SOLUÇÃO. Para esse exemplo, o sistema (6) fica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

As equações normais são, então,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ou seja,

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 22 \\ 54 \end{pmatrix}$$

A solução desse sistema é $(2{,}75, -0{,}25, 0{,}25)$. O polinômio de grau dois que corresponde ao melhor ajuste de mínimos quadráticos para esses dados é

$$p(x) = 2{,}75 - 0{,}25x + 0{,}25x^2 \qquad \square$$

EXERCÍCIOS

1. Encontre a solução de mínimos quadráticos para cada um dos sistemas a seguir.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 1 \\ 0x_1 + 0x_2 &= 2 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 &= 20 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

2. Para cada uma das soluções $\hat{\mathbf{x}}$ encontradas no Exercício 1:
(a) Determine a projeção ortogonal $\mathbf{p} = A\hat{\mathbf{x}}$;
(b) Calcule o resíduo $r(\hat{\mathbf{x}})$;
(c) Verifique que $r(\hat{\mathbf{x}}) \in N(A^T)$.

3. Para cada um dos sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a seguir, encontre todas as soluções de mínimos quadráticos.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

4. Para cada um dos sistemas no Exercício 3, determine a projeção ortogonal $\mathbf{p}$ de $\mathbf{b}$ sobre $I(A)$ e verifique que $\mathbf{b} - \mathbf{p}$ é ortogonal a cada uma das colunas de A.

5. (a) Encontre o melhor ajuste de mínimos quadráticos por uma função linear para os dados

x	-1	0	1	2
y	0	1	3	9

(b) Coloque em um sistema de coordenadas a função linear encontrada no item (a) junto com os dados.

6. Encontre o melhor ajuste de mínimos quadráticos por um polinômio de grau dois para os dados no Exercício 5. Coloque os pontos correspondentes a $x = -1, 0, 1, 2$ e desenhe o gráfico da função.

7. Seja A uma matriz $m \times n$ de posto r e seja $P = A(A^TA)^{-1}A^T$.
(a) Mostre que $P\mathbf{b} = \mathbf{b}$ para todo $\mathbf{b} \in I(A)$. Explique essa propriedade em termos de projeções.
(b) Se $\mathbf{b} \in I(A)^\perp$, mostre que $P\mathbf{b} = \mathbf{0}$.
(c) Ilustre geometricamente os itens (a) e (b) no caso em que $I(A)$ é um plano contendo a origem em R^3.

8. Seja $P = A(A^TA)^{-1}A^T$, onde A é uma matriz $m \times n$ de posto n.
(a) Mostre que $P^2 = P$.
(b) Prove que $P^k = P$ para $k = 1, 2, \ldots$.
(c) Mostre que P é simétrica.

[***Lembre:*** Se B é invertível, então $(B^{-1})^T = (B^T)^{-1}$.]

9. Mostre que, se

$$\begin{pmatrix} A & I \\ O & A^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

então $\hat{\mathbf{x}}$ é a solução de mínimos quadráticos para o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e $\mathbf{r}$ é o vetor resíduo.

10. Seja $A \in R^{m\times n}$ e seja $\hat{\mathbf{x}}$ uma solução para o problema de mínimos quadráticos para $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Mostre que um vetor $\mathbf{y} \in R^n$ é também solução se e somente se $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{z}$ para algum $\mathbf{z} \in N(A)$.

[***Sugestão:*** $N(A^TA) = N(A)$.]

5 CONJUNTOS ORTONORMAIS

É geralmente mais conveniente usar a base canônica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ para R^2 do que alguma outra base, como $\{(2, 1)^T, (3, 5)^T\}$. Por exemplo, é mais fácil encontrar as coordenadas de $(x_1, x_2)^T$ em relação à base canônica. Os elementos da base canônica são vetores unitários ortogonais. Ao trabalhar em um espaço V munido de produto interno, é geralmente desejável usar uma base com vetores unitários ortogonais dois a dois. Isso é conveniente não apenas para encontrar coordenadas de vetores, mas para resolver problemas de mínimos quadráticos.

Definição. Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vetores em um espaço V munido de produto interno. Se $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ sempre que $i \neq j$, então $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é dito um **conjunto ortogonal** de vetores.

EXEMPLO 1. O conjunto $\{(1, 1, 1)^T, (2, 1, -3)^T, (4, -5, 1)^T\}$ é um conjunto ortogonal em R^3, já que

$$(1, 1, 1)(2, 1, -3)^T = 0$$
$$(1, 1, 1)(4, -5, 1)^T = 0$$
$$(2, 1, -3)(4, -5, 1)^T = 0$$

□

Teorema 5.5.1. *Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é um conjunto ortogonal de vetores não-nulo em um espaço V munido de um produto interno, então $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ são linearmente independentes.*