ ,\ \rangle$ um produto interno em V. Mostre que existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\gamma \in \mathbb{C}$ tais que

$$\langle (x_1, x_2)_{\mathcal{B}}, (y_1, y_2)_{\mathcal{B}} \rangle = \alpha x_1 \overline{y_1} + \gamma x_1 \overline{y_2} + \overline{\gamma} x_2 \overline{y_1} + \beta x_2 \overline{y_2}.$$

(6) Sejam V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial com produto interno e $u, v \in V$. Mostre que:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \parallel u+v \parallel^2 - \frac{1}{4} \parallel u-v \parallel^2 + \frac{i}{4} \parallel u+iv \parallel^2 - \frac{i}{4} \parallel u-iv \parallel^2 .$$

(7) Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ com produto interno. Mostre que para todos $u, v \in V$, vale a igualdade (lei do paralelogramo):

$$\parallel u + v \parallel^2 + \parallel u - v \parallel^2 = 2 \parallel u \parallel^2 + 2 \parallel v \parallel^2 .$$

(8) Seja W o subconjunto de l_2 formado por todas as seqüências $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in l_2$ tais que $x_j \neq 0$ apenas para um número finito de índices j. Mostre que W é um subespaço de l_2.

6.2 ORTOGONALIDADE

6.2.1 Definição. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ e sejam $u,\ v \in V$. Dizemos que u e v são *ortogonais* se