Solução

Sejam $u=(x,y)$, $v=(z,w)$, $v'=(z',w')$ $\in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$

1) (A) V é fechado em relação a $\oplus$

$u \oplus v = (x,y) \oplus (z,w) = (xz, yw)$, como $x>0$ e $z>0 \to xz>0$

como $y>0$ e $w>0 \to yw>0$

logo $(xz, yw) \in V$.

(A1) $u \oplus v = (xz, yw) = (zx, wy) = (z,w) \oplus (x,y) = v \oplus u$

(A2) $(u \oplus v) \oplus v' = (xz, yw) \oplus (z', w') = (xzz', ywu')$

$= (x,y) \oplus (zz', ww') = (x,y) \oplus ((z,w) \oplus (z', w'))$

$= u \oplus (v \oplus v')$.

(A3) O elemento neutro será $0 = (1,1)$.

Observe que $0 = (1,1)$ satisfaz $1>0$, $1>0$ e

$u \oplus 0 = (x,y) \oplus (1,1) = (x \cdot 1, y \cdot 1) = (x,y)$ $\forall u \in V$.

(A4) se $u = (x,y)$ então $-u = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$, como $x>0$

então $1/x > 0$, como $y>0$ então $1/y > 0$.

De fato: $u \oplus (-u) = \left(x \cdot \frac{1}{x}, y \cdot \frac{1}{y}\right) = (1,1) = 0$.

(M) $\alpha \odot (x,y) = (x^\alpha, y^\alpha)$, como $x>0 \to x^\alpha > 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

" $y>0 \to y^\alpha > 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

$\therefore \alpha \odot (x,y) \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall (x,y) \in V$

(M1) $\alpha \odot (\beta \odot (x,y)) = \alpha \odot (x^\beta, y^\beta) = ((x^\beta)^\alpha, (y^\beta)^\alpha) = (x^{\alpha\beta}, y^{\alpha\beta})$

$= (\alpha\beta) \odot (x,y)$.

(M2) $1 \odot (x,y) = (x^1, y^1) = (x,y)$

② (a) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y + z = 2\}$

não é subespaço de $\mathbb{R}^3$!

$(0,0,0) \notin U$.

(b) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$

não é subespaço!

$(0,0,0) \notin V$.

(c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} / a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

não é subespaço de M_2 !

$0 \notin M$!

③ $U = \{p(x) = a_0 + a_1 x \ / \ a_0 - 2a_1 = 0\}$

$U \neq \emptyset$ pois $p(x) = 0 + 0x \in U$. $(0 - 2.0 = 0 \checkmark)$

sejam $p(x) = a_0 + a_1 x$ e $q(x) = b_0 + b_1 x$

$(p+q)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x$

$(a_0 + b_0) - 2(a_1 + b_1) = (a_0 - 2a_1) + (b_0 - 2b_1)$

$= 0 + 0 = 0$. $\therefore p + q \in U$

sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in U$.

$\alpha p(x) = \alpha a_0 + (\alpha a_1)x$

$\alpha a_0 - 2(\alpha a_1) = \alpha(a_0 - 2a_1) = \alpha . 0 = 0$

$\therefore \alpha p \in U$.

4) (a) $U = \{x\,p(x) / p(x) \in P_2(\mathbb{R})\}$

$U \neq \emptyset$, $0 \in U$. $(x \cdot 0)$

sejam $p, q \in U$. Então existem $p_1, q_1 \in P_2(\mathbb{R})$ tais que

$$p(x) = x\,p_1(x)$$

$$q(x) = x\,q_1(x).$$

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) = x\,p_1(x) + x\,q_1(x)$$

$$= x\underbrace{(p_1(x) + q_1(x))}_{\in P_2(\mathbb{R})} \in U.$$

$$(\alpha p)(x) = \alpha(x\,p_1(x)) = x\underbrace{(\alpha p_1(x))}_{\in P_2(\mathbb{R})} \in U.$$

b) $U = \{x\,p(x) / p(x) \in P_3(\mathbb{R})\}$

Não é subespaço de $P_3(\mathbb{R})$!

Contra-exemplo: $p(x) = x^3$, $x\,p(x) = x^4 \notin P_3(\mathbb{R})$

(c) $U = \{p(x) / \text{grau}(p) = 3\}$

não é subespaço!

$p(x) = x - x^3 \in U$ $\quad 0 \notin U$

$q(x) = x + x^3 \in U$

$(p+q)(x) = 2x \notin U.$

(5) U subespaço de V.

(a) se $\alpha u \in U$, $\alpha \neq 0 \Rightarrow u \in U$.

sol: Como $\alpha \neq 0$, $\exists\, \alpha^{-1}$ tq $\alpha^{-1}\alpha = 1$

Como $\alpha u \in U$ e U é subespaço

$\alpha^{-1}(\alpha u) \in U$, mas $\alpha^{-1}(\alpha u) = 1 \cdot u = u$

logo $u \in U$.

/ /

(b) Se u e $u+v \in U$ então $v \in U$

Como $u \in U$ e U é subespaço, $-u \in U$,

assim, $-u + (u+v) \in U$, mas

$-u+(u+v) = 0+v = v$, logo $v \in U$.

⑥ $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \,/\, A^T = A\}$.

$U \neq \emptyset$, $0 \in U$

sejam $A, B \in U$, $(A+B)^T = A^T + B^T = A+B$

$\therefore A+B \in U$.

$\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in U$

$(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A \quad \therefore \alpha A \in U$.

$$A \in U \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

$$= a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

⑦ sejam U e W subespaços de V, $U \cup W = \{v \in V / v \in U$ ou $v \in W\}$

Suponha que $U \subseteq W$, o caso $W \subseteq U$ é análog., então

como $U \cup W = W$, temos que $U \cup W$ é subespaço de V

Suponha agora que $U \cup W$ é subespaço de V.

se $U \not\subseteq W$, então existe $u \in U$ tal que $u \notin W$.

seja w um vetor qualquer de W, então

$u + w \in U \cup W$, logo $u+w \in U$ ou $u+w \in W$.

Se $u+w \in U$, como U é subespaço, $(u+w) - u = w \in U$

se $u+w \in W$, " W é subespaço, $(u+w) - w = u \in W$,

o que não pode ocorrer, pois $U \not\subseteq W$. Assim, $w \in U$,

ou seja, $W \subseteq U$.

! !

8) $\mathcal{B} = \{(1,0), (i,0), (0,1), (0,i)\}$.

a) Se $V = \mathbb{C}^2$ como esp. vet. sobre $\mathbb{C}$.

$-i(1,0) + 1(i,0) + (-i)(0,1) + 1(0,i) = (0,0)$

$\therefore$ são l.d.

b) se $V = \mathbb{C}^2$ como esp. vet sobre $\mathbb{R}$.

suponha que existem $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tq

$a(1,0) + b(i,0) + c(0,1) + d(0,i) = (0,0)$

i.e $\begin{cases} a + ib = 0 \\ c + id = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} a = b = 0 \\ c = d = 0 \end{matrix}$

$\therefore$ são l.i.

9) u, v são l.i em V

$\rightarrow \{u + 2v, u - 3v\}$ l.i.

suponha que existam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tq

$\alpha(u + 2v) + \beta(u - 3v) = 0$

$(\alpha + \beta)u + (2\alpha - 3\beta)v = 0$

como u e v são l.i, temos que

$\left.\begin{matrix} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha - 3\beta = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$

$\therefore \{u + 2v, u - 3v\}$ é l.i.

10) $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ um conjto l.i

Mostre que qquer subconjto não vazio de $\{v_1, \dots, v_n\}$ tbém é l.i.

Seja $\mathcal{B}' = \{v_{l_1}, v_{l_2}, \dots, v_{l_k}\}$ um subconjto não vazio de $\mathcal{B}$.
Se $\mathcal{B}'$ fosse l.d, teríamos que $\mathcal{B}$ contém um
um subconjto l.d. e portanto seria l.d.
Logo, $\mathcal{B}'$ é l.i.

11) $A_{m\times m}$, $A^k = 0$, $A^{k-1} \neq 0$.

$\mathcal{B} = \{I, A, A^2, \ldots, A^{k-1}\}$ é l.i.

Sejam $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}$ tq.

$$\alpha_0 I + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{k-1} A^{k-1} = 0$$

mult por A^{k-1} temos

$$\alpha_0 A^{k-1} + \alpha_1 A^{k} + \cdots + \alpha_{k-1} A^{2k-2} = 0 \rightarrow \alpha_0 = 0$$

mult por A^{k-2}

$$\alpha_1 A^{k-1} + \alpha_2 A^{k} + \cdots + \alpha_{k-1} A^{2k-3} = 0$$

$$\rightarrow \alpha_1 = 0$$

$\vdots$

Prosseguindo desta maneira temos que $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$.

$\therefore \{I, A, \ldots, A^{k-1}\}$ é l.i.

12 - $\{1, \cos^2 x, \operatorname{sen}^2 x\}$ é l.d.

Como $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \ \forall x$, temos que

$$(-1)\cdot 1 + 1\cdot \operatorname{sen}^2 x + 1\cdot \cos^2 x = 0 \quad \forall x$$

$\therefore$ são l.d

13 - (a) $\{e^x, \ln x\}$

suponha que existam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que:

$$a e^x + b \ln x = 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

p/ $x = 1$, temos $a e + b \cdot 0 = 0 \rightarrow \boxed{a = 0}$

Temos então que $b \ln x = 0 \ \forall x \rightarrow b = 0$

$\therefore \{e^x, \ln x\}$ é l.i

8) $\mathcal{B} = \{(1,0), (i,0), (0,1), (0,i)\}$.

a) Se $V = \mathbb{C}^2$ como esp. vet. sobre $\mathbb{C}$.

$-i(1,0) + 1(i,0) + (-i)(0,1) + 1(0,i) = (0,0)$

$\therefore$ são l.d.

b) se $V = \mathbb{C}^2$ como esp. vet sobre $\mathbb{R}$.

suponha que existem $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tq

$$a(1,0) + b(i,0) + c(0,1) + d(0,i) = (0,0)$$

ie $\begin{cases} a + ib = 0 & \to a = b = 0 \\ c + id = 0 & c = d = 0 \end{cases}$

$\therefore$ são l.i.

9) u, v são l.i em V

$\Rightarrow \{u + 2v, u - 3v\}$ l.i.

suponha que existam $\alpha, \beta \in K$ tq

$$\alpha(u + 2v) + \beta(u - 3v) = 0$$

$$(\alpha + \beta)u + (2\alpha - 3\beta)v = 0$$

como u e v são l.i, temos que

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha - 3\beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

$\therefore \{u + 2v, u - 3v\}$ é l.i.

10) $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ um conj l.i

Mostre que qquer subconjto não vazio de $\{v_1, \ldots, v_n\}$ tbém é l.i.

Seja $\mathcal{B}' = \{v_{l_1}, v_{l_2}, \ldots, v_{l_k}\}$ um subconjto não vazio de $\mathcal{B}$. Se $\mathcal{B}'$ fosse l.d, teríamos que $\mathcal{B}$ contém um um subconjto l.d. e portanto seria l.d.

Logo, $\mathcal{B}'$ é l.i.

(13) b) $\{8+3x+3x^2, x+2x^2, 2+2x+2x^2, 8-2x+5x^2\}$

sup que existam escalares a, b, c e d $\in \mathbb{R}$, t.q.

$$a(8+3x+3x^2)+b(x+2x^2)+c(2+2x+2x^2)+d(8-2x+5x^2)=0 \ \forall x$$

ou seja

$$\begin{cases} 8a + 2c + 8d = 0 \\ 3a+b+2c-2d = 0 \\ 3a+2b+2c+5d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 17/5 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -48/5 \end{bmatrix}$$

posto (A) = 3

colunas 4

var livres: 4-3=1

→ possui inf sol → l.d.

outra forma de resolver:

$P_2(\mathbb{R})$ possui dimensão 3, assim qquer conjto com 4 ou mais vetores é l.d.!

c) $\{(1,5,5), (2,5,5), (3,5,5)\}$

$$a(1,5,5)+b(2,5,5)+c(3,5,5)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases} a+2b+3c=0 \\ 5a+5b+5c=0 \\ 5a+5b+5c=0 \end{cases}$$

Vamos resolver Ax=0!

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & +1 & +2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

posto (A) = 2

→ nº variáveis livres = 3-2 = 1

O sistema possui inf sol.!

→ os vetores são l. d

(14)

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 5z + 3w = 0 \\ 4x + 4y + 10z + 3w = 0 \end{cases}$$

Escalonando a matriz do sistema vamos obter:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 10 & 3 \end{bmatrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Resolvendo $\tilde{A}X = 0$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

$\therefore$ As soluções do sistema são da forma

$$\{(-y, y, 0, 0)^T \,/\, y \in \mathbb{R}\}$$

ou seja

$$\{y(-1, 1, 0, 0)^T \,/\, y \in \mathbb{R}\}$$

Assim, um conjto gerador é dado por $\{(-1, 1, 0, 0)^T\}$

(15) $S = \{(x, y) \,/\, x, y \in \mathbb{Z}\}$.

S é fechado em relação a soma e exist. do simétrico, mas não é fechado em rel. a mult. por escalar.

Tome $\alpha = 1/2$, $u = (1, 1) \in S$, $\alpha \cdot u = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin S$.

suponha que $\dim(U) = \dim(V) = n$.

16) Suponha que existe $v \in V$ tal que $v \notin U$.
seja $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de U.
Então, $B \cup \{v\}$ é l.i em V, o que é uma contradição, pois $\dim(V) = n$ (qquer conjto com $n+1$ vetores é l.d.!.)

17) $V = P_3(\mathbb{R})$, $\dim(V) = 4$

a) Como $\dim(V) = 4$ e B possui 4 vetores, p/ mostrar que B é uma base, basta mostrarmos que B é l.i <u>ou</u> que B gera V.
Vamos mostrar que B é l.i
suponha que existam escalares a, b, c, d tais que

$$a \cdot 1 + b(2+x) + c(3x - x^2) + d(x - x^3) = 0 \quad \forall x.$$

ou seja

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ b + 3c + d = 0 \\ -c = 0 \\ -d = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a = 0 \\ \to b = 0 \\ c = 0 \\ \to d = 0 \end{matrix}$$

$\therefore a = b = c = d = 0$

$\to B$ é l.i $\to B$ é uma base.

b) Queremos encontrar a, b, c, d tais que

$$1 + x + x^2 + x^3 = a(1) + b(2+x) + c(3x - x^2) + d(x - x^3)$$

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ b + 3c + d = 1 \\ -c = 1 \\ -d = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a = 1 - 2 \cdot 6 = -11. \\ b = 1 - 3(-1) - (-1) = 6 \\ \boxed{c = -1} \\ \to \boxed{d = -1} \end{matrix}$$

$\therefore \boxed{[p]_B = (-11, 6, -1, -1)^T}$

(18) $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$

$\mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$

$u_1 = 6v_1 - 2v_2$

$u_2 = 9v_1 - 4v_2$

a) Observe que a matriz mudança de base de $\mathcal{B}$ p/ $\mathcal{B}'$ é:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

b) $[x]_{\mathcal{B}} = (5,3)^T$

$$[x]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30+18 \\ -10-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ -22 \end{bmatrix}$$

19 $\mathcal{B} = \{1 - 2t + t^2, 3 - 5t + 4t^2, 2t + 3t^2\}$

$\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$

$\mathcal{B} \to \mathcal{C}$

$1 - 2t + t^2 = 1 \cdot 1 - 2 \cdot t + 1 \cdot t^2$

$3 - 5t + 4t^2 = 3 \cdot 1 - 5 \cdot t + 4 \cdot t^2$

$2t + 3t^2 = 0 + 2\,t + 3 \cdot t^2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

20 a) Temos que

$u_1 = 1 v_1 - 3 v_2 + 4 v_3$

$u_2 = 2 v_1 - 5 v_2 + 6 v_3$

$u_3 = -1 v_1 + 0 v_2 + 1 \cdot v_3$

b)
$$\begin{cases} v_1 = 1 w_1 - 3 w_2 + 4 w_3 \\ v_2 = 2 w_1 - 5 w_2 + 6 w_3 \\ v_3 = -w_1 \qquad + w_3 \end{cases}$$

Resolvendo p/ w_1, w_2 e w_3 temos:

$w_1 = 5 v_1 - 3 v_2 - 2 v_3$

$w_2 = 8 v_1 - 5 v_2 - 2 v_3$

$w_3 = 5 v_1 - 3 v_2 - v_3$

(/ /)

(21) se $Ax = v$ possui sol., então $v \in col(A)$

se $Ax = w$ " " " $w \in col(A)$

Como $v, w \in col(A)$, temos que $(v + w) \in col(A)$

logo,

$$Ax = (v+w) \text{ tbém possui sol.}$$

(22) $\mathcal{B}$ não é uma base de $\mathbb{R}^3$, pois $\mathcal{B}$ é um conjto l.d. em $\mathbb{R}^3$. (qquer conjto com mais de 3 vetores em $\mathbb{R}^3$ é sempre l.d.!)

(23) (a) Falso!

$\mathbb{R}^3$ não é um subconjto de $\mathbb{R}^4$!

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, mas $(x, y, z) \notin \mathbb{R}^4$

(b) Verdadeiro

n vetores que geram um esp de dimensão n, são sempre l.i

(c) Falso

Suponha que posto $(A) = r$.

$$\left.\begin{array}{l} nul(A) = n - r \\ nul(A^T) = m - r \end{array}\right\} \text{ se } m \neq n,\ nul(A) \neq nul(A^T)$$

(d) FALSO

Ex: $S = \{(x, 0, \dots, 0)^T / x \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, \dots, 0)^T\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{(2, 0, \dots, 0)^T\}$ são bases de S!

(e) FALSO

Todo subespaço de $\mathbb{R}^7$ ou contém um elemento ($S=\{(0,0,0,0,0,0,0)\}$) ou possui infinitos elem.

(f) VERDADEIRO

se $\dim(V) \leq 3$, então qquer conjto com 4 vetores é l.d.

(g) FALSO

$A_{m \times n}$, $\text{posto}(A) \leq \min\{m,n\}$.

(h) FALSO

A inversa de uma matriz tbém é uma matriz inversível! Logo, seu posto tbém é n!

(i) FALSO

Tome $A = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

$\text{posto}(A) = \text{posto}(B) = \text{posto}(A+B) = 5$

Assim,

$$5 \neq 5+5$$

(j) VERDADEIRO

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2 - x^3, x^3\}$.

seja $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

Então

$$p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2(x^2 - x^3) + (a_3 + a_2)x^3$$

(24) (a) Como as colunas de A são l.i elas formam uma base p/ $col(A)$.
Assim, se $Ax=b$ possui sol, $b \in col(A)$ e logo a sol. é única.
(se $Ax_1 = b$ e $Ax_2 = b$, $x_1 \neq x_2$

$$Ax_1 - Ax_2 = b - b$$

ie $A(\underbrace{X_1 - X_2}_{\neq 0}) = 0 \Rightarrow \exists\, x = x_1 - x_2 \in N(A)$

o que é uma contradição, pois as colunas de A são l.i

(b) Como A possui n colunas l.i., temos que
$$posto(A) = n$$
Como cada pivô está localizado em uma linha (diferente) temos que $m \geq n$ (caso contrário o $posto(A) = m$)

(C) se $Ax = b$ possui sol. para todo $b \in \mathbb{R}^m$, então $col(A) = \mathbb{R}^m$, assim, além de l.i., as colunas de A também geram $\mathbb{R}^m$, então $m = n$