$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

O leitor pode verificar que

$$L(\mathbf{u}_1) = -\mathbf{b}_1 + 4\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3$$

$$L(\mathbf{u}_2) = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3$$

□

EXERCÍCIOS

1. Para cada uma das transformações lineares L no Exercício 1 da Seção 1, encontre a matriz A que representa L.

2. Para cada uma das transformações lineares L de R^3 em R^2 a seguir, encontre uma matriz A tal que $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x}$ em R^3.

(a) $L((x_1, x_2, x_3)^T) = (x_1 + x_2, 0)^T$
(b) $L((x_1, x_2, x_3)^T) = (x_1, x_2)^T$
(c) $L((x_1, x_2, x_3)^T) = (x_2 - x_1, x_3 - x_2)^T$

3. Para cada uma das transformações lineares L de R^3 em R^3 a seguir, encontre uma matriz A tal que $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x}$ em R^3.

(a) $L((x_1, x_2, x_3)^T) = (x_3, x_2, x_1)^T$
(b) $L((x_1, x_2, x_3)^T) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)^T$
(c) $L((x_1, x_2, x_3)^T) = (2x_3, x_2 + 3x_1, 2x_1 - x_3)^T$

4. Seja L a transformação linear de R^3 em R^3 definida por
$L(\mathbf{x}) = (2x_1 - x_2 - x_3, 2x_2 - x_1 - x_3, 2x_3 - x_1 - x_2)^T$
Determine a matriz A de L em relação à base canônica e use-a para encontrar $L(\mathbf{x})$ para cada um dos vetores $\mathbf{x}$ a seguir.

(a) $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^T$ (b) $\mathbf{x} = (2, 1, 1)^T$ (c) $\mathbf{x} = (-5, 3, 2)^T$

5. Encontre a representação matricial canônica para cada um dos operadores lineares L em R^2 descritos a seguir.

(a) L roda cada vetor $\mathbf{x}$ de 45° no sentido antitrigonométrico.
(b) L reflete cada vetor $\mathbf{x}$ em relação ao eixo dos x_1 e depois roda o vetor refletido de 90° no sentido trigonométrico.
(c) L dobra o comprimento de $\mathbf{x}$ e depois roda o vetor obtido de 30° no sentido trigonométrico.
(d) L reflete cada vetor $\mathbf{x}$ em relação à reta $x_1 = x_2$ e depois projeta o vetor refletido sobre o eixo dos x_1.

6. Sejam

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e seja L a transformação linear de R^2 em R^3 definida por

$$L(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + (x_1 + x_2)\mathbf{b}_3$$

Encontre a matriz A de L em relação às bases $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ e $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]$.

7. Sejam

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e seja $\mathcal{I}$ o operador identidade em R^3.

(a) Encontre as coordenadas de $\mathcal{I}(\mathbf{e}_1)$, $\mathcal{I}(\mathbf{e}_2)$, $\mathcal{I}(\mathbf{e}_3)$ em relação a $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3]$.

(b) Encontre uma matriz A tal que $A\mathbf{x}$ é o vetor de coordenadas de $\mathbf{x}$ em relação a $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3]$.

8. Sejam $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ como no Exercício 7 e seja L a transformação linear de R^3 em R^3 definida por

$$L(c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + c_3\mathbf{y}_3) = (c_1 + c_2 + c_3)\mathbf{y}_1 + (2c_1 + c_3)\mathbf{y}_2 - (2c_2 + c_3)\mathbf{y}_3$$

(a) Encontre a matriz de L em relação à base ordenada $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3]$.
(b) Escreva cada um dos vetores $\mathbf{x}$ a seguir como uma combinação linear de $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ e use a matriz encontrada em (a) para determinar $L(\mathbf{x})$.

(i) $\mathbf{x} = (7, 5, 2)^T$ (ii) $\mathbf{x} = (3, 2, 1)^T$ (iii) $\mathbf{x} = (1, 2, 3)^T$

9. Seja L o operador linear de P_2 em R^2 definido por

$$L(p(x)) = \begin{pmatrix} \int_0^1 p(x)\,dx \\ p(0) \end{pmatrix}$$

Encontre uma matriz A tal que

$$L(\alpha + \beta x) = A\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

10. O operador linear definido por

$$L(p(x)) = p'(x) + p(0)$$

vai de P_3 em P_2. Encontre a matriz de L em relação às bases ordenadas $[x^2, x, 1]$ e $[2, 1 - x]$. Para cada um dos vetores $p(x)$ em P_3 a seguir, encontre as coordenadas de $L(p(x))$ em relação à base ordenada $[2, 1 - x]$.

(a) $x^2 + 2x - 3$ (b) $x^2 + 1$ (c) $3x$ (d) $4x^2 + 2x$

11. Seja S o subespaço de $C[a, b]$ gerado por e^x, xe^x e x^2e^x. Seja D o operador derivada em S. Encontre a matriz de D em relação à base $[e^x, xe^x, x^2e^x]$.

12. Seja L uma transformação linear de R^n em R^n. Suponha que $L(\mathbf{x}) = 0$ para alguma $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Seja A a matriz de L em relação à base canônica $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n]$. Mostre que A é singular.

13. Seja L um operador linear de um espaço vetorial V em si mesmo. Seja A a matriz de L em relação à base ordenada $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ [isto é, $L(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{v}_i, j = 1, \ldots, n$]. Mostre que A^m é a matriz de L^m em relação a $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$.

14. Sejam $E = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ e $F = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]$, onde

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, -1)^T, \quad \mathbf{u}_2 = (1, 2, 1)^T, \quad \mathbf{u}_3 = (-1, 1, 1)^T$$

e

$$\mathbf{b}_1 = (1, -1)^T, \quad \mathbf{b}_2 = (2, -1)^T$$

Para cada uma das transformações lineares L de R^3 em R^2 a seguir, encontre a matriz de L em relação às bases ordenadas E e F.

(a) $L(\mathbf{x}) = (x_3, x_1)^T$
(b) $L(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3)^T$
(c) $L(\mathbf{x}) = (2x_2, -x_1)^T$

15. Suponha que $L_1 : V \to W$ e $L_2 : W \to Z$ são transformações lineares e que E, F e G são bases ordenadas para V, W e Z, respectivamente. Mostre que, se A é a matriz de L_1 em relação às bases E e F e se B é a matriz de L_2 em relação às bases F e G, então a matriz $C = BA$ é a matriz de $L_2 \circ L_1$: $V \to Z$ em relação a E e G.

[***Sugestão:*** Mostre que $BA[\mathbf{v}]_E = [(L_2 \circ L_1)(\mathbf{v})]_G$ para todo $\mathbf{v} \in V$.]

16. Sejam V e W espaços vetoriais com bases ordenadas E e F, respectivamente. Se $L: V \to W$ é uma transformação linear e A é sua matriz em relação a E e F, mostre que:
(a) $\mathbf{v} \in \ker(L)$ se e somente se $[\mathbf{v}]_E \in N(A)$;
(b) $\mathbf{w} \in L(V)$ se e somente se $[\mathbf{w}]_F$ pertence ao espaço coluna de A.

3 SEMELHANÇA

Se L é uma transformação linear de um espaço vetorial V de dimensão n em si mesmo, a representação matricial de L depende da base ordenada escolhida para V. Usando bases diferentes, é possível representar L por matrizes diferentes $n \times n$. Nesta seção, vamos considerar representações matriciais diferentes de operadores lineares e caracterizar a relação entre matrizes associadas ao mesmo operador linear.

Vamos começar considerando um exemplo em R^2. Seja L a transformação linear de R^2 em si mesmo definida por

$$L(\mathbf{x}) = (2x_1, x_1 + x_2)^T$$

Como

$$L(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad L(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a matriz de L em relação a $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ é

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Usando uma base diferente, a matriz de L muda. Por exemplo, se usarmos como base

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

então, para determinar a matriz de L em relação a $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$, precisamos determinar $L(\mathbf{u}_1)$, $L(\mathbf{u}_2)$ e escrever esses vetores como uma combinação linear de $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$. Podemos usar a matriz A para encontrar $L(\mathbf{u}_1)$ e $L(\mathbf{u}_2)$.

$$L(\mathbf{u}_1) = A\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$L(\mathbf{u}_2) = A\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para expressar esses vetores em termos de $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, use a matriz mudança de base de $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ para $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$. Vamos primeiro calcular a matriz mudança de base de $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ para $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$. Ela é, simplesmente,

$$U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo, a matriz mudança de base de $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ para $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ é

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Para determinar as coordenadas de $L(\mathbf{u}_1)$, $L(\mathbf{u}_2)$ em relação a $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$, multiplicamos esses vetores por U^{-1}.

$$U^{-1}L(\mathbf{u}_1) = U^{-1}A\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$