

DEMONSTRAÇÃO. Precisamos mostrar que:

- (i)  $V = W + W^\perp$ , isto é, cada vetor  $v \in V$  se escreve como uma soma  $v = w_1 + w_2$  com  $w_1 \in W$  e  $w_2 \in W^\perp$

$$(ii) \quad W \cap W^\perp = \{0\}.$$

Se  $W = 0$ , não há nada a provar. Assuma que  $W \neq 0$  e seja  $B = \{v_1, \dots, v_m\}$  uma base ortogonal de  $W$  (que existe pelo Teorema 6.2.7). Considere uma base  $C = \{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$  de  $V$ , também ortogonal e contendo  $B$ . Segue de (6.2.4(a)) que se  $v \in V$ , então

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle \frac{\|v_i\|}{\|v_i\|^2} v_i = \sum_{i=1}^m \langle v, v_i \rangle \frac{\|v_i\|}{\|v_i\|^2} v_i + \sum_{i=m+1}^n \langle v, v_i \rangle \frac{\|v_i\|}{\|v_i\|^2} v_i.$$

Obviamente,  $\sum_{i=1}^m \langle v, v_i \rangle \frac{\|v_i\|}{\|v_i\|^2} v_i \in W$ . Por outro lado, para cada

$$j = 1, \dots, m$$

$$\langle v_j, \sum_{i=m+1}^n \langle v, v_i \rangle \frac{\|v_i\|}{\|v_i\|^2} v_i \rangle = \sum_{i=m+1}^n \langle v, v_i \rangle \frac{\|v_i\|}{\|v_i\|^2} \langle v_j, v_i \rangle = 0$$

Assim, segue da Proposição 6.3.3 que  $\sum_{i=m+1}^n \langle v, v_i \rangle \frac{\|v_i\|}{\|v_i\|^2} v_i \in W^\perp$ . Logo

$$V = W + W^\perp \text{ e isto prova (i)}$$

Para provarmos (ii), seja  $w \in W \cap W^\perp$ . Como  $w \in W^\perp$ , temos  $\langle w, v \rangle = 0$  para todo  $v \in W$ . Em particular,  $\langle w, w \rangle = 0$  e, portanto,  $w = 0$ , como queríamos.

6.3.5 COROLÁRIO. Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e seja  $W$  um subespaço de  $V$ . Então

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W + \dim_{\mathbb{K}} W^\perp$$

### 6.3.6 EXERCÍCIOS

- (1) Sejam  $\mathbb{R}^4$  com o produto interno usual e  $S$  o subconjunto  $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z + w = 0\}$ . Determine uma base ortogonal de  $S$  e uma outra de  $S^\perp$ .

- (2) Considere o espaço  $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  dos polinômios reais de grau menor ou igual a 3, com o produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt, \quad \forall f, g \in V$$

Ache uma base ortonormal de  $[5, 1+t]^\perp$

- (3) Considere  $M_2(\mathbb{R})$  com o produto interno

$$\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22},$$

onde  $A = (a_{ij})_{i,j}$  e  $B = (b_{ij})_{i,j}$ ,  $i, j = 1, 2$ . Seja

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \mid x + y - z = 0 \right\}$$

- (a) Determine uma base ortogonal de  $W$

- (b) Determine uma base de  $W^\perp$

- (4) Seja  $W$  um subespaço de um espaço vetorial com produto interno  $V$ . Mostre que se  $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ , então  $(W^\perp)^\perp = W$ .

- (5) Sejam  $V$  um espaço vetorial com produto interno de dimensão finita e  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  uma base ortonormal de  $V$ . Se  $T \in L(V, V)$  e  $A = [T]_{\mathcal{B}}$ , mostre que  $a_{ij} = \langle T(v_j), v_i \rangle$  para  $i, j = 1, \dots, n$ .

- (6) Seja  $V = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$  com o produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt.$$

Seja  $W \subsetneq V$  formado por todas as funções ímpares, isto é,  $W = \{f \in V \mid f(-t) = -f(t), \forall t \in [-1, 1]\}$ . Determine  $W^\perp$ .

- (7) Seja  $V = M_n(\mathbb{C})$ . Dados  $A = (a_{ij})_{i,j}$ ,  $B = (b_{ij})_{i,j} \in V$ , definimos  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A\overline{B}^t)$ .

- (a) Mostre que  $\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \overline{b_{ij}}$ .

- (b) Seja  $S$  o subespaço de  $V$  formado pelas matrizes diagonais. Determine  $S^\perp$ .

(8) Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial com produto interno e sejam  $U$  e  $W$  subespaços de  $V$  tais que  $U \subseteq W^\perp$  e  $V = W + U$ . Mostre que  $U = W^\perp$ .

(9) Considere o seguinte produto interno em  $\mathbb{R}^4$ .

$$\langle (a, b, c, d), (x, y, z, w) \rangle = 2ax + by + cz + dw$$

para  $(a, b, c, d) \in (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ . Determine uma base do subespaço ortogonal a  $S = [(1, 2, 0, 1), (2, 0, -1, 1)]$ .

## 6.4 A MELHOR APROXIMAÇÃO

6.4.1 Vamos ver agora como usar o conceito de ortogonalidade para aproximar elementos de um espaço vetorial por outros em um do subespaço. Isso será útil, por exemplo, se quisermos aproximar uma dada função por um polinômio. Começamos com a seguinte proposição.

**PROPOSIÇÃO.** Sejam  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial com produto interno e  $W$  um subespaço de  $V$  com dimensão finita. Então, dado  $v \in V$ , existe um único  $w \in W$  tal que  $v - w \in W^\perp$ .

**DEMONSTRAÇÃO.** Seja  $\{w_1, \dots, w_n\}$  uma base ortogonal do subespaço  $W$ . Dado  $v \in V$ , considere o vetor

$$w = \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \dots + \frac{\langle v, w_n \rangle}{\|w_n\|^2} w_n.$$

É claro que  $w \in W$  e não é difícil provar que  $\langle v - w, w_i \rangle = 0$ , para cada  $i = 1, \dots, n$ . Assim, segue da Proposição 6.3.3 que  $v - w \in W^\perp$ .

Para provarmos a unicidade de  $w$ , vamos supor que existam  $w, w' \in W$  tais que  $v - w \in W^\perp$  e  $v - w' \in W^\perp$ . Então

$$\begin{aligned} \langle w - w', w - w' \rangle &= \langle w - w', w - w' + v - v \rangle \\ &= \langle w - w', w \rangle + \langle w - w', v \rangle + \langle w - w', w' \rangle = 0 \end{aligned}$$

pois  $w - w' \in W$ ,  $w - v \in W^\perp$  e  $v - w' \in W^\perp$ . Consequentemente,  $w - w' = 0$  ou seja  $w = w'$ , como queríamos.  $\square$

**6.4.2 DEFINIÇÃO.** Sejam  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial com produto interno e  $W \subseteq V$ , um subespaço de  $V$ . Se dado  $v \in V$ , existir  $w \in W$