O item (d) pode ser resolvido de maneira semelhante a (b). Se

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

então

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 &= a \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= b \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 &= c \end{aligned}$$

Nesse caso, no entanto, a matriz de coeficientes é singular. O método de Gauss nos leva a um sistema da forma

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 &= a \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 &= \frac{2a-b}{3} \\ 0 &= 2a - 3c + 5b \end{aligned}$$

Se

$$2a - 3c + 5b \neq 0$$

então o sistema é incompatível. Portanto, para a maioria das escolhas para a, b, c, é impossível expressar $(a, b, c)^T$ como uma combinação linear de $(1, 2, 4)^T$, $(2, 1, 3)^T$, $(4, -1, 1)^T$. Os vetores não geram R^3. □

EXEMPLO 12. Os vetores $1 - x^2$, $x + 2$ e x^2 geram P_3. Então, se $ax^2 + bx + c$ é qualquer polinômio em P_3, é possível encontrar escalares α_1, α_2 e α_3 tais que

$$ax^2 + bx + c = \alpha_1(1 - x^2) + \alpha_2(x + 2) + \alpha_3 x^2$$

De fato,

$$\alpha_1(1 - x^2) + \alpha_2(x + 2) + \alpha_3 x^2 = (\alpha_3 - \alpha_1)x^2 + \alpha_2 x + (\alpha_1 + 2\alpha_2)$$

Fazendo

$$\begin{aligned} \alpha_3 - \alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= b \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 &= c \end{aligned}$$

e resolvendo, obtemos $\alpha_1 = c - 2b$, $\alpha_2 = b$ e $\alpha_3 = a + c - 2b$. □

Vimos, no Exemplo 11(a), que os vetores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $(1, 2, 3)^T$ geram R^3. É claro que R^3 poderia ser gerado apenas pelos vetores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. O vetor $(1, 2, 3)^T$ não é realmente necessário. Na próxima seção, vamos considerar o problema de encontrar conjuntos geradores mínimos para um espaço vetorial V (isto é, conjuntos geradores que contêm o menor número possível de vetores).

EXERCÍCIOS

1. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um subespaço de R^2.
   (a) $\{(x_1, x_2)^T \mid x_1 + x_2 = 0\}$
   (b) $\{(x_1, x_2)^T \mid x_1 x_2 = 0\}$
   (c) $\{(x_1, x_2)^T \mid x_1 = 3x_2\}$
   (d) $\{(x_1, x_2)^T \mid x_1 = 3x_2 + 1\}$

2. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um subespaço de R^3.
   (a) $\{(x_1, x_2, x_3)^T \mid x_1 + x_3 = 1\}$
   (b) $\{(x_1, x_2, x_3)^T \mid x_1 = x_2 = x_3\}$

(c) $\{(x_1, x_2, x_3)^T \mid x_3 = x_1 + x_2\}$
(d) $\{(x_1, x_2, x_3)^T \mid x_3 = x_1^2 + x_2^2\}$

3. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um subespaço de $R^{2\times 2}$.
(a) O conjunto de todas as matrizes diagonais 2×2.
(b) O conjunto de todas as matrizes triangulares inferiores 2×2.
(c) O conjunto de todas as matrizes A 2×2 tais que $a_{12} = 1$.
(d) O conjunto de todas as matrizes B 2×2 tais que $b_{11} = 0$.
(e) O conjunto de todas as matrizes simétricas 2×2.
(f) O conjunto de todas as matrizes singulares 2×2.

4. Determine o núcleo de cada uma das matrizes a seguir.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

5. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um subespaço de P_4. (Cuidado!)
(a) O conjunto dos polinômios em P_4 de grau par.
(b) O conjunto dos polinômios de grau 3.
(c) O conjunto dos polinômios $p(x)$ em P_4 tais que $p(0) = 0$.
(d) O conjunto dos polinômios em P_4 que têm pelo menos uma raiz real.

6. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um subespaço de $C[-1, 1]$.
(a) O conjunto das funções f em $C[-1, 1]$ tais $f(-1) = f(1)$.
(b) O conjunto das funções ímpares em $C[-1, 1]$.
(c) O conjunto das funções não-decrescentes em $[-1, 1]$.
(d) O conjunto das funções f em $C[-1, 1]$ tais $f(-1) = 0$ *e* $f(1) = 0$.
(e) O conjunto das funções f em $C[-1, 1]$ tais $f(-1) = 0$ *ou* $f(1) = 0$.

7. Mostre que $C^n[a, b]$ é um subespaço de $C[a, b]$.

8. Seja A um vetor particular em $R^{2\times 2}$. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um subespaço de $R^{2\times 2}$.
(a) $S_1 = \{B \in R^{2\times 2} \mid AB = BA\}$
(b) $S_2 = \{B \in R^{2\times 2} \mid AB \neq BA\}$
(c) $S_3 = \{B \in R^{2\times 2} \mid BA = O\}$

9. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um conjunto gerador para R^2.

(a) $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ (b) $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}\right\}$ (c) $\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$

(d) $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right\}$ (e) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

10. Quais dos conjuntos a seguir são conjuntos geradores para R^3? Justifique suas respostas.
(a) $\{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 1)^T, (1, 0, 1)^T\}$ (b) $\{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 1)^T, (1, 0, 1)^T, (1, 2, 3)^T\}$
(c) $\{(2, 1, -2)^T, (3, 2, -2)^T, (2, 2, 0)^T\}$ (d) $\{(2, 1, -2)^T, (-2, -1, 2)^T, (4, 2, -4)^T\}$
(e) $\{(1, 1, 3)^T, (0, 2, 1)^T\}$

11. Sejam

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(a) $\mathbf{x} \in [\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}]$?
(b) $\mathbf{y} \in [\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}]$?
Justifique suas respostas.

12. Quais dos conjuntos a seguir são conjuntos geradores para P_3? Justifique suas respostas.
(a) $\{1, x^2, x^2 - 2\}$ (b) $\{2, x^2, x, 2x + 3\}$
(c) $\{x + 2, x + 1, x^2 - 1\}$ (d) $\{x + 2, x^2 - 1\}$

13. Em $R^{2\times 2}$, sejam

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mostre que E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} geram $R^{2\times 2}$.

14. Seja S o espaço vetorial das seqüências infinitas definido no Exercício 15 da Seção 1. Seja S_0 o conjunto das seqüências $\{a_n\}$ tais que $a_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Mostre que S_0 é um subespaço de S.

15. Prove que, se S é um subespaço de R^1, então $S = \{\mathbf{0}\}$ ou $S = R^1$.

16. Seja A uma matriz $n \times n$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:
(a) $N(A) = \{\mathbf{0}\}$;
(b) A é invertível;
(c) para cada $\mathbf{b} \in R^n$, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma única solução.

17. Sejam U e V subespaços de um espaço vetorial W. Prove que $U \cap V$ também é um subespaço de W.

18. Seja S o subespaço de R^2 gerado por $\mathbf{e}_1$ e seja T o subespaço de R^2 gerado por $\mathbf{e}_2$. $S \cup T$ é um subespaço de R^2? Explique.

19. Sejam U e V subespaços de um espaço vetorial W. Defina

$$U + V = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{z} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \text{ onde } \mathbf{u} \in U \text{ e } \mathbf{v} \in V\}$$

Mostre que $U + V$ é um subespaço de W.

3 INDEPENDÊNCIA LINEAR

Nesta seção, vamos olhar mais de perto a estrutura de um espaço vetorial. Para começar, vamos nos restringir a espaços vetoriais que podem ser gerados por um número finito de elementos. Cada vetor no espaço pode ser construído a partir dos elementos nesse conjunto gerador, usando-se apenas as operações de soma e multiplicação por um escalar. É desejável encontrar um conjunto gerador "mínimo". Por mínimo, queremos dizer um conjunto gerador sem elementos desnecessários (isto é, todos os elementos no conjunto são necessários para se gerar o espaço vetorial). Para ver como encontrar um conjunto gerador mínimo, é preciso considerar como os vetores no conjunto "dependem" um do outro. Vamos, então, introduzir os conceitos de *dependência linear* e *independência linear*. Esses conceitos simples vão nos dar a chave para entender a estrutura de espaços vetoriais.

Vamos considerar os seguintes vetores em R^3:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Seja S o subespaço de R^3 gerado por $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$. Observe que S pode ser representado, de fato, pelos vetores $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$, já que $\mathbf{x}_3$ pertence ao espaço gerado por $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$.

(1)
$$\mathbf{x}_3 = 3\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2$$

Qualquer combinação linear de $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ pode ser reduzida a uma combinação linear de $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$:

$$\begin{aligned} \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \alpha_3\mathbf{x}_3 &= \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \alpha_3(3\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2) \\ &= (\alpha_1 + 3\alpha_3)\mathbf{x}_1 + (\alpha_2 + 2\alpha_3)\mathbf{x}_2 \end{aligned}$$