No entanto,

$$AA^H = UDU^HUD^HU^H = UDD^HU^H$$

e

$$A^HA = UD^HU^HUDU^H = UD^HDU^H$$

Como

$$D^HD = DD^H = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & & \\ & |\lambda_2|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix}$$

temos que

$$AA^H = A^HA$$

Definição. Uma matriz A é dita **normal** se $AA^H = A^HA$.

Mostramos que, se existe um conjunto ortonormal completo de autovetores de uma matriz, então ela é normal. A recíproca também é verdadeira.

Teorema 6.4.6. *Uma matriz A é normal se e somente existe um conjunto ortonormal completo de autovetores de A.*

Demonstração. Em vista das observações anteriores, precisamos mostrar, apenas, que existe um conjunto completo de autovetores para toda matriz normal A. Pelo Teorema 6.4.3, existem uma matriz unitária U e uma matriz triangular T tais que $T = U^HAU$. Vamos mostrar que T é normal.

$$T^HT = U^HA^HUU^HAU = U^HA^HAU$$

e

$$TT^H = U^HAUU^HA^HU = U^HAA^HU$$

Como $A^HA = AA^H$, temos que $T^HT = TT^H$. Comparando os elementos diagonais de TT^H e T^HT, vemos que

$$\begin{aligned} |t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + |t_{13}|^2 + \cdots + |t_{1n}|^2 &= |t_{11}|^2 \\ |t_{22}|^2 + |t_{23}|^2 + \cdots + |t_{2n}|^2 &= |t_{12}|^2 + |t_{22}|^2 \\ &\vdots \\ |t_{nn}|^2 &= |t_{1n}|^2 + |t_{2n}|^2 + |t_{3n}|^2 + \cdots + |t_{nn}|^2 \end{aligned}$$

Então $t_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$. Logo, U diagonaliza A e as colunas de U são autovetores de A. □

EXERCÍCIOS

1. Para cada um dos pares dados de vetores **z** e **w** em C^2, calcule (i) $\|\mathbf{z}\|$, (ii) $\|\mathbf{w}\|$, (iii) $\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle$, (iv) $\langle \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle$.

(a) $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 4+2i \\ 4i \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2+i \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \\ 3-i \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2-4i \\ 5 \\ 2i \end{pmatrix}$

2. Sejam

$$\mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(a) Mostre que $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\}$ é um conjunto ortonormal em C^2.

(b) Escreva o vetor $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2+4i \\ -2i \end{pmatrix}$ como uma combinação linear de $\mathbf{z}_1$ e $\mathbf{z}_2$.

3. Seja $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ uma base ortonormal para C^2 e seja $\mathbf{z} = (4 + 2i)\mathbf{u}_1 + (6 - 5i)\mathbf{u}_2$.

(a) Quais os valores de $\mathbf{u}_1^H\mathbf{z}$, $\mathbf{z}^H\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2^H\mathbf{z}$ e $\mathbf{z}^H\mathbf{u}_2$?

(b) Determine o valor de $\|\mathbf{z}\|$.

4. Quais das matrizes a seguir são auto-adjuntas? Quais são normais?

(a) $\begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2-i \\ 2+i & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $\qquad$ (d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}i \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ i & 0 & -2+i \\ -1 & 2+i & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ (f) $\begin{pmatrix} 3 & 1+i & i \\ 1-i & 1 & 3 \\ -i & 3 & 1 \end{pmatrix}$

5. Encontre uma matriz diagonalizante ortogonal ou unitária para cada uma das matrizes a seguir.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 3+i \\ 3-i & 4 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ (d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

6. Mostre que os elementos diagonais de uma matriz auto-adjunta têm que ser reais.
7. Sejam A e C matrizes em $C^{m\times n}$ e seja $B \in C^{n\times r}$. Prove cada uma das regras a seguir.

(a) $(A^H)^H = A$
(b) $(\alpha A + \beta C)^H = \overline{\alpha} A^H + \overline{\beta} C^H$
(c) $(AB)^H = B^H A^H$

8. Mostre que

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{w}^H \mathbf{z}$$

define um produto interno em C^n.
9. Seja $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\}$ uma base ortonormal para um espaço vetorial V munido de um produto interno complexo e sejam $\mathbf{z}$ e $\mathbf{w}$ elementos de V. Mostre que

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (\langle \mathbf{z}, \mathbf{u}_i \rangle \cdot \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{w} \rangle)$$

10. Dada

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}$$

encontre uma matriz B tal que $B^H B = A$.
11. Seja U uma matriz unitária. Prove que:
(a) U é normal;
(b) $\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ para todo $\mathbf{x}$ em C^n;
(c) Se λ é um autovalor de U, então $|\lambda| = 1$.
12. Seja $\mathbf{u}$ um vetor unitário em C^n e defina $U = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^H$. Mostre que U é unitária e auto-adjunta, de modo que é igual à sua própria inversa.
13. Mostre que, se uma matriz U é unitária e auto-adjunta, então qualquer autovalor de U tem que ser igual a 1 ou a -1.
14. Seja A uma matriz 2×2 com decomposição de Schur UTU^H e suponha que $t_{12} \neq 0$. Mostre que:
(a) Os autovalores de A são $\lambda_1 = t_{11}$ e $\lambda_2 = t_{22}$;
(b) $\mathbf{u}_1$ é um autovetor associado a $\lambda_1 = t_{11}$;
(c) $\mathbf{u}_2$ não é um autovetor associado a $\lambda_2 = t_{22}$.
15. Mostre que $M = A + iB$ (A e B matrizes reais) é antiadjunta se e somente se A é anti-simétrica e B é simétrica.
16. Mostre que, se A é antiadjunta e se λ é um autovalor de A, então λ é um imaginário puro (isto é, $\lambda = bi$, onde b é real).
17. Seja A uma matriz 2×2 com a propriedade de que $a_{21}a_{12} > 0$.
(a) Faça $r = \sqrt{a_{21}/a_{12}}$, $S = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e calcule $B = SAS^{-1}$.
(b) O que você pode concluir sobre os autovalores e autovetores de B? O que você pode concluir sobre os autovalores e autovetores de A? Explique.
18. Seja $p(x) = -x^3 + cx^2 + (c+3)x + 1$, onde c é um número real. Seja C a matriz companheira de $p(x)$,

$$C = \begin{pmatrix} c & c+3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e seja

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -c-3 \\ 1 & -1 & c+2 \\ -1 & 1 & -c-1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule $A^{-1}CA$.
(b) Use o resultado do item (a) para provar que $p(x)$ tem apenas raízes reais, independentemente do valor de c.

19. Seja A uma matriz auto-adjunta com autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e autovetores ortonormais $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$. Mostre que

$$A = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^H + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^H + \cdots + \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^H$$

20. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Escreva A como uma soma $\lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T$, onde λ_1 e λ_2 são autovalores e $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ autovetores ortonormais.

21. Seja A uma matriz auto-adjunta com autovalores $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ e autovetores ortonormais $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$. Qualquer que seja o vetor não-nulo $\mathbf{x}$ em R^n, o *quociente de Rayleigh* $\rho(\mathbf{x})$ é definido por

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} = \frac{\mathbf{x}^H A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^H \mathbf{x}}$$

(a) Se $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{u}_n$, mostre que

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{|\alpha_1|^2\lambda_1 + |\alpha_2|^2\lambda_2 + \cdots + |\alpha_n|^2\lambda_n}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}$$

(b) Mostre que

$$\lambda_1 \leq \rho(\mathbf{x}) \leq \lambda_n$$

5 FORMAS QUADRÁTICAS

A essa altura o leitor já deve estar bem consciente do papel importante das matrizes no estudo de equações lineares. Nesta seção, vamos ver que as matrizes também têm um papel importante no estudo das equações quadráticas. A cada equação de segundo grau podemos associar uma função vetorial $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$. Tal função vetorial é chamada de uma "forma quadrática". Formas quadráticas aparecem em uma grande variedade de problemas aplicados. Elas são particularmente importantes na teoria de otimização.

Definição. Uma **equação quadrática** em duas variáveis x e y é uma equação da forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{1}$$

A Equação (1) pode ser colocada na forma

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0 \tag{2}$$

Sejam

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$