e com uma base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Se $u = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ e $v = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j v_j$ pertencem a V, com α_i's e β_j's em $\mathbb{K}$, então

$$\langle u, v\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta}_j \langle v_i, v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta}_i .$$

Ou, em outra notação:

$$\langle(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}, (\beta_1, \ldots, \beta_n)_{\mathcal{B}}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta}_i$$

6.2.9 Uma outra conseqüência interessante é dada pelo seguinte resultado.

COROLÁRIO. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial munido de um produto interno. Sejam $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ duas bases ortonormais de V. Se M é a matriz de mudança de bases $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$, então $M \cdot \overline{M}^t = \overline{M}^t \cdot M = Id_n$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $M = (\alpha_{ij})_{i,j} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ a matriz de mudança de bases $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$. Então, para $i, j = 1, \ldots, n$, temos que $v_j = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{kj} u_k$ e $v_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{ki} u_k$. Como $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$, segue da Observação 6.2.8 que $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \cdot \overline{\alpha}_{kj} = \delta_{ij}$ para cada $1 \le i, j \le n$. Conseqüentemente, $M \cdot \overline{M}^t = \overline{M}^t \cdot M = Id_n$. □

6.2.10 EXERCÍCIOS

(1) Refaça o Exemplo 6.2.6 usando o seguinte produto interno em $\mathbb{C}^3$:

$$\langle(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle = 2x_1\overline{y}_1 + 4x_2\overline{y}_2 + x_3\overline{y}_3 .$$

(2) Seja $S = [(1+i, 3i, 2-i), (2-3i, 10+2i, 5-i)] \subset \mathbb{C}^3$. Determine uma base ortogonal para S, considerando em $\mathbb{C}^3$ o produto interno canônico.

(3) Considere a base $\mathcal{B} = \{(1, i), (i, 1)\}$ de $\mathbb{C}^2$. Determine uma base ortogonal de $\mathbb{C}^2$ que contenha um dos elementos de $\mathcal{B}$, considerando em $\mathbb{C}^2$ o produto interno canônico.

(4) Considere o $\mathbb{C}$-espaço vetorial $V = \mathcal{C}([0,1]), \mathbb{C})$ com produto interno dado por: $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\, dt$ para $f, g \in V$ Prove que

(a) $|\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\, dt| \leq (\int_0^1 |f(t)|^2\, dt)^{1/2}.(\int_0^1 |g(t)|^2\, dt)^{1/2}$

(b) Sejam $f_n(x) = \sqrt{2}\, \cos\, (2\pi n x)$ e $g_n(x) = \sqrt{2}\, sen\, (2\pi n x)$. Prove que $S = \{1, f_1, g_1, f_2, g_2, ...\}$ é um conjunto ortonormal em V

(c) Prove que $S = \{h_n\}$, onde $h_n = e^{2\pi i n x}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2,$, é um conjunto ortonormal em V

(5) Seja $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ um conjunto ortogonal de vetores não nulos em um espaço vetorial V com produto interno. Seja $v \in V$ um vetor qualquer

(a) Prove a desigualdade de Bessel:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{|\langle v, v_k\rangle|^2}{\| v_k \|^2} \leq \| v \|^2$$

(b) Mostre que a igualdade vale se e somente se

$$v = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle v, v_k\rangle}{\| v_k \|^2}\, v_k.$$

(6) Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ munido de produto interno e sejam $u, v \in V$

(a) Mostre que se $u \perp v$, então $\| u + v \|^2 = \| u \|^2 + \| v \|^2$

(b) Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mostre que u e v são ortogonais se valer a igualdade $\| u + v \|^2 = \| u \|^2 + \| v \|^2$.

(c) Mostre que o item (b) é falso se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(d) Para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mostre que u e v são ortogonais se e somente se existem $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tais que

$$\| \alpha u + \beta v \|^2 = \| \alpha u \|^2 + \| \beta v \|^2$$