SOLUÇÃO. Os autovalores de A são $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -1$ com autovetores associados $\mathbf{x}_1 = (4, 3)^T$ e $\mathbf{x}_2 = (1, -1)^T$. Logo,

$$A = XDX^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

e a solução é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= e^{At}\mathbf{Y}_0 \\ &= Xe^{Dt}X^{-1}\mathbf{Y}_0 \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4e^{6t} + 2e^{-t} \\ 3e^{6t} - 2e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Compare com o Exemplo 1 da Seção 2. □

EXEMPLO 7. Use a exponencial de uma matriz para resolver o problema de valor inicial

$$\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}, \qquad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

SOLUÇÃO. Como a matriz A não é diagonalizável, vamos calcular e^{At} pela definição. Observe que $A^3 = O$, de modo que

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A solução do problema de valor inicial é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= e^{At}\mathbf{Y}_0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 + t + 2t^2 \\ 1 + 4t \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

EXERCÍCIOS

1. Fatore cada uma das matrizes A a seguir em um produto XDX^{-1}, onde D é diagonal.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ (d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

2. Para cada uma das matrizes no Exercício 1, use a fatoração XDX^{-1} para calcular A^6.

3. Para cada uma das matrizes invertíveis no Exercício 1, use a fatoração XDX^{-1} para calcular A^{-1}.

4. Para cada uma das matrizes a seguir, encontre uma matriz B tal que $B^2 = A$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Seja A uma matriz diagonalizável $n \times n$ com matriz diagonalizante X. Mostre que a matriz $Y = (X^{-1})^T$ diagonaliza A^T.

6. Seja A uma matriz diagonalizável cujos autovalores são iguais a 1 ou a -1. Mostre que $A^{-1} = A$.

7. Mostre que qualquer matriz 3×3 da forma

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

não é diagonalizável.

8. Para cada uma das matrizes a seguir, encontre todos os valores possíveis do escalar α que faz com que a matriz não seja diagonalizável ou mostre que não existe tal valor.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

9. Seja A uma matriz 4×4 e seja λ um autovalor de multiplicidade 3. Se $A - \lambda I$ tem posto 1, A é diagonalizável? Explique.

10. Seja A uma matriz $n \times n$ com autovalores reais positivos $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$. Seja $\mathbf{x}_i$ o autovetor associado a λ_i para cada i e seja $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{x}_n$.

(a) Mostre que $A^m\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^m \mathbf{x}_i$.

(b) Se $\lambda_1 = 1$, mostre que $\lim_{m\to\infty} A^m\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1$.

11. Seja A uma matriz $n \times n$ com um autovalor λ de multiplicidade n. Mostre que A é diagonalizável se e somente se $A = \lambda I$.

12. Mostre que uma matriz nilpotente não-nula não é diagonalizável.

13. Seja A uma matriz diagonalizável com matriz diagonalizante X. Mostre que os vetores colunas de X associados aos autovalores não-nulos de A formam uma base para $R(A)$.

14. Segue do Exercício 13 que, para uma matriz diagonalizável, o número de autovalores não-nulos (contados de acordo com suas multiplicidades) é igual ao posto da matriz. Dê um exemplo de uma matriz não diagonalizável cujo posto não é igual ao número de autovalores não-nulos.

15. Seja A uma matriz $n \times n$ e seja λ um autovalor de A cujo auto-espaço tem dimensão k, onde $1 < k < n$. Qualquer base $\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k\}$ para o auto-espaço pode ser estendida a uma base $\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, ..., \mathbf{x}_n\}$ para R^n. Sejam $X = (\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$ e $B = X^{-1}AX$.

(a) Mostre que B é da forma

$$\begin{pmatrix} \lambda I & B_{12} \\ O & B_{22} \end{pmatrix}$$

onde I é a matriz identidade $k \times k$.

(b) Use o Teorema 6.1.1 para mostrar que λ é um autovalor de A com multiplicidade pelo menos k.

16. Sejam $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ vetores não-nulos em R^n, $n \geq 2$, e seja $A = \mathbf{x}\mathbf{y}^T$. Mostre que:

(a) Zero é um autovalor de A com $n - 1$ autovetores linearmente independentes e, portanto, tem multiplicidade pelo menos $n - 1$ (ver Exercício 15);

(b) O outro autovalor de A é

$$\lambda_n = \operatorname{tr} A = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$$

e $\mathbf{x}$ é um autovetor associado a λ_n;

(c) Se $\lambda_n = \mathbf{x}^T\mathbf{y} \neq 0$, então A é diagonalizável.

17. Seja A uma matriz diagonalizável $n \times n$. Prove que, se B é uma matriz semelhante a A, então B é diagonalizável.

18. Mostre que, se A e B são duas matrizes $n \times n$ com a mesma matriz diagonalizante X, então $AB = BA$.

19. A cidade de Mawtookit mantém uma população constante de 300.000 pessoas. Uma pesquisa em ciência política estimou que existem na cidade 150.000 independentes, 90.000 democratas e 60.000 republicanos.* Estimou-se, também, que, a cada ano, 20% dos independentes tornam-se democratas e 10% tornam-se republicanos. Analogamente, 20% dos democratas tornam-se independentes e 10% tornam-se republicanos, enquanto 10% dos republicanos viram democratas e 10% tornam-se independentes a cada ano. Seja

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 150.000 \\ 90.000 \\ 60.000 \end{pmatrix}$$

e seja $\mathbf{x}^{(1)}$ um vetor representando o número de pessoas em cada grupo após 1 ano.

(a) Encontre uma matriz A tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)}$.

(b) Mostre que $\lambda_1 = 1,0$, $\lambda_2 = 0,5$ e $\lambda_3 = 0,7$ são os autovalores de A e fatore A em um produto XDX^{-1}, onde D é diagonal.

(c) Qual grupo deverá dominar a longo prazo? Justifique sua resposta calculando $\lim_{n\to\infty} A^n\mathbf{x}$.

20. Na Aplicação 1, suponha que existem inicialmente p mulheres casadas e $10.000 - p$ mulheres solteiras ou divorciadas, onde $0 \leq p \leq 10.000$. Determine quantas mulheres casadas e quantas solteiras ou divorciadas deverão existir a longo prazo. Sua resposta depende de p? Explique.

21. Use a definição de exponencial de uma matriz para calcular e^A para cada uma das matrizes a seguir.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

*Nos Estados Unidos, existem apenas dois grandes partidos, o Partido Democrata e o Partido Republicano; eleitores de outros partidos, bem pequenos, são chamados de independentes. (*N. T.*)

22. Calcule e^A para cada uma das matrizes a seguir.

(a) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

23. Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$, $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0$ em cada um dos itens seguintes calculando $e^{At}\mathbf{Y}_0$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

24. Seja λ um autovalor de uma matriz A $n \times n$ e seja $\mathbf{x}$ um autovetor associado a λ. Mostre que e^λ é um autovalor de e^A e que $\mathbf{x}$ é um autovetor associado a e^λ.

25. Mostre que e^A é invertível para toda matriz diagonalizável A.

26. Seja A uma matriz diagonalizável com polinômio característico

$$p(\lambda) = a_1\lambda^n + a_2\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n+1}$$

(a) Se D é uma matriz diagonal cujos elementos diagonais são os autovalores de A, mostre que

$$p(D) = a_1 D^n + a_2 D^{n-1} + \cdots + a_{n+1} I = O$$

(b) Mostre que $p(A) = O$.

(c) Mostre que, se $a_{n+1} \neq 0$, então A é invertível e $A^{-1} = q(A)$ para algum polinômio q de grau menor do que n.

4 MATRIZES AUTO-ADJUNTAS

Vamos denotar por C^n o espaço vetorial de todas as n-uplas de números complexos. O conjunto C dos números complexos será o nosso corpo de escalares. Já vimos que uma matriz A com todos os elementos reais pode ter autovalores e autovetores complexos. Vamos estudar nesta seção matrizes com elementos complexos e considerar os análogos complexos de matrizes simétricas e ortogonais.

PRODUTOS INTERNOS COMPLEXOS

Se $\alpha = a + bi$ é um escalar complexo, o comprimento de α é dado por

$$|\alpha| = \sqrt{\bar{\alpha}\alpha} = \sqrt{a^2 + b^2}$$