Teorema 6.1.1. *Sejam A e B matrizes n × n. Se B é semelhante a A, então as duas matrizes têm o mesmo polinômio característico e, portanto, os mesmos autovalores.*

Demonstração. Vamos denotar por $p_A(x)$ e $p_B(x)$ os polinômios característicos de A e B, respectivamente. Se B é semelhante a A, existe uma matriz invertível S tal que $B = S^{-1}AS$. Temos, então,

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) \\ &= \det(S^{-1}AS - \lambda I) \\ &= \det(S^{-1}(A - \lambda I)S) \\ &= \det(S^{-1})\det(A - \lambda I)\det(S) \\ &= p_A(\lambda) \end{aligned}$$

Os autovalores da matriz são as raízes do polinômio característico. Como as duas matrizes têm o mesmo polinômio característico, elas têm que ter os mesmos autovalores. □

EXEMPLO 6. Sejam

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

É fácil ver que os autovalores de T são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. Definindo $A = S^{-1}TS$, os autovalores de A devem ser iguais aos de T.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Deixamos a cargo do leitor a verificação de que os autovalores dessa matriz são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. □

EXERCÍCIOS

1. Encontre os autovalores e os auto-espaços correspondentes de cada uma das matrizes a seguir.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (j) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(k) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (l) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Mostre que os autovalores de uma matriz triangular são os elementos diagonais da matriz.

3. Seja A uma matriz $n \times n$. Mostre que A é singular se e somente se $\lambda = 0$ é um autovalor de A.

4. Seja A uma matriz invertível e seja λ um autovalor de A. Mostre que $1/\lambda$ é um autovalor de A^{-1}.

5. Seja λ um autovalor de A e seja $\mathbf{x}$ uma autovetor associado. Use indução matemática para mostrar que λ^m é um autovalor de A^m e que $\mathbf{x}$ é um autovetor de A^m associado a λ^m para $m = 1, 2, \ldots$.

6. Uma matriz A $n \times n$ é dita idempotente se $A^2 = A$. Mostre que, se λ é um autovalor de uma matriz idempotente, então λ tem que ser igual a 0 ou a 1.

7. Uma matriz A $n \times n$ é dita nilpotente se $A^k = O$ para algum inteiro positivo k. Mostre que todos os autovalores de uma matriz nilpotente são nulos.

8. Seja A uma matriz $n \times n$ e seja $B = A - \alpha I$, onde α é um escalar. Qual a relação entre os autovalores de A e de B? Explique.

9. Mostre que A e A^T têm os mesmos autovalores. Elas têm necessariamente os mesmos autovetores? Explique.

10. Mostre que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

vai ter autovalores complexos se θ não for um múltiplo de π. Interprete esse resultado geometricamente.

11. Seja A uma matriz 2×2. Se $\operatorname{tr}(A) = 8$ e $\det(A) = 12$, quais são os autovalores de A?

12. Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$ com autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Mostre que

$$\lambda_j = a_{jj} + \sum_{i \neq j} (a_{ii} - \lambda_i) \qquad \text{para} \quad j = 1, \ldots, n$$

13. Seja A uma matriz 2×2 e seja $p(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$ o polinômio característico de A. Mostre que $b = -\operatorname{tr}(A)$ e que $c = \det(A)$.

14. Seja λ um autovalor não-nulo de A e seja $\mathbf{x}$ um autovetor associado. Mostre que $A^m\mathbf{x}$ também é um autovetor associado a λ para $m = 1, 2, \ldots$.

15. Seja A uma matriz $n \times n$ e seja λ um autovalor de A. Se $A - \lambda I$ tem posto k, qual é a dimensão do auto-espaço associado a λ? Explique.

16. Seja A uma matriz $n \times n$. Mostre que um vetor $\mathbf{x}$ em R^n é um autovetor de A se e somente se o subespaço S de R^n gerado por $\mathbf{x}$ e $A\mathbf{x}$ tem dimensão 1.

17. Sejam $\alpha = a + bi$ e $\beta = c + di$ escalares complexos e sejam A e B matrizes com coeficientes reais.

(a) Mostre que

$$\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta} \qquad \text{e} \qquad \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$$

(b) Mostre que os elementos (i, j) de $\overline{AB}$ e de $\overline{A}\ \overline{B}$ são iguais e, portanto, que

$$\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$$

18. Sejam $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ autovetores de uma matriz A $n \times n$ e seja S o subespaço de R^n gerado por $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r$. Mostre que S é invariante sob A (isto é, mostre que $A\mathbf{x} \in S$ sempre que $\mathbf{x} \in S$).

19. Seja $B = S^{-1}AS$ e seja $\mathbf{x}$ um autovetor de B associado a um autovalor λ. Mostre que $S\mathbf{x}$ é um autovetor de A associado a λ.

20. Mostre que, se duas matrizes A e B têm um autovetor em $\mathbf{x}$ em comum (mas não necessariamente um autovalor em comum), então $\mathbf{x}$ é também um autovetor de qualquer matriz da forma $C = \alpha A + \beta B$.

21. Seja A uma matriz $n \times n$ e seja λ um autovalor de A. Mostre que, se $\mathbf{x}$ é um autovetor associado a λ, então $\mathbf{x}$ pertence ao espaço coluna de A.

22. Seja $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ uma base ortonormal para R^n e sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ escalares. Defina

$$A = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T + \cdots + \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T$$

Mostre que A é uma matriz simétrica com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ e que $\mathbf{u}_i$ é um autovetor associado a λ_i para cada i.

23. Seja A uma matriz tal que a soma de cada uma de suas colunas é igual a uma constante fixa δ. Mostre que δ é um autovalor de A.

24. Sejam λ_1 e λ_2 autovalores distintos de A. Seja $\mathbf{x}$ um autovetor de A associado a λ_1 e seja $\mathbf{y}$ um autovetor de A^T associado a λ_2. Mostre que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ortogonais.

25. Sejam A e B matrizes $n \times n$. Mostre que:
(a) Se λ é um autovalor não-nulo de AB, então também é um autovalor de BA;
(b) Se $\lambda = 0$ é um autovalor de AB, então $\lambda = 0$ também é um autovalor de BA.

26. Prove que não existem matrizes A e B $n \times n$ tais que $AB - BA = I$.
[***Sugestão:*** veja os Exercícios 8 e 25.]

27. Seja $p(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - a_1\lambda - a_0)$ um polinômio de grau $n \geq 1$ e seja

$$C = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Mostre que, se λ_i é uma raiz de $p(\lambda) = 0$, então λ_i é um autovalor de C com autovetor associado $\mathbf{x} = (\lambda_i^{n-1}, \lambda_i^{n-2}, \dots, \lambda_i, 1)^T$.
(b) Use o item (a) para mostrar que, se $p(\lambda)$ tem raízes distintas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, então $p(\lambda)$ é o polinômio característico de C.

A matriz C é chamada de *matriz companheira* de $p(\lambda)$.

28. O resultado dado no Exercício 27(b) é válido mesmo que as raízes de $p(\lambda)$ não sejam distintas. Prove isso da seguinte maneira:
(a) Seja

$$D_m(\lambda) = \begin{pmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

e use indução matemática para mostrar que

$$\det(D_m(\lambda)) = (-1)^m(a_m\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)$$

(b) Mostre que

$$\det(C - \lambda I) = (a_{n-1} - \lambda)(-\lambda)^{n-1} - \det(D_{n-2}) = p(\lambda)$$

2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

Autovalores têm um papel importante na solução de sistemas de equações diferenciais lineares. Nesta seção, vamos ver como usá-los na solução de sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. Vamos começar considerando sistemas de equações de primeira ordem da forma

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{aligned}$$