EXEMPLO 4. Mostre que $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ é uma base para R^3.

SOLUÇÃO. Como dim $R^3 = 3$, basta mostrar que esses três vetores são linearmente independentes. Isso segue do fato de que

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\2 & 1 & 0\\3 & 0 & 1\end{vmatrix} = 2$$

□

Teorema 3.4.4. *Se V é um espaço vetorial de dimensão n > 0, então:*

(i) *nenhum conjunto com menos de n vetores pode gerar V;*
(ii) *qualquer subconjunto linearmente independente com menos de n elementos pode ser estendido para formar uma base para V;*
(iii) *podem-se retirar elementos de qualquer conjunto gerador contendo mais de n vetores de modo a se obter uma base para V.*

Demonstração. A observação (i) segue pelo mesmo argumento utilizado no Teorema 3.4.3 para provar (II). Para provar (ii), suponha que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ são vetores linearmente independente e que $k < n$. De (i), $[\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}]$ é um subespaço próprio de V, logo existe um vetor $\mathbf{v}_{k+1}$ que está em V, mas não pertence a $[\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}]$. Temos, então, que os vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}$ são linearmente independentes. Se $k + 1 < n$, podemos estender $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}\}$, da mesma maneira, a um conjunto linearmente independente com $k + 2$ vetores. Esse processo pode ser continuado até obtermos um conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de vetores linearmente independentes.

Para provar (iii), suponha que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ geram V e que $m > n$. Pelo Teorema 3.4.1, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ são linearmente dependentes. Temos, então, que um dos vetores, por exemplo, $\mathbf{v}_m$, pode ser escrito como uma combinação linear dos outros. Logo, se retirarmos $\mathbf{v}_m$ do conjunto, os $m - 1$ vetores restantes ainda geram V. Se $m - 1 > n$, podemos continuar a retirar vetores do conjunto até chegarmos a um conjunto gerador contendo n elementos. □

BASES CANÔNICAS

No Exemplo 1 dissemos que o conjunto $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ era a *base canônica* para R^3. Chamamos essa base de canônica por ela ser a mais natural para se representar vetores em R^3. Mais geralmente, a base canônica para R^n é o conjunto $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

A maneira mais natural de representar matrizes em $R^{2\times2}$ é em termos da base $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ dada no Exemplo 2. Essa é, então, a base canônica para $R^{2\times2}$.

A maneira padrão de representar um polinômio em P_n é em termos das funções $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ e, por isso, a base canônica para P_n é $(1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$.

Embora essas bases canônicas pareçam ser as mais simples e naturais para se usar, elas não são as bases mais apropriadas para muitos problemas aplicados. (Veja, por exemplo, o problema de mínimos quadráticos no Cap. 5 ou as aplicações de autovalores no Cap. 6.) De fato, a chave na resolução de muitos problemas aplicados é mudar de uma das bases canônicas para uma base que é, de alguma forma, mais natural para a aplicação em questão. Uma vez resolvido o problema na nova base, é fácil voltar e representar a solução em termos da base canônica. Na próxima seção vamos aprender a mudar de uma base para outra.

EXERCÍCIOS

1. Indique se os vetores dados no Exercício 1 da Seção 3 formam ou não uma base para R^2.
2. Indique se os vetores dados no Exercício 2 da Seção 3 formam ou não uma base para R^3.

3. Considere os vetores

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(a) Mostre que $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ formam uma base para R^2.
(b) Por que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ têm que ser linearmente dependentes?
(c) Qual a dimensão de $[\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}]$?

4. Considere os vetores

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Qual a dimensão de $[\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}]$?

5. Considere

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Mostre que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ são linearmente dependentes.
(b) Mostre que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ são linearmente independentes.
(c) Qual a dimensão de $[\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}]$?
(d) Descreva geometricamente $[\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}]$.

6. Alguns dos conjuntos no Exercício 2 da Seção 2 formavam subespaços de R^3. Em cada um desses casos, encontre uma base para o subespaço e determine sua dimensão.

7. Encontre uma base para o subespaço S de R^4 formado por todos os vetores da forma $(a + b, a - b + 2c, b, c)^T$, onde a, b e c são números reais. Qual a dimensão de S?

8. Considere os vetores $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1)^T$ e $\mathbf{x}_2 = (3, -1, 4)^T$.
(a) $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ geram R^3? Explique.
(b) Seja $\mathbf{x}_3$ um terceiro vetor em R^3 e defina $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$. Que condição (ou condições) X tem que satisfazer para que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ formem uma base para R^3?
(c) Encontre um terceiro vetor $\mathbf{x}_3$ que estenda o conjunto $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ a uma base para R^3.

9. Os vetores

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

geram R^3. Retire algum (ou alguns) elementos de $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5\}$ de modo a obter uma base para R^3.

10. Seja S o subespaço de P_3 formado por todos os polinômios da forma $ax^2 + bx + 2a + 3b$. Encontre uma base para S.

11. Alguns dos conjuntos no Exercício 3 da Seção 2 formavam subespaços de $R^{2\times 2}$. Em cada um desses casos, encontre uma base para o subespaço e determine sua dimensão.

12. Encontre a dimensão do espaço gerado por 1, $\cos 2x$, $\cos^2 x$ em $C[-\pi, \pi]$.

13. Encontre a dimensão do subespaço de P_3 gerado pelos vetores dados em cada um dos itens a seguir.

(a) $x, x-1, x^2+1$ (b) $x, x-1, x^2+1, x^2-1$
(c) $x^2, x^2-x-1, x+1$ (d) $2x, x-2$

14. Seja S o subespaço de P_3 formado por todos os polinômios $p(x)$ satisfazendo $p(0) = 0$, e seja T o subespaço de todos os polinômios $q(x)$ tais que $q(1) = 0$. Encontre bases para

(a) S (b) T (c) $S \cap T$

15. Seja U o subespaço de R^4 formado pelos vetores da forma $(u_1, u_2, 0, 0)^T$ e seja V o subespaço de todos os vetores da forma $(0, v_2, v_3, 0)^T$. Quais as dimensões de U, V, $U \cap V$, $U + V$? Encontre uma base para cada um desses subespaços.

16. É possível encontrar um par de subespaços bidimensionais U e V de R^3 tais que $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$? Justifique sua resposta. Interprete geometricamente sua conclusão.

[***Sugestão:*** sejam $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ bases para U e V, respectivamente; mostre que $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ são linearmente dependentes.]

5 MUDANÇA DE BASES

Muitos problemas aplicados podem ser simplificados mudando-se de um sistema de coordenadas para outro. Mudar sistemas de coordenadas em um espaço vetorial é, essencialmente, a mesma coisa que mudar de base. Por exemplo, ao descrever o movimento de uma partícula no plano em um instante particular, é muitas vezes conveniente usar uma base de R^2 formada por um vetor tangente unitário $\mathbf{t}$ e um vetor normal unitário $\mathbf{n}$, em vez da base canônica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

Nesta seção, vamos discutir o problema de mudar de um sistema de coordenadas para outro. Vamos mostrar que isso pode ser feito multiplicando-se um vetor de coordenadas dado $\mathbf{x}$ por uma matriz invertível S. O produto $\mathbf{y} = S\mathbf{x}$ vai ser o vetor de coordenadas para o novo sistema.

MUDANÇA DE COORDENADAS EM R^2

A base canônica para R^2 é $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Qualquer vetor $\mathbf{x}$ em R^2 pode ser escrito como uma combinação linear

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$$

Os escalares x_1 e x_2 são as *coordenadas* de $\mathbf{x}$ em relação à base canônica. De fato, para qualquer base $\{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ para R^2, pelo Teorema 3.3.2, um dado vetor $\mathbf{x}$ pode ser representado de maneira única como uma combinação linear

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}$$

Os escalares α e β são as coordenadas de $\mathbf{x}$ em relação à base $\{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}$. Vamos ordenar os elementos da base de modo que $\mathbf{y}$ seja o primeiro vetor da base e $\mathbf{z}$ seja o segundo, e vamos denotar a base ordenada por $[\mathbf{y}, \mathbf{z}]$*. Podemos, então, nos referir ao vetor $(\alpha, \beta)^T$ como sendo o *vetor de coordenadas* de $\mathbf{x}$ em relação à base $[\mathbf{y}, \mathbf{z}]$.

EXEMPLO 1. Sejam $\mathbf{y} = (2, 1)^T$ e $\mathbf{z} = (1, 4)^T$. Os vetores $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ são linearmente independentes e, portanto, formam uma base para R^2. O vetor $\mathbf{x} = (7, 7)^T$ pode ser escrito como uma combinação linear

$$\mathbf{x} = 3\mathbf{y} + \mathbf{z}$$

Logo, o vetor de coordenadas de $\mathbf{x}$ em relação a $[\mathbf{y}, \mathbf{z}]$ é $(3, 1)^T$. Geometricamente, esse vetor nos diz como sair da origem e chegar em $(7, 7)$, movendo-nos primeiro na direção de $\mathbf{y}$ e depois na direção de $\mathbf{z}$. O vetor de coordenadas de $\mathbf{x}$ em relação à base ordenada $[\mathbf{z}, \mathbf{y}]$ é $(1, 3)^T$. Geometricamente, esse vetor nos diz como sair da origem e chegar em $(7, 7)$ movendo-nos primeiro na direção de $\mathbf{z}$ e depois na direção de $\mathbf{y}$ (ver Fig. 3.5.1). □

Uma vez decididos a trabalhar com uma nova base, temos o problema de encontrar as coordenadas em relação a essa nova base. Suponha, por exemplo, que, em vez de usarmos a base canônica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ para o R^2, queira usar uma base diferente, por exemplo,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

* Não confundir com o espaço gerado por $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$, que é denotado por $[\{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}]$. A notação com colchetes para bases ordenadas não é padrão.(N.T.)