Como $\alpha\mathbf{v} \in S$, $\alpha\mathbf{w} \in L(S)$ e $L(S)$ é fechado sob a multiplicação por escalar. Se $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in L(S)$, existem $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2 \in S$ tais que $L(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$ e $L(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$. Logo,

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = L(\mathbf{v}_1) + L(\mathbf{v}_2) = L(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$$

e $L(S)$ é fechado sob a soma. □

EXEMPLO 11. Seja L a transformação linear de R^2 em R^2 definida por

$$L(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um vetor $\mathbf{x}$ pertence ao núcleo de L se e somente se $x_1 = 0$. Logo, $\ker(L)$ é o subespaço unidimensional de R^2 gerado por $\mathbf{e}_2$. Um vetor $\mathbf{y}$ pertence à imagem de L se e somente se $\mathbf{y}$ é um múltiplo de $\mathbf{e}_1$. Logo, $L(R^2)$ é o subespaço unidimensional de R^2 gerado por $\mathbf{e}_1$. □

EXEMPLO 12. Seja $L : R^3 \to R^2$ a transformação linear definida por

$$L(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2,\ x_2 + x_3)^T$$

e seja S o subespaço de R^3 gerado por $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_3$.

Se $\mathbf{x} \in \ker(L)$, então

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad \text{e} \qquad x_2 + x_3 = 0$$

Fazendo a variável livre $x_3 = a$, obtemos

$$x_2 = -a, \qquad x_1 = a$$

e, portanto, $\ker(L)$ é o subespaço unidimensional de R^3 de todos os vetores da forma $a(1,-1,1)^T$.

Se $\mathbf{x} \in S$, então $\mathbf{x}$ tem que ser da forma $(a, 0, b)^T$, logo $L(\mathbf{x}) = (a, b)^T$. É claro que $L(S) = R^2$. Como a imagem do subespaço S é o R^2 inteiro, a imagem de L tem que ser todo o R^2 [isto é, $L(R^3) = R^2$]. □

EXEMPLO 13. Seja D: $P_3 \to P_3$ o operador derivada, dado por

$$D(p(x)) = p'(x)$$

O núcleo de D consiste em todos os polinômios de grau 0. Logo, $\ker(D) = P_1$. Como a derivada de qualquer polinômio em P_3 é um polinômio em P_2, temos que $D(P_3) = P_2$. □

EXERCÍCIOS

1. Mostre que cada uma das aplicações seguintes é uma transformação linear de R^2 em R^2. Descreva geometricamente o que cada uma delas faz.

(a) $L(\mathbf{x}) = (-x_1, x_2)^T$ (b) $L(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ (c) $L(\mathbf{x}) = (x_2, x_1)^T$
(d) $L(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}$ (e) $L(\mathbf{x}) = x_2\mathbf{e}_2$

2. Seja L a transformação linear de R^2 em si mesmo definida por

$$L(\mathbf{x}) = (x_1 \cos\alpha - x_2 \operatorname{sen}\alpha,\ x_1 \operatorname{sen}\alpha + x_2 \cos\alpha)^T$$

Expresse x_1, x_2 e $L(\mathbf{x})$ em coordenadas polares. Descreva geometricamente o efeito dessa transformação linear.

3. Seja $\mathbf{a}$ um vetor fixo não-nulo em R^2. Uma aplicação da forma

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}$$

é chamada de *translação*. Mostre que uma translação não é uma transformação linear. Ilustre geometricamente o efeito de uma translação.

4. Determine se as transformações de R^3 em R^2 a seguir são ou não lineares.

(a) $L(\mathbf{x}) = (x_2, x_3)^T$ (b) $L(\mathbf{x}) = (0, 0)^T$
(c) $L(\mathbf{x}) = (1 + x_1, x_2)^T$ (d) $L(\mathbf{x}) = (x_3, x_1 + x_2)^T$

5. Determine se as transformações de R^2 em R^3 a seguir são ou não lineares.
(a) $L(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, 1)^T$ (b) $L(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_1 + 2x_2)^T$
(c) $L(\mathbf{x}) = (x_1, 0, 0)^T$ (d) $L(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_1^2 + x_2^2)^T$

6. Determine se as transformações de $R^{n\times n}$ em $R^{n\times n}$ a seguir são ou não lineares.
(a) $L(A) = 2A$ (b) $L(A) = A^T$
(c) $L(A) = A + I$ (d) $L(A) = A - A^T$

7. Determine se as transformações de P_2 em P_3 a seguir são ou não lineares.
(a) $L(p(x)) = xp(x)$
(b) $L(p(x)) = x^2 + p(x)$
(c) $L(p(x)) = p(x) + xp(x) + x^2p'(x)$

8. Para cada $f \in C[0, 1]$, defina $L(f) = F$, onde

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad 0 \leq x \leq 1$$

Mostre que L é uma transformação linear de $C[0, 1]$ em $C[0, 1]$. Depois, encontre $L(e^x)$ e $L(x^2)$.

9. Determine se as transformações de $C[0, 1]$ em R^1 a seguir são ou não lineares.
(a) $L(f) = f(0)$ (b) $L(f) = |f(0)|$
(c) $L(f) = [f(0) + f(1)]/2$ (d) $L(f) = \left\{\int_0^1 [f(x)]^2\,dx\right\}^{1/2}$

10. Se L é uma transformação linear de V em W, use indução matemática para provar que

$$\begin{aligned} &L(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n) \\ &= \alpha_1 L(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 L(\mathbf{v}_2) + \cdots + \alpha_n L(\mathbf{v}_n) \end{aligned}$$

11. Seja $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base para um espaço vetorial V e sejam L_1 e L_2 duas transformações lineares de V em um espaço vetorial W. Mostre que, se

$$L_1(\mathbf{v}_i) = L_2(\mathbf{v}_i)$$

para cada $i = 1, \ldots, n$, então $L_1 = L_2$ [isto é, mostre que $L_1(\mathbf{v}) = L_2(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in V$].

12. Seja L uma transformação linear de R^1 em R^1 e seja $a = L(1)$. Mostre que $L(x) = ax$ para todo $x \in R^1$.

13. Seja L um operador linear de um espaço vetorial V nele mesmo. Defina, por recursão, o operador L^n, $n \geq 1$ da seguinte maneira:

$$L^1 = L$$

$$L^{k+1}(\mathbf{v}) = L(L^k(\mathbf{v})) \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in V$$

Mostre que L^n é um operador linear para todo $n \geq 1$.

14. Sejam $L_1 : U \to V$ e $L_2 : V \to W$ transformações lineares e seja $L = L_2 \circ L_1$ a transformação definida por

$$L(\mathbf{u}) = L_2(L_1(\mathbf{u}))$$

para $\mathbf{u} \in U$. Mostre que L é uma transformação linear de U em W.

15. Determine o núcleo e a imagem de cada uma das transformações lineares de R^3 em R^3.
(a) $L(\mathbf{x}) = (x_3, x_2, x_1)^T$
(b) $L(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, 0)^T$
(c) $L(\mathbf{x}) = (x_1, x_1, x_1)^T$

16. Seja S o subespaço de R^3 gerado por $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$. Para cada um dos operadores lineares no Exercício 15, determine $L(S)$.

17. Determine o núcleo e a imagem de cada uma das transformações lineares de P_3 em P_3 dadas a seguir.
(a) $L(p(x)) = xp'(x)$

(b) $L(p(x)) = p(x) - p'(x)$
(c) $L(p(x)) = p(0)x + p(1)$

18. Seja $L : V \to W$ um transformação linear e seja T um subespaço de W. A *imagem inversa* de T, denotada por $L^{-1}(T)$, é definida por

$$L^{-1}(T) = \{\mathbf{v} \in V | L(\mathbf{v}) \in T\}$$

Mostre que $L^{-1}(T)$ é um subespaço de V.

19. Uma transformação linear $L : V \to W$ é dita *injetora* se $L(\mathbf{v}_1) = L(\mathbf{v}_2)$ implica que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ (isto é, dois vetores distintos $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ não podem ser levados no mesmo vetor $\mathbf{w} \in W$). Mostre que L é injetora se e somente se $\ker(L) = \{\mathbf{0}_V\}$.

20. Um operador linear $L : V \to W$ é dito *sobrejetor* se $L(V) = W$. Mostre que o operador $L : R^3 \to R^3$ definido por

$$L(\mathbf{x}) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)^T$$

é sobrejetor.

21. Quais dos operadores no Exercício 15 são injetores? Quais são sobrejetores?

22. Seja A uma matriz 2×2 e seja L_A o operador definido por

$$L_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

Mostre que:
(a) L_A leva R^2 no espaço coluna de A;
(b) se A é invertível, então L_A é sobrejetora de R^2 em R^2.

23. Seja D o operador derivada em P_3 e seja

$$S = \{p \in P_3 \mid p(0) = 0\}$$

Mostre que:
(a) D de P_3 em P_2 é sobrejetora, mas não é injetora;
(b) $D : S \to P_3$ é injetora, mas não é sobrejetora.

2 REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Na Seção 1, mostramos que cada matriz A $m \times n$ define uma transformação linear L_A de R^n em R^m dada por

$$L_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

para cada $\mathbf{x} \in R^n$. Nesta seção, mostraremos que a cada transformação linear L de R^n em R^m existe uma matriz A $m \times n$ tal que

$$L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

Veremos, também, que qualquer operador linear agindo entre espaços vetoriais de dimensão finita pode ser representado por uma matriz.

Teorema 4.2.1 *Se L é uma transformação linear de R^n em R^m, então existe uma matriz A $m \times n$ tal que*

$$L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

para cada $\mathbf{x} \in R^n$. De fato, o j-ésimo vetor coluna da matriz A é dado por

$$\mathbf{a}_j = L(\mathbf{e}_j) \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

Demonstração. Para $j = 1, \dots, n$, defina