$$W[x^2, x|x|] = \begin{vmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & 2|x| \end{vmatrix} \equiv 0$$

Como o wronskiano é identicamente nulo, ele não nos dá informação sobre se as funções são linearmente independentes ou não. Para responder essa pergunta, suponha que

$$c_1x^2 + c_2x|x| = 0$$

para todo x em $[-1, 1]$. Em particular, para $x = 1$ e para $x = -1$, temos

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 - c_2 &= 0 \end{aligned}$$

e a única solução desse sistema é $c_1 = c_2 = 0$. Portanto, as funções x^2 e $x|x|$ são linearmente independentes em $C[-1, 1]$, apesar de $W[x^2, x|x|] \equiv 0$.

Esse exemplo mostra que a recíproca do Teorema 3.3.3 não é válida. □

EXEMPLO 8. Mostre que os vetores $1, x, x^2, x^3$ são linearmente independentes em P_4.

SOLUÇÃO

$$W[1, x, x^2, x^3] = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12$$

Como $W[1, x, x^2, x^3] \not\equiv 0$, os vetores são linearmente independentes. □

EXERCÍCIOS

1. Determine se os vetores dados são ou não linearmente independentes em R^2.

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Determine se os vetores dados são ou não linearmente independentes em R^3.

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Descreva geometricamente o espaço gerado por cada um dos conjuntos de vetores no Exercício 2.

4. Determine se os vetores dados são ou não linearmente independentes em $R^{2\times 2}$.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

5. Determine se os vetores dados são ou não linearmente independentes em P_3.

(a) $1, x^2, x^2 - 2$ (b) $2, x^2, x, 2x + 3$
(c) $x + 2, x + 1, x^2 - 1$ (d) $x + 2, x^2 - 1$

6. Mostre que os vetores dados são linearmente independentes em $C\,[0, 1]$.

(a) $\cos \pi x, \operatorname{sen} \pi x$ (b) $x^{3/2}, x^{5/2}$
(c) $1, e^x + e^{-x}, e^x - e^{-x}$ (d) e^x, e^{-x}, e^{2x}

7. Determine se os vetores $\cos x$, 1, $\operatorname{sen}^2(x/2)$ são linearmente independentes em $C\,[-\pi, \pi]$.

8. Considere os vetores $\cos(x + \alpha)$ e $\operatorname{sen} x$ em $C\,[-\pi, \pi]$. Para que valores de α os dois vetores vão ser linearmente dependentes? Interprete graficamente sua resposta.

9. Dadas as funções $2x$ e $|x|$, mostre que:
(a) esses dois vetores são linearmente independentes em $C\,[-1, 1]$;
(b) esses dois vetores são linearmente dependentes em $C\,[0, 1]$.

10. Prove que qualquer conjunto finito de vetores contendo o vetor nulo tem que ser linearmente dependente.

11. Sejam $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ dois vetores em um espaço vetorial V. Mostre que $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são linearmente dependentes se e somente se um dos vetores é um múltiplo do outro.

12. Prove que qualquer subconjunto não-vazio de um conjunto linearmente independente de vetores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ também é linearmente independente.

13. Seja A uma matriz $m \times n$. Mostre que, se os vetores colunas de A são linearmente independentes, então $N(A) = \{\mathbf{0}\}$.

[***Sugestão:*** para todo $\mathbf{x} \in R^n$, $A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n$.]

14. Sejam $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ vetores linearmente independentes em R^n e seja A uma matriz invertível $n \times n$. Defina $\mathbf{y}_i = A\mathbf{x}_i$ para $i = 1, \ldots, k$. Mostre que $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$ são linearmente independentes.

15. Seja $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ um conjunto gerador para o espaço vetorial V e seja $\mathbf{v}$ um outro vetor qualquer em V. Mostre que $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são linearmente dependentes.

16. Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vetores linearmente independentes em um espaço vetorial V. Mostre que $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ não podem gerar V.

4 BASE E DIMENSÃO

Mostramos, na Seção 3, que um conjunto gerador para um espaço vetorial é mínimo se seus elementos são linearmente independentes. Os elementos de um conjunto gerador mínimo formam as peças básicas para a construção de todo o espaço vetorial e, por causa disso, dizemos que eles formam uma "base" para o espaço vetorial.

Definição. Os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ formam uma **base** para um espaço vetorial V se e somente se

(i) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são linearmente independentes;
(ii) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ geram V.

EXEMPLO 1. A "base canônica" para o R^3 é $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. No entanto, poderíamos usar outra base qualquer, como, por exemplo, $\{(1, 1, 1)^T, (0, 1, 1)^T, (2, 0, 1)^T\}$ ou $\{(1, 1, 1)^T, (1, 1, 0)^T, (1, 0, 1)^T\}$. Veremos, em breve, que qualquer base para R^3 tem exatamente três elementos. □

EXEMPLO 2. Considere o conjunto $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ em $R^{2\times 2}$, onde