MTM 5245 - 2015.1
Espaços Vetoriais

Prof. Maria Inez Carodoso Gonçalves

Lista de Exercícios 1

1. Suponha que estejam definidas as seguintes operações no conjunto
$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \; x, y > 0\} :$$
   - $(x, y) \oplus (z, w) = (xz, yw), \forall (x, y), (z, w) \in \; V$
   - $\alpha(x, y) = (x^\alpha, y^\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall (x, y) \in V$.

   Mostre que V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

2. Verique se os conjuntos abaixo são espaços vetorias:
a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \; 2x + y + z = 2\}$, com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar de $\mathbb{R}^3$.
b) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \; x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$, com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar de $\mathbb{R}^3$.
c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} | \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ com as operações usuias de soma e multiplicação por escalar de $M_2(\mathbb{R})$.

3. Mostre que $U = \{p(x) = a_0 + a_1x | \; a_0 - 2a_1 = 0\}$ é um subspaço de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, com as operações usais de soma e multiplicação por escalar de polinômios.

4. Quais dos conjuntos abaixo são subespaços de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$? Justifique sua resposta.
a) $U = \{xp(x) | \; p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})\}$.
b) $U = \{xp(x) | \; p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})\}$.
c) $U = \{p(x) | \; \mathrm{grau}(p) = 3\}$.

5. Seja U um subespaço de um espaço vetorial V.
a) Mostre que se $\alpha u \in U$, sempre que $\alpha \neq 0$, então $u \in U$.
b) Mostre que se u e $u + v \in U$, então $v \in U$.

6. Seja $V = M_2(\mathbb{R})$ e considere $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) | A^T = A\}$. Mostre que U é um subespaço de $M_2(\mathbb{R})$ e encontre uma base de U.
7. Prove que a união de dois subespaços de um espaço vetorial V é um subespaço de V se e somente se um dos dois subespaços está contido no outro.

8. Considere o seguinte conjunto $\mathcal{B} = \{(1,0), (i,0), (0,1), (0,i)\} \subset \mathbb{C}^2$.
   a) $\mathcal{B}$ é l.i. ou l.d. se considerarmos $\mathbb{C}^2$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$?
   b) $\mathcal{B}$ é l.i. ou l.d se considerarmos $\mathbb{C}^2$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

9. Suponha que u e v são vetores l.i. em um espaço vetorial V. Mostre que $\{u + 2v, u - 3v\}$ também é l.i. em V.

10. Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ um conjunto de vetores l.i. de um espaço vetorial V. Mostre que qualquer subconjunto não vazio de $\{v_1, \ldots, v_n\}$ também é l.i.

11. Seja A uma matriz $n \times n$ tal que $A^k = 0$ mas $A^{k-1} \neq 0$. Mostre que $\mathcal{B} = \{I, A, A^2, \cdots, A^{k-1}\}$ é l.i. em $M_n(\mathbb{R})$.

12. Seja $V = \mathcal{F}([0, 2\pi])$. Verifique se o conjunto $\{1, \cos^2 x,\ \mathrm{sen}^2 x\}$ é l.i. ou l.d. em $\mathcal{F}([0, 2\pi])$.

13. Verifique se os seguintes conjuntos são l.i. ou l.d.
   a) $\{e^x, \ln x\}$, em $\mathcal{F}(0, \infty)$.
   b) $\{8 + 3x + 3x^2, x + 2x^2, 2 + 2x + 2x^2, 8 - 2x + 5x^2\}$, em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
   c) $\{(1,5,5), (2,5,5), (3,5,5)\}$, em $\mathbb{R}^3$.

14. Encontre um conjunto gerador para o conjunto solução do sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + y + 2z & = & 0 \\ 2x + 2y + 5z + 3w & = & 0 \\ 4x + 4y + 10z + 3w & = & 0 \end{cases}$$

15. Dê um exemplo de um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ o qual é fechado em relação a adição e fechado em relação a existência do simétrico, mas não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

16. Seja U um subespaço de um espaço vetorial V, tal que $\dim(V)$ é finita. Mostre que se $\dim(U) = \dim(V)$ então $U = V$.

17. Seja $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
a) Mostre que $\mathcal{B} = \{1, 2+x, 3x - x^2, x - x^3\}$ é uma base de V.
b) Encontre as coordenadas de $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ em relação a base $\mathcal{B}$.

18. Sejam $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ e $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$ bases de um espaço vetorial V, suponha que $u_1 = 6v_1 - 2v_2$ e $u_2 = 9v_1 - 4v_2$.
a) Enconte a matriz mudança de base da base $\mathcal{B}$ para base $\mathcal{B}'$.
b) Se $x = 5u_1 + 3u_2$ encontre $[x]_{\mathcal{B}'}$.

19. Seja $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, e sejam $\mathcal{B} = \{1-2t+t^2,\ 3-5t+4t^2,\ 2t+3t^2\}$ e $\mathcal{C} = \{1,\ t,\ t^2\}$ bases de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Encontre a matriz mudança de base da base $\mathcal{B}$ para base $\mathcal{C}$.

20. Sejam $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$, $v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$..

a) Encontre uma base $\{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que P é a matriz mudança de base da base $\{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ para a base $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$.

b) Encontre uma base $\{w_1,\ w_2,\ w_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que P é a matriz mudança de base da base $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ para a base $\{w_1,\ w_2,\ w_3\}$.

21. Sejam $A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 5 \\ -4 & -1 & -5 \\ -5 & -2 & -4 \end{bmatrix}$, $v \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$.
Suponha que você saiba que os sistemas de equações $Ax = v$ e $Ax = w$ são ambos consistentes. O que você pode afirmar sobre o sistema $Ax = v + w$? Justifique sua resposta.

22. Verifique se $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (0,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

23. Verdadeiro ou falso? Se for verdadeiro justifique, se for falso dê um contra exemplo.

   a. $\mathbb{R}^3$ é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

   b. Se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ geram $\mathbb{R}^n$, então eles são l.i.

   c. Se A é uma matriz $m \times n$, então A e A^T tem a mesma nulidade.

   d. Todo subespaço de $\mathbb{R}^n$ possui uma única base.

   e. Existe um subespaço de $\mathbb{R}^7$ que contém exatamente sete vetores.

   f. Se $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ for um conjunto L.I. em um espaço vetorial V, então $\dim(V) \geq 4$.

g. O posto de uma matriz 3×4 pode ser 4.

h. Existe uma matriz inversível $n \times n$ cuja inversa possui posto $n - 1$.

i. Se A e B são matrizes 5×5, então $posto(A+B) = posto(A) + posto(B)$.

j. Existe uma base $\{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$ de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ tal que nenhum dos polinômios p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 possui grau 2.

24. Suponha que A é uma matriz $m \times n$ com colunas l.i.

a. Se para algum vetor b, o sistema $Ax = b$ possui solução, a solução será única? Justifique.

b. O que você pode afirmar sobre a relação entre m e n?

c. O que você pode afirmar sobre a relação entre m e n se o sistema $Ax = b$ possuir solução para todo $b \in \mathbb{R}^m$?