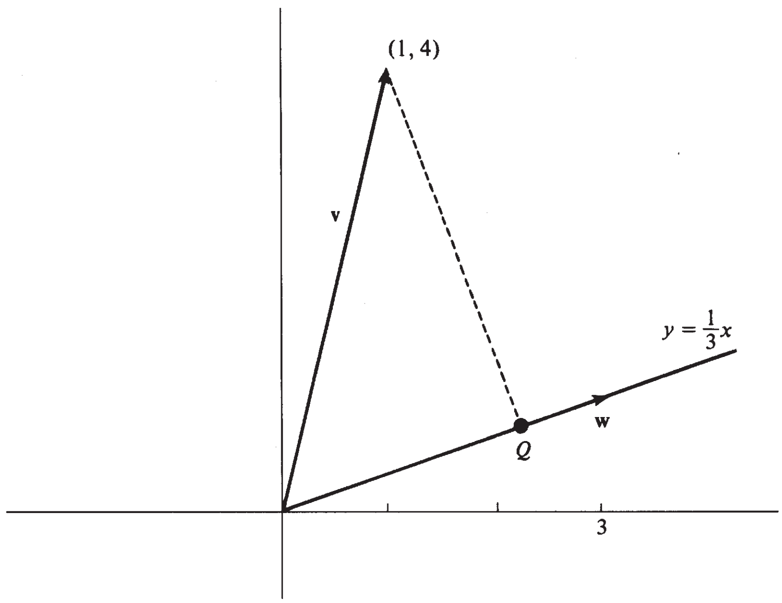



**FIG. 5.1.3**

SOLUÇÃO. O vetor $\mathbf{N} = (1, 2, 2)^T$ é normal ao plano e o plano contém a origem. Seja $\mathbf{v} = (2, 0, 0)^T$. A distância $d$ de (2, 0, 0) ao plano é, simplesmente, o valor absoluto da projeção escalar de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{N}$. Logo,

$$d = \frac{|\mathbf{v}^T\mathbf{N}|}{\|\mathbf{N}\|} = \frac{2}{3}$$

□

## ORTOGONALIDADE EM $R^n$

Todas as definições que foram dadas para $R^2$ e $R^3$ podem ser generalizadas para $R^n$. De fato, se $\mathbf{x} \in R^n$, o comprimento euclidiano de $\mathbf{x}$ é definido por

$$\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^T\mathbf{x})^{1/2} = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$$

e o ângulo $\theta$ entre dois vetores não-nulos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é dado por

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\ \|\mathbf{y}\|}$$

Os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ditos *ortogonais* se $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$. O símbolo "$\perp$" é utilizado muitas vezes para indicar ortogonalidade. Então, se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ortogonais, escreveremos $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. As projeções vetoriais e escalares são definidas em $R^n$ da mesma maneira que em $R^2$. Uma das aplicações principais desses conceitos é a solução de problemas de mínimos quadráticos. Estudaremos problemas de mínimos quadráticos na Seção 4.

## EXERCÍCIOS

**1.** Encontre o ângulo entre cada par de vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ a seguir.

(a) $\mathbf{v} = (2, 1, 3)^T$, $\quad\mathbf{w} = (6, 3, 9)^T$
(b) $\mathbf{v} = (2, -3)^T$, $\quad\mathbf{w} = (3, 2)^T$
(c) $\mathbf{v} = (4, 1)^T$, $\quad\mathbf{w} = (3, 2)^T$
(d) $\mathbf{v} = (-2, 3, 1)^T$, $\quad\mathbf{w} = (1, 2, 4)^T$

**2.** Para cada par de vetores no Exercício 1, encontre a projeção escalar de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{w}$. Encontre, também, a projeção vetorial de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{w}$.

**3.** Para cada par de vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ a seguir, encontre a projeção $\mathbf{p}$ de $\mathbf{x}$ sobre $\mathbf{y}$ e verifique que $\mathbf{p}$ e $\mathbf{x} - \mathbf{p}$ são ortogonais.

(a) $\mathbf{x} = (3, 4)^T$, $\quad \mathbf{y} = (1, 0)^T$
(b) $\mathbf{x} = (3, 5)^T$, $\quad \mathbf{y} = (1, 1)^T$
(c) $\mathbf{x} = (2, 4, 3)^T$, $\quad \mathbf{y} = (1, 1, 1)^T$
(d) $\mathbf{x} = (2, -5, 4)^T$, $\quad \mathbf{y} = (1, 2, -1)^T$

**4.** Encontre o ponto mais próximo de (5, 2) que pertence à reta $y = 2x$.

**5.** Encontre o ponto mais próximo de (5, 2) que pertence à reta $y = 2x + 1$.

**6.** Encontre a distância do ponto (1, 2) à reta $4x - 3y = 0$.

**7.** Em cada um dos itens a seguir, encontre a equação do plano normal ao vetor $\mathbf{N}$ dado que contém o ponto $P_0$.

(a) $\mathbf{N} = (2, 4, 3)^T$, $\quad P_0 = (0, 0, 0)$
(b) $\mathbf{N} = (-3, 6, 2)^T$, $\quad P_0 = (4, 2, -5)$
(c) $\mathbf{N} = (0, 0, 1)^T$, $\quad P_0 = (3, 2, 4)$

**8.** Encontre a distância do ponto (1, 1, 1) ao plano $2x + 2y + z = 0$.

**9.** Encontre a distância do ponto (2, 1, −2) ao plano $6(x - 1) + 2(y - 3) + 3(z + 4) = 0$.

**10.** Se $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ e $\mathbf{z} = (z_1, z_2)^T$ são vetores arbitrários em $R^2$, prove que:

(a) $\mathbf{x}^T\mathbf{x} \geq 0$ $\qquad$ (b) $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{x}$
(c) $\mathbf{x}^T(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y} + \mathbf{x}^T\mathbf{z}$

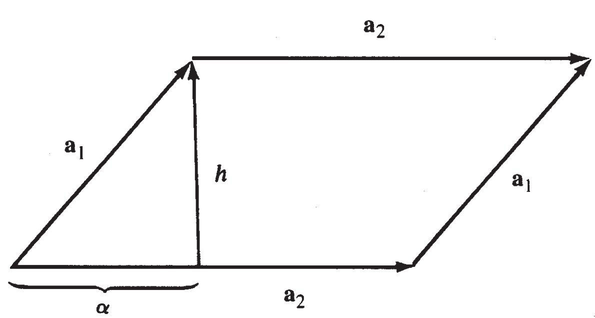
**11.** Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são dois vetores quaisquer em $R^2$, mostre que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 \leq (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2$ e, portanto, $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$. Quando a igualdade é válida? Interprete geometricamente essa desigualdade.

**12.** Sejam $l_1$ a reta $y = m_1x + b_1$, $m_1 \neq 0$, e $l$ a reta $y = mx + b$. Mostre que $l$ é perpendicular a $l_1$ se e somente se $m = -1/m_1$.

**13.** Sejam $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ vetores em $R^3$. Se $\mathbf{x}_1 \perp \mathbf{x}_2$ e $\mathbf{x}_2 \perp \mathbf{x}_3$, é necessariamente verdade que $\mathbf{x}_1 \perp \mathbf{x}_3$? Prove.

**14.** Seja $A$ uma matriz $2 \times 2$ com vetores colunas $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ linearmente independentes. Se $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ são usados para formar um paralelogramo $P$ de altura $h$ (ver a figura seguir), mostre que:

(a) $h^2\|\mathbf{a}_2\|^2 = \|\mathbf{a}_1\|^2\|\mathbf{a}_2\|^2 - (\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_2)^2$
(b) Área de $P = |\det(A)|$




# 2 SUBESPAÇOS ORTOGONAIS

Seja $A$ uma matriz $m \times n$ e seja $\mathbf{x} \in N(A)$. Como $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, temos

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0 \tag{1}$$