$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

A inversa de S vai ser a matriz que muda da base $[1, x, x^2]$ para a base $[1, 2x, 4x^2 - 2]$:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Dado qualquer $p(x) = a + bx + cx^2$ em P_3, para encontrar as coordenadas de $p(x)$ em relação a $[1, 2x, 4x^2 - 2]$, basta multiplicar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{4}c \end{pmatrix}$$

Logo,

$$p(x) = (a + \tfrac{1}{2}c) \cdot 1 + (\tfrac{1}{2}b) \cdot 2x + \tfrac{1}{4}c \cdot (4x^2 - 2) \qquad \square$$

Vimos que cada matriz mudança de base é invertível. De fato, podemos pensar em qualquer matriz invertível como uma matriz mudança de base. Se S é uma matriz invertível $n \times n$ e $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ é uma base ordenada para V, defina $[\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n]$ por (3). Para ver que os $\mathbf{w}_j$ são linearmente independentes, suponha que

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{w}_j = \mathbf{0}$$

De (3), tem-se que

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} s_{ij} x_j \right) \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$$

Pela independência linear dos $\mathbf{v}_i$, tem-se que

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ij} x_j = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

ou, equivalentemente,

$$S\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Como S é invertível, $\mathbf{x}$ tem que ser igual a $\mathbf{0}$. Logo, $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ são linearmente independentes e, portanto, formam uma base para V. A matriz S é a matriz que efetua a mudança da base ordenada $[\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n]$ para $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$.

Em muitos problemas aplicados é importante usar o tipo certo de base para a aplicação em questão. Veremos, no Cap. 5, que a chave para a resolução de problemas de mínimos quadráticos é usar um tipo especial de base, uma base *ortonormal*. No Cap. 6, vamos considerar um número de aplicações envolvendo *autovalores* e *autovetores* associados a uma matriz A $n \times n$. A chave para resolver esse tipo de problema é mudar para uma base para R^n formada por autovetores de A.

EXERCÍCIOS

1. Para um dos itens a seguir, encontre a matriz que corresponde à mudança da base $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ para a base $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$.

(a) $\mathbf{u}_1 = (1, 1)^T, \quad \mathbf{u}_2 = (-1, 1)^T$
(b) $\mathbf{u}_1 = (1, 2)^T, \quad \mathbf{u}_2 = (2, 5)^T$
(c) $\mathbf{u}_1 = (0, 1)^T, \quad \mathbf{u}_2 = (1, 0)^T$

2. Para cada uma das bases ordenadas $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ no Exercício 1, encontre a matriz mudança de base de $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ para $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$.

3. Sejam $\mathbf{v}_1 = (3, 2)^T$ e $\mathbf{v}_2 = (4, 3)^T$. Para cada uma das bases ordenadas $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ no Exercício 1, encontre a matriz mudança de base de $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ para $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$.

4. Seja $E = [(5, 3)^T, (3, 2)^T]$ e sejam $\mathbf{x} = (1, 1)^T$, $\mathbf{y} = (1, -1)^T$ e $\mathbf{z} = (10, 7)^T$. Encontre os vetores de coordenadas $[\mathbf{x}]_E$, $[\mathbf{y}]_E$ e $[\mathbf{z}]_E$.

5. Sejam $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)^T$, $\mathbf{u}_2 = (1, 2, 2)^T$ e $\mathbf{u}_3 = (2, 3, 4)^T$.
(a) Encontre a matriz mudança de base de $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ para $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$.
(b) Encontre as coordenadas de cada um dos vetores a seguir em relação a $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$.

$$\text{(i)}\ (3, 2, 5)^T \qquad \text{(ii)}\ (1, 1, 2)^T \qquad \text{(iii)}\ (2, 3, 2)^T$$

6. Sejam $\mathbf{v}_1 = (4, 6, 7)^T$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)^T$ e $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 2)^T$ e sejam $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ os vetores dados no Exercício 5.
(a) Encontre a matriz mudança de base de $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ para $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$.
(b) Se $\mathbf{x} = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 - 4\mathbf{v}_3$, determine as coordenadas de $\mathbf{x}$ em relação a $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$.

7. Considere

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Encontre vetores $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ tais que S é a matriz mudança de base de $[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]$ para $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$.

8. Considere

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Encontre vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ tais que S é a matriz mudança de base de $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ para $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$.

9. Sejam $[x, 1]$ e $[2x - 1, 2x + 1]$ duas bases ordenadas para P_2.
(a) Encontre a matriz mudança de base que representa a mudança de coordenadas de $[2x - 1, 2x + 1]$ para $[x, 1]$.
(b) Encontre a matriz mudança de base que representa a mudança de coordenadas de $[x, 1]$ para $[2x - 1, 2x + 1]$.

10. Encontre a matriz mudança de base que representa a mudança de coordenadas em P_3 da base ordenada $[1, x, x^2]$ para a base ordenada

$$[1, 1 + x, 1 + x + x^2]$$

11. Sejam $E = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ e $F = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ duas bases ordenadas para R^n e defina

$$U = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n), \qquad V = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$$

Mostre que a matriz mudança de base de E para F pode ser determinada calculando-se a forma escada reduzida por linhas de $(U|V)$.

6 ESPAÇOS LINHA E COLUNA

Se A é uma matriz $m \times n$, cada linha de A é uma n-upla de números reais e pode ser considerada, portanto, como um vetor em $R^{1\times n}$. Vamos nos referir aos m vetores correspondentes às linhas de A como os *vetores linhas* de A. Analogamente, cada coluna de A pode ser considerada como um vetor em R^m e podemos associar à matriz A n *vetores colunas*.

Definição. Se A é uma matriz $m \times n$, o subespaço de $R^{1\times n}$ gerado pelos vetores linhas de A é chamado