As duas primeiras colunas $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ de X formam uma base para o espaço coluna de X, logo dim $[\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}] = 2$. □

EXERCÍCIOS

1. Para cada uma das matrizes a seguir, encontre uma base para o espaço linha, uma base para o espaço coluna e uma base para o núcleo.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

2. Em cada um dos itens a seguir, determine a dimensão do subespaço de R^3 gerado pelos vetores dados.

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 5 & 4 & 9 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule a forma escada reduzida por linhas U de A. Quais os vetores colunas de U que correspondem às variáveis livres? Escreva cada um desses vetores colunas como uma combinação linear dos vetores colunas correspondentes às variáveis líderes.

(b) Quais os vetores colunas de A que correspondem às variáveis líderes de U? Esses vetores colunas formam uma base para o espaço coluna de A. Escreva cada um dos vetores colunas de A como uma combinação linear dos vetores dessa base.

4. Para cada uma das escolhas de A e b a seguir, determine se $\mathbf{b}$ pertence ao espaço coluna de A e diga se o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é ou não compatível.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

(f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$

5. Para cada um dos sistemas compatíveis no Exercício 4, examine os vetores colunas da matriz de coeficientes para determinar se o sistema tem uma ou uma infinidade de soluções.
6. Quantas soluções os sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ vai ter se $\mathbf{b}$ pertencer ao espaço coluna de A e se os vetores colunas de A forem linearmente independentes? Explique.]
7. Seja A uma matriz $m \times n$ com $m > n$. Seja $\mathbf{b} \in R^m$ e suponha que $N(A) = \{\mathbf{0}\}$.
(a) O que você pode concluir sobre os vetores colunas de A? Eles são linearmente independentes? Eles geram R^m? Explique.
(b) Quantas soluções o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ vai ter se $\mathbf{b}$ não pertencer ao espaço coluna de A? Quantas soluções o sistema vai ter se $\mathbf{b}$ pertencer ao espaço coluna de A? Explique.
8. Sejam A e B matrizes 6×5. Se $\dim N(A) = 2$, qual o posto de A? Se o posto de B for 4, qual vai ser a $\dim N(B)$?
9. Sejam A e B matrizes equivalentes por linhas.
(a) Mostre que a dimensão do espaço coluna de A é igual à dimensão do espaço coluna de B.
(b) Os espaços colunas de A e B são necessariamente iguais? Justifique sua resposta.
10. Prove que um sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é compatível se e somente se o posto de $(A|\mathbf{b})$ é igual ao posto de A.
11. Seja A uma matriz $m \times n$.
(a) Se B é uma matriz $m \times m$ invertível, mostre que BA e A têm o mesmo núcleo e, portanto, o mesmo posto.
(b) Se C é uma matriz $n \times n$ invertível, mostre que AC e A têm o mesmo posto.
12. Prove o Corolário 3.6.3.
13. Suponha que A e B são matrizes $n \times n$ com a propriedade de que $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in R^n$. Mostre que:
(a) $N(A - B) = R^n$;
(b) $A - B$ têm que ter posto nulo e, portanto, $A = B$.
14. Sejam A e B matrizes $n \times n$. Mostre que $AB = O$ se e somente se o espaço coluna de B é um subespaço do núcleo de A.
15. Sejam $A \in R^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in R^m$ e $\mathbf{x}_0$ uma solução particular do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Prove as afirmações a seguir.
(a) Um vetor $\mathbf{y}$ em R^n é uma solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se e somente se $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{z}$, onde $\mathbf{z} \in N(A)$.
(b) Se $N(A) = \{\mathbf{0}\}$, então a solução $\mathbf{x}_0$ é única.
16. Sejam $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ vetores não-nulos em R^m e R^n, respectivamente, e seja $A = \mathbf{x}\mathbf{y}^T$.
(a) Mostre que $\{\mathbf{x}\}$ é uma base para o espaço coluna de A e que $\{\mathbf{y}^T\}$ é uma base para o espaço linha de A.
(b) Qual a dimensão de $N(A)$?
17. Sejam $A \in R^{m \times n}$, $B \in R^{n \times r}$ e $C = AB$. Mostre que:
(a) O espaço coluna de C é um subespaço do espaço coluna de A;
(b) O espaço linha de C é um subespaço do espaço linha de B;
(c) $\text{Posto}(C) \leq \min\{\text{posto}(A), \text{posto}(B)\}$.
18. Sejam $A \in R^{m \times n}$, $B \in R^{n \times r}$ e $C = AB$. Mostre que:
(a) Se ambos A e B têm vetores colunas linearmente independentes, então os vetores colunas de C também são linearmente independentes.
(b) Se ambos A e B têm vetores linhas linearmente independentes, então os vetores linhas de C também são linearmente independentes.

[***Sugestão:*** aplique a parte (a) a C^T.]

19. Sejam $A \in R^{m \times n}$; $B \in R^{n \times r}$ e $C = AB$. Mostre que:
(a) Se os vetores colunas de B são linearmente dependentes, então os vetores colunas de C também são linearmente dependentes.
(b) Se os vetores linhas de A são linearmente dependentes, então os vetores linhas de C também são linearmente dependentes.

[***Sugestão:*** aplique a parte (a) a C^T.]

20. Dizemos que uma matriz A $m \times n$ tem uma *inversa à direita* se existe uma matriz C $n \times m$ tal que $AC = I_m$. Dizemos que A tem uma *inversa à esquerda* se existe uma matriz D $n \times m$ tal que $DA = I_n$.

(a) Mostre que, se A tem inversa à direita, então os vetores colunas de A geram R^m.
(b) É possível para uma matriz $m \times n$ ter uma inversa à direita se $n < m$? E se $n \geq m$? Explique.

21. Prove que, se A é uma matriz $m \times n$ tal que os vetores colunas de A geram R^m, então A tem uma inversa à direita.

[***Sugestão:*** denote por $\mathbf{e}_j$ a j-ésima coluna de I_m e resolva $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ para $j = 1, \ldots, m$.]

22. Mostre que uma matriz B tem inversa à esquerda se e somente se B^T tem inversa à direita.

23. Seja B uma matriz $n \times m$ cujas colunas são linearmente independentes. Mostre que B tem inversa à esquerda.

24. Prove que, se uma matriz B tem inversa à esquerda, então as colunas de B são linearmente independentes.

25. Se uma matriz U está em forma escada, então os vetores linhas não-nulos formam uma base para o espaço linha de U.

EXERCÍCIOS COM O MATLAB PARA O CAPÍTULO 3

1. (Mudança de Base) Defina

$$U = \texttt{round}(20 * (\texttt{rand}(4) - 0{,}5)), \qquad V = \texttt{round}(10 * \texttt{rand}(4))$$

e $\mathbf{b}$ = `ones(4, 1)`.

(a) Podemos usar a função `rank` do MATLAB para determinar se os vetores colunas de uma matriz são ou não linearmente independentes. Quanto deveria ser o posto se os vetores colunas de U fossem linearmente independentes? Calcule o posto de U e verifique que seus vetores colunas são linearmente independentes e, portanto, formam uma base para R^4. Calcule o posto de V e verifique que seus vetores colunas também formam uma base para R^4.

(b) Use o MATLAB para calcular a matriz mudança de base da base canônica $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4]$ para a base ordenada $E = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$. [Lembre-se de que a notação do MATLAB para o j-ésimo vetor coluna $\mathbf{u}_j$ é $U(:, j)$.] Use essa matriz mudança de base para calcular o vetor de coordenadas $\boldsymbol{\alpha}$ de $\mathbf{b}$ em relação a E. Verifique que

$$\mathbf{b} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 + \alpha_4\mathbf{u}_4 = U\boldsymbol{\alpha}$$

(c) Use o MATLAB para calcular a matriz mudança de base da base canônica para a base ordenada $F = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$ e use essa matriz mudança de base para calcular o vetor de coordenadas β de $\mathbf{b}$ em relação a F. Verifique que

$$\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \beta_3\mathbf{v}_3 + \beta_4\mathbf{v}_4 = V\boldsymbol{\beta}$$

(d) Use o MATLAB para calcular a matriz mudança de base S de E para F e a matriz mudança de base T de F para E. Qual a relação entre S e T? Verifique que $S\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ e que $T\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}$.

2. (Matrizes de Posto Incompleto) Neste exercício vamos ver como gerar matrizes de determinado posto no MATLAB.

(a) Em geral, se A é uma matriz $m \times n$ de posto r, então $r \leq \min(m, n)$. Por quê? Explique. Se os elementos de A forem números aleatórios, esperaríamos que $r = \min(m, n)$. Por quê? Explique. Verifique isso no MATLAB gerando matrizes aleatórias 6×6, 8×6, 5×8 e verificando seus postos com o comando `rank`. Sempre que o posto de uma matriz $m \times n$ for igual a $\min(m, n)$, diremos que a matriz tem *posto máximo*. Caso contrário, a matriz não tem posto máximo.

(b) Podemos gerar uma matriz aleatória com elementos inteiros multiplicando a matriz por um número $x \geq 10$ e, depois, usando o comando `round`. Por exemplo, o comando

$$A = \texttt{round}(10 * \texttt{rand}(10, 7))$$

gera uma matriz aleatória 10×7 cujos elementos são todos inteiros não-negativos menores ou iguais a 10. Gere matrizes aleatórias 10×7, 8×12, 10×15 dessa maneira e verifique o posto de cada uma delas. Essas matrizes inteiras têm posto máximo?

(c) Suponha que queremos gerar matrizes no MATLAB que não tenham posto máximo. É fácil gerar matrizes de posto 1. Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são vetores não-nulos em R^m e R^n, respectivamente, então $A = \mathbf{x}\mathbf{y}^T$ é uma matriz $m \times n$ de posto 1. Por quê? Explique. Verifique isso no MATLAB definindo

$$\mathbf{x} = \texttt{round}(10 * \texttt{rand}(8, 1)), \qquad \mathbf{y} = \texttt{round}(10 * \texttt{rand}(6, 1))$$

e usando esses vetores para construir uma matriz A 8×6. Verifique o posto de A com o comando `rank`.

(d) Em geral,

$$\text{(1)} \qquad \text{posto}(AB) \leq \min(\text{posto}(A), \text{posto}(B))$$

(Ver Exercício 17 da Seção 6 deste capítulo.) Se A e B forem geradas aleatoriamente, a relação (1) deveria ser uma igualdade. Gere uma matriz A 8×6 definindo

$$X = \texttt{rand}(8, 2), \qquad Y = \texttt{rand}(6, 2), \qquad A = X * Y'$$

Quanto você esperaria que fosse o posto de A? Explique. Teste o posto de A usando o MATLAB.

(e) Use o MATLAB para gerar matrizes A, B e C tais que
  (i) A é 8×8 de posto 3;
  (ii) B é 6×9 de posto 4;
  (iii) C é 10×7 de posto 5.

3. (Espaço Coluna e Forma Escada Reduzida por Linhas)
Faça $B = \texttt{round}(10 * \texttt{rand}(8, 4))$, $X = \texttt{round}(10 * \texttt{rand}(4))$, $C = B * X$ e $A = [B \;\; C]$.

(a) Qual a relação entre os espaços colunas de B e C? (Ver Exercício 17 na Seção 6 deste capítulo.) Quanto você esperaria que fosse o posto de A? Explique. Use o MATLAB para verificar sua resposta.

(b) Quais os vetores colunas de A que deveriam formar uma base para seu espaço coluna? Explique. Se U é a forma escada reduzida por linhas de A, quais deveriam ser as quatro primeiras colunas de U? Explique. E as quatro últimas colunas? Explique. Use o MATLAB para verificar sua resposta calculando U.

(c) Use o MATLAB para construir outra matriz $D = (E \;\; EY)$, onde E é uma matriz aleatória 6×4 e Y é uma matriz aleatória 4×2. Qual deveria ser a forma escada reduzida por linhas de D? Calcule-a usando o MATLAB. Mostre que, em geral, se B é uma matriz $m \times n$ de posto n e se X é uma matriz $n \times k$, a forma escada reduzida por linhas de $(B \;\; BX)$ tem estrutura em bloco da forma

$$(I \quad X) \qquad \text{se} \quad m = n$$

ou

$$\begin{pmatrix} I & X \\ O & O \end{pmatrix} \qquad \text{se} \quad m > n$$

4. (Redução de Posto de Sistemas Lineares)

(a) Faça $A = \texttt{round}\ (10 * \texttt{rand}(8))$, $\mathbf{b} = \texttt{round}(10 * \texttt{rand}(8, 1))$ e $M = \textbf{inv}(A)$. Use a matriz M para resolver o sistema $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ para $\mathbf{y}$.

(b) Considere um novo sistema $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde C é construída da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u} = \texttt{round}(10 * \texttt{rand}(8, 1)), \quad && \mathbf{v} = \texttt{round}(10 * \texttt{rand}(8, 1)) \\ &E = \mathbf{u} * \mathbf{v}' && C = A + E \end{aligned}$$

As matrizes C e A diferem por uma matriz E de posto 1. Use o MATLAB para verificar que a matriz E tem posto 1. A seguir, use o comando `flops(0)` para igualar a 0 a variável flops e resolva o sistema $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ usando o operador "\". Verifique o valor de flops para ver quantas operações foram necessárias.

(c) Vamos agora resolver o sistema $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por um método que usa o fato de que A e C diferem por uma matriz de posto 1. Esse novo procedimento é chamado de método de *redução de posto*. Iguale novamente a variável flops a 0 e faça

$$\mathbf{z} = M * \mathbf{u}, \quad \alpha = \mathbf{v}' * \mathbf{y}, \quad \beta = \mathbf{v}' * \mathbf{z}, \quad \gamma = \frac{\alpha}{1+\beta}$$

A solução $\mathbf{x}$ é dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} - \gamma * \mathbf{z}$$

Verifique o contador flops para o cálculo de $\mathbf{x}$ por esse segundo método. Esse método é mais eficiente do que usando o operador "\"? Use o MATLAB para calcular o vetor residual $\mathbf{b} - C\mathbf{x}$.

(d) Para ver por que o método de redução de posto funciona, use o MATLAB para calcular e comparar

$$C\mathbf{y} \text{ e } \mathbf{b} + \alpha\mathbf{u}$$

Prove que, se todos os cálculos tivessem sido feitos em aritmética exata, esses dois vetores seriam iguais. Calcule, também,

$$C\mathbf{z} \quad \text{e} \quad (1+\beta)\mathbf{u}$$

Prove que, se todos os cálculos tivessem sido feitos em aritmética exata, esses dois vetores seriam iguais. Use essas identidades para provar que $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Supondo A invertível, o método de redução de posto sempre funciona? Sob que condições ele pode falhar? Explique.